

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2009 with funding from
University of Toronto

VERSLAG VAN DE GEWONE
VERGADERINGEN DER WIS- EN
NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 24 DECEMBER 1909
-:- TOT 29 APRIL 1910 -:-

DEEL XVIII
(2^{DE} GEDEELTE)

119349
23/10/11

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:=====: MEI 1910 :=====:

1000 15

Q
57
A522
d. is
gch. 2

I N H O U D.

		Blz.
Verslag Vergadering	24 December 1909	503
.. ..	29 Januari 1910	567
.. ..	26 Februari	675
.. ..	26 Maart	799
.. ..	29 April	853

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Vrijdag 24 December 1909.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 504.

In Memoriam N. W. P. RAUWENHOFF, p. 505.

A. F. HOLLEMAN: „Over de invoering van een derden substituent in het digesubstitueerde benzol”, p. 507.

C. A. PEKELHARING en C. J. C. VAN HOOGENHUYZE: „Over de vorming van kreatine in de spieren bij den tonus en bij de verstijving”, p. 521.

A. F. HOLLEMAN en J. BOESEKEN: „Over de oorzaak der tegenstelling tusschen de substitutie naar para-ortho-plaatsen en naar de meta-plaats in de benzolkern”, p. 535.

A. F. HOLLEMAN en J. J. RINKES: „Over de bereiding en de physieke eigenschappen van de mono-chloor- en mono-broomphenolen”, p. 540.

H. R. KRUYT: „Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire mengkristal-systemen”, (1e Mededeeling). (Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en W. H. JULIUS), p. 542.

L. BOLK: „Over de helling van het Foramen magnum bij de Primaten”. (2e Mededeeling over de vergelijkende Craniologie der Primaten), p. 551.

P. J. KOHNSTAMM: „Een kort antwoord op de opmerkingen van den Heer VAN LAAR”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 560.

H. A. BROUWER: „Pienacriet, een melanocrate foyriet van Transvaal”. (Aangeboden door de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en K. MARTIN), p. 563. (Met één plaat).

Aanbieding van boekgeschenken, p. 565.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1°. Bericht van den Heer MOLL, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Zijne Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 14 December 1909, met bericht dat de Heer F. A. F. C. WENT benoemd is tot gedelegeerde van de Nederlandsche Regeering bij het in 1910 te Brussel te houden 3^e Internationaal botanisch Congres en zulks buiten bezwaar van 's Rijks schatkist.

Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Missive van denzelfden Minister d.d. 13 December 1909, waarin Zijne Exc. dank zegt voor de ontvangst van een 10-tal exemplaren van het gedrukte verslag, in vier afzonderlijke nota's, uitgebracht door de Commissie van Advies, benoemd om haar onderzoek mede te deelen omtrent wijzigingen der Noordzeekust en te kennen geeft gaarne gebruik te zullen maken van het aanbod om ook eenige exemplaren van de Engelsche vertaling dier gedrukte nota's te ontvangen.

Voor kennisgeving aangenomen.

4°. 7^e Circulaire van het III^e Internationaal botanisch Congres, van 12—22 Mei 1910 te Brussel te houden.

Voor kennisgeving aangenomen.

De Secretaris deelt mede dat de Regeering hem een som van f 2500.— heeft uitgekeerd, ten einde die aan Prof. Mosso te Turijn te doen toekomen voor het bezoek aan het Laboratorium op den Col d'Olen. Ofschoon deze som op het oogenblik nog niet in handen van Prof. Mosso is, heeft de Voorzitter, om te kunnen voldoen aan den slotzin van het Ministerieel schrijven, waarin Zijne Exc. den wensch te kennen geeft een voordracht omtrent het bezoek aan gemeld Laboratorium van onze Akademie te gemoet te zien, gemeend eene Commissie te moeten benoemen om deswege een voorstel te doen. In deze Commissie zijn benoemd de Heeren W. EINTHOVEN, C. A. PEKELHARING, T. PLACE, H. J. HAMBURGER en H. ZWAARDEMAKER. In de Januari-vergadering van 1910 wordt rapport verwacht.

Verder deelt de Voorzitter mede :

1°. Dat de Heer G. C. J. VOSMAER zich bereid verklaard heeft de Akademie te vertegenwoordigen bij het VIII^e Internationaal Zoölogien-Congres, van 15—20 Augustus 1910 te Graz te houden.

Aan het Bestuur van het Congres zal daarvan mededeeling gedaan worden.

2°. Dat het buitenlandsch lid, de Heer H. E. J. G. du Bois te Berlijn, bereid is zich, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist, door de Nederlandsche Regeering te doen afvaardigen naar het in 1910 te Brussel te houden internationaal Congres voor radiologie en electriciteit.

Aan Zijne Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken zal hiervan worden kennis gegeven.

Voorts is ingekomen het bericht van het overlijden van het Lid der Akademie

Dr. NICOLAAS WILHEM PIETER RAUWENHOFF.

Dit schrijven is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Naar aanleiding van dit schrijven zegt de Voorzitter het volgende :

Mijnn Heeren!

Een kort woord zij ook hier gewijd aan de nagedachtenis van ons ontslapen medelid, die den 6^{en} Juli 1826 geboren, op ruim 83-jarigen leeftijd van ons is heengegaan.

NICOLAAS WILHEM PIETER RAUWENHOFF studeerde aan de Utrechtsche Hoogeschool, voornamelijk onder leiding van HARTING en GERRIT JAN MULDER en promoveerde aldaar in 1853. Toen in 1859 OUDEMANS als opvolger van MIQUEL naar Amsterdam vertrok, werd RAUWENHOFF in diens plaats als lector in de botanie aan de klinische school te Rotterdam benoemd, en al werd bij de invoering der geneeskundige wetten deze inrichting opgeheven, toch bleef hij in Rotterdam als docent werkzaam en wel als leeraar in de Natuurlijke Historie aan de Hoogere Burgerschool en als beheerder van den kleinen plantentuin, die vroeger aan de klinische school was verbonden.

Na den dood van MIQUEL volgde hij hem op als hoogleeraar aan de Hoogeschool te Utrecht en bleef daar een vijf-en-twintig-tal jaren werkzaam, tot in 1896 de zeventigjarige leeftijd hem dwong die betrekking vaarwel te zeggen.

Reeds in 1863 was RAUWENHOFF tot lid onzer afdeling benoemd en tal van jaren woonde hij trouw onze vergaderingen bij, doch in den laatsten tijd beletten toenemende

doofheid en vermindering van zijn gezichtsvermogen hem aan onze werkzaamheden deel te nemen; ongesteldheid dwong hem al meer en meer zich uit alles terug te trekken en eindelijk vond hij de gewenschte rust.

In zijn wetenschappelijke studiën heeft RAUWENHOFF van den beginne af de physiologische richting gekozen, aan welke keus de invloed van MULDER zeker niet vreemd was. In zijn proefschrift behandelde hij de betrekkingen van de groene plantendeelen tot de zuurstof en het koolzuur van den dampkring onder den invloed van het zonlicht, en later heeft hij, zoowel in de werken onzer Akademie als in de Archives néerlandaises, de uitkomsten medegedeeld van zijne onderzoekingen over den invloed van het licht en de warmte op den plantengroei en over de samenstelling van het chlorophyl. Levendig herinner ik mij nog uit gesprekken met hem zijne belangstelling in het vraagstuk om de beginselen van de mechanische warmteleer op de ontwikkeling van de plant toe te passen, en zijn ijverig streven om bij de oplossing van dit zoo ingewikkelde probleem den juisten weg te vinden.

Later heeft RAUWENHOFF zich ook met anatomische onderzoekingen bezig gehouden, en in de werken van de Akademie studiën over de ontwikkeling der cryptogamen gepubliceerd.

Ook bij zijn onderwijs stelde hij de physiologie en anatomie op den voorgrond, niet als nevenzaak naast de systematiek, maar als hoofdzaak, en hij gaf den stoot tot stichting van een plantenphysiologisch laboratorium bij den Utrechtschen plantentuin, het eerste dat in ons land tot stand kwam.

Zoo heeft RAUWENHOFF met vrucht, rustig en kalm gewerkt in het vak zijner keuze, en ten volle mag hij een beoefenaar der scientia amabilis genoemd worden, want ieder die hem gekend heeft zal zeker beamen wat MULDER in zijne autobiographie van zijn geliefden leerling schrijft, „hij was een voorbeeld van keurigheid en beschaafdheid en een best mensch”.



Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan:
„Oeer de invoering van een derden substituent in het digesubstitueerde benzol”.

In de chemische literatuur vindt men verschillende opmerkingen verspreid omtrent de plaats waar een derde substituent intreedt, indien er zich reeds twee substituenten in een benzolkern bevinden. Ook zijn er enkele regels opgesteld, die dit trachten aan te geven. Deze regels zijn echter slechts van zeer beperkte aanwendbaarheid, en door latere onderzoekingen ook niet altijd bevestigd geworden. Omtrent de voorspelling van de plaats, die een derde substituent zal innemen heeft men het eigenlijk nog niet veel verder gebracht dan tot eenige, weinig omschreven, voorstellingen, die niet in een precieseren vorm gebracht zijn. Meestal acht men den invloed van één der aanwezige substituenten overheerschend, zoodat deze de plaats aan den derden substituent aanwijst; daarbij wordt dan de invloed van den tweeden, reeds aanwezigen substituent zeer gering geacht.

Het is voor de hand liggend, dat het veel rationeeler is, den invloed van beide substituenten in aanmerking te nemen en te trachten aldus tot de voorspelling van de plaats te komen, die een derde intredende substituent zal innemen. Daartoe moet dan echter de invloed van elken reeds aanwezigen substituent afzonderlijk, op de verdere substitutie nader omschreven worden. Teneinde daartoe te geraken heb ik uit de chemische literatuur zooveel mogelijk alle gevallen van directe invoering van een tweeden substituent in het monogesubstitueerde benzol verzameld en tabellarisch samengesteld. Hierbij bleek nu vooreerst de welbekende tegenstelling, dat een substituent of op para-ortho-plaatsen, of wel op de meta-plaats ten opzichte van den reeds aanwezigen substituent treedt; maar ook, dat dit onafhankelijk van den aard van den nieuw intredenden substituent is. Bij de talrijke substituties die zijn uitgevoerd, bevinden zich slechts zeer weinige uitzonderingen hierop, en deze zijn nog zonder onderscheid van twijfelachtigen aard. Alleen moet gelet worden op wat BLANKSMA genoemd heeft de indirecte substituties, waarbij de substitutie primair in de zijketen plaats heeft en eerst daarna de substituent naar de kern verspringt. In dit geval volgt de substitutie altijd naar para-ortho-plaatsen, ook als de directe substitutie tot meta-substituties voert.

Men heeft dus twee typen van substitutie in het monogesubstitueerde benzol te onderscheiden: substitutie naar para-ortho-plaatsen, waarbij soms kleine hoeveelheden meta-verbinding kunnen ontstaan; en substitutie naar de meta-plaats, waarbij als nevenproduct, al naar de omstandigheden de ortho- of de para-verbinding zich vormen.

Binnen die typen komen groote variaties voor in de verhouding, waarin de isomeren zich vormen: dit hangt van verschillende omstandigheden af, maar bij deze variaties blijft toch steeds het type der substitutie behouden. Wordt b.v. benzoëzuur genitreerd bij 0° , dan vormt zich ca 80% meta-, ca 19% ortho- en ca 1% para-nitrobenzoëzuur: door verandering van nitratietemperatuur of door nitratie in zwavelzure oplossing kunnen deze cijfers wel vrij groote veranderingen ondergaan, maar hoofdproduct blijft toch steeds de meta-verbinding.

Zijn er twee substituenten in de benzolkern aanwezig en storen zij elkanders richtende werking niet, of althans niet aanzienlijk, dan zal men ook hierbij moeten waarnemen, dat in een gegeven digesubstitueerd benzol alle derde substituenten op dezelfde plaatsen intreden, onafhankelijk van hunnen aard. Inderdaad blijkt dit het geval te zijn. Ook voor de invoering van een derden substituent in het digesubstitueerde benzol verzamelde ik alle in de literatuur bekende gevallen en stelde deze in tabellen te zamen, waardoor genoemde regelmatigheid duidelijk te voorschijn trad. De hier voorkomende uitzonderingen waren zeer weinig in aantal en de meeste daarvan nog twijfelachtig.

Door dit resultaat is het mogelijk laatstgenoemde tabellen in veel beknopteren vorm samen te vatten; want in plaats van voor elken derden substituent afzonderlijk de plaats aan te geven, waar hij in een gegeven verbinding C_6H_4AB intreedt, laat zich dit nu door één cijfer voor alle substituenten te zamen aangeven. Men verkrijgt zoo onderstaande tabellen. Het hoofdproduct is in deze steeds het eerst aangegeven, de nevenproducten, voor zooverre dit althans doenlijk was, in volgorde der afnemende hoeveelheden, waarin zij worden gevormd.

Teneinde uit deze tabellen conclusies te kunnen trekken, is het eerst noodig, de verschillende gevallen van substitutie die zich kunnen voordoen, van uit het volgende gezichtspunt te beschouwen. Bij de invoering van C in C_6H_5A zal de totale reactie met eene zekere snelheid geschieden, die zich over de drie isomeren verdeelt in de verhouding, waarin deze ontstaan. Wordt C in C_6H_5B ingevoerd, dan zal de substitutie-snelheid in 't algemeen eene andere zijn. Wij nemen nu aan, dat bij de invoering van C in C_6H_4AB de beide aanwezigen substituenten elkander in hunne werking niet storen. Dan laat zich in de onderstaande gevallen het volgende voorzeggen omtrent de plaats, waar C zal intreden. Vooropgesteld worde nog, dat de substitutiesnelheid bij aanwezigheid van A steeds grooter is verondersteld dan bij aanwezigheid van B.

TABEL I.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
Cl = 1	nieuwe subst. treedt op		
Cl, Cl	4,3	4,2	—
Cl, Br	—	—	2
Cl, J	—	2 of 6	2
Cl, NO ₂	4,6	4	2
Cl, SO ₃ H	—	—	2
Cl, CH ₃	4,6	4,6,2	2,3
Cl, CO ₂ H	4,6	4,6	2
Cl, NH ₂	4,5	4	3
Cl, OH	4	4,6,2	3
Cl, CHO	4,6	4,6	2

TABEL II.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
Br = 1	nieuwe subst. treedt op		
Br, Cl	—	—	3
Br, Br	4,3	4,2	—
Br, NO ₂	4,6	4	2
Br, SO ₃ H	4	4,6	2
Br, CH ₃	4,5,3	4,2	2,3
Br, CO ₂ H	4,6	6,4,2	2
Br, NH ₂	5	6	3,2
Br, OH	5,3	—	3
Br, CN	4	—	2
Br, CHO	—	4	2

TABEL III.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
J = 1	nieuwe subst. treedt op		
J, Cl	—	2 of 4	3
J, J	4	4	—
J, NO ₂	4,6	4?	2
J, CH ₃	4	—	3?
J, CO ₂ H	4	—	—
J, NH ₂	—	6	—
J, OH	5	—	3

TABEL IV.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
NO ₂ = 1	nieuwe subst. treedt op		
NO ₂ , Fl	—	—	3
NO ₂ , Cl	3,5	6	3
NO ₂ , Br	3,5	6	5
NO ₂ , J	3,5	6	3
NO ₂ , NO ₂	—	5	—
NO ₂ , SO ₃ H	—	2?	—
NO ₂ , CH ₃	3	4,6,2	4
NO ₂ , CO ₂ H	4,5,3	5	3,2
NO ₂ , NH ₂	5,3	6,4,2	3
NO ₂ , OH	5,3	4,2,6	3

TABEL V.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
SO ₃ H = 1	nieuwe subst. treedt op		
SO ₃ H, Fl	—	—	3
SO ₃ H, Cl	—	—	3
SO ₃ H, Br	5	6.4	3
SO ₃ H, NO ₂	—	2?	—
SO ₃ H, SO ₃ H	—	5	—
SO ₃ H, CH ₃	5	4.2	3
SO ₃ H, CO ₂ H	4	5	2
SO ₃ H, NH ₂	5	4.6	3
SO ₃ H, OH	5	—	3

TABEL VI.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
CH ₃ = 1	nieuwe subst. treedt op		
CH ₃ , Fl	—	—	2
CH ₃ , Cl	3.6.4.5	6.4	2.3
CH ₃ , Br	5	2.6	3.2
CH ₃ , J	5	—	2
CH ₃ , NO ₂	6	4.6.2	2
CH ₃ , SO ₃ H	4	6.2	2
CH ₃ , CH ₃	4	4	—
CH ₃ , CO ₂ H	4.6	6.4.2	2
CH ₃ , NH ₂	5	6.2.4	3.2
CH ₃ , OH	3.5	6.4	3
CH ₃ , CN	4	—	2
CH ₃ , CHO	—	4.2	2

TABEL VII.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
CO ₂ H = 1	nieuwe subst. treedt op		
CO ₂ H, Cl	5.3	4.6.2	3
CO ₂ H, Br	5.3	4.6.2	3
CO ₂ H, J	5	—	—
CO ₂ H, NO ₂	5.4.6	5	2.3
CO ₂ H, SO ₃ H	5	5	3
CO ₂ H, CH ₃	5.3	4.6.2	3
CO ₂ H, CO ₂ H	3.4	5	—
CO ₂ H, NH ₂	5	2.4.6	3
CO ₂ H, OH	5.3	4.2	3

TABEL VIII.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
NH ₂ = 1	nieuwe subst. treedt op		
NH ₂ , Cl	5.4	6.4	2
NH ₂ , Br	4	4	2
NH ₂ , J	—	4	—
NH ₂ , NO ₂	4.6	4.6	2
NH ₂ , SO ₃ H	4	6.4	2
NH ₂ , CH ₃	4	4.2.6	2
NH ₂ , CO ₂ H	4	2.4.6	2
NH ₂ , NH ₂	—	2.4	—
NH ₂ , OH	5 (4)	4.6 ?	3 (2)

TABEL IX.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
OH = 1	nieuwe subst. treedt op		
OH, Cl	6.4	6	2
OH, Br	4.6	—	2
OH, J	4.6	—	2
OH, NO ₂	4.6	2.6.4	2
OH, SO ₃ H	4	—	2
OH, CH ₃	4.6	4.6	2
OH, CO ₂ H	4.6	6	2
OH, NH ₂	4(5)	4? .6	2(3)
OH, OH	4	2.4.6	—
OH, CHO	4	—	2

TABEL X.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
CN = 1	nieuwe subst. treedt op		
CN, Br	5	—	3
CN, CH ₃	5	—	3

TABEL XI.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
CHO = 1	nieuwe subst. treedt op		
CHO, Cl	5	4.6	3
CHO, Br	—	6	3
CHO, CH ₃	—	2.6	3
CHO, OH	5	—	3

I. *Beide aanwezige substituenten richten naar para-ortho-plaatsen.*

1. *Zij staan op ortho-plaatsen tot elkander.*

A In dit geval staan de plaatsen 3 tot 6 allen op meta ten opzichte van A of van B, en op ortho-para-plaatsen te hunnen opzichte. A en B ondersteunen dus elkanders werking niet.

B Daar wij (willekeurig) onderstelden dat de door A veroorzaakte substitutiesnelheid grooter is dan die door B, moet het isomeer 1, 2, 4 hoofdprodukt, 1, 2, 6, nevenprodukt zijn, als — zooals in verreweg de meeste gevallen — de ortho-verbinding C₆H₄AC in geringere hoeveelheid dan de isomere para-verbinding ontstaat. Verschilt de substitutiesnelheid in C₆H₂B slechts weinig van die in C₆H₂A, dan zijn ook de beide andere isomeren 1, 2, 3 en 1, 2, 5 te verwachten.

2. *Zij staan op meta-plaatsen tot elkander.*

A In dit geval moet C voornamelijk op 4 intreden, als bij het invoeren van C in C₆H₄A de para-verbinding hoofdprodukt is; want de substitutie op 4 wordt nu ook door B in de hand gewerkt. Naast het hoofdprodukt 1, 3, 4 is echter ook

nog de vorming der isomeren 1, 3, 2 en 1, 3, 6 te verwachten, maar niet die van het isomeer 1, 3, 5.

3. Zij staan op para-plaatsen tot elkander

A Beide substituenten ondersteunen dan elkanders werking niet.
 1 2. Als hoofdprodukt is hier 1, 2, 4 te verwachten, maar wel-
 6 1 2 3 licht ook 1, 3, 4 als nevenproduct. Dit zal ook afhangen van
 5 1 3 de verhouding, waarin de o- en p- isomeren C_6H_4AC en
 B C_6H_4BC ontstaan.

II. *Beide aanwezige substituenten richten naar de meta-plaats.*

1. Zij staan op ortho-plaatsen tot elkander.

A De beide substituenten zullen elkanders werking gedeeltelijk
 1 2 3 ondersteunen, daar behalve het meta-derivaat als hoofdproduct
 6 1 2 3 ook de ortho- of de para-verbindingen ontstaan als C in C_6H_5A
 5 1 3 en in C_6H_5B ingevoerd wordt. Hoofdproduct zal 1, 2, 3 zijn
 1 indien B als nevenproduct de ortho-verbinding heeft; 1, 2, 5 daarentegen
 als de p-verbinding nevenproduct is. In ondergeschikte hoeveelheid
 zijn ook de isomeren 1, 2, 4 en 1, 2, 6 te verwachten.

2. Zij staan op meta-plaatsen tot elkander.

A Dan zal de substitutie naar 5 sterk begunstigd zijn. Of, en
 1 2 3 zoo ja op welke andere plaatsen nog substitutie intreedt, zal
 6 1 2 3 van de nevenproducten afhangen, die bij de invoering van
 5 1 3 C in C_6H_5A en in C_6H_5B ontstaan.

3. Zij staan op para-plaatsen tot elkander.


A Een gedeeltelijke ondersteuning van elkanders werkzaamheid
 1 2 zal er bestaan als A en B ook naar ortho-plaatsen richten. Dan zal
 6 1 2 3 1, 3, 4 hoofdproduct zijn; maar ook 1, 4, 2 is als nevenproduct
 5 1 3 te verwachten.
 B

III. *Een van de aanwezige groepen (A) richt naar de para-ortho-plaatsen, de andere (B) naar de meta-plaats.*


1. Zij staan op ortho-plaatsen tot elkander.

A A en B ondersteunen elkanders werking. De plaatsen 4 en
 1 2 3 6 zijn daardoor begunstigd en 4 meer dan 6 indien p- C_6H_4CA
 6 1 2 3 hoofdproduct bij de invoering van C in C_6H_5A is. Wellicht
 5 1 3 zal in ondergeschikte hoeveelheid ook substitutie op de plaats
 1 3 intreden, indien B ook naar de ortho-plaats richt. Richt echter B
 behalve naar meta- ook naar de para-plaats, dan zal 1, 2, 5 implaats
 van 1, 2, 3 in geringe hoeveelheid te verwachten zijn.

2. Zij staan op meta-plaatsen tot elkander.


 Daar A naar 2, 4, 6, B naar 5 richt, zouden in dit geval alle vier mogelijke isomeren te verwachten zijn.

3. Zij staan op para-plaatsen tot elkander.


 Hierbij ondersteunen beide substituenten elkander; dientengevolge zal 1, 4, 2 het hoofdproduct der reactie moeten zijn. Richt B, behalve naar meta, ook naar ortho, dan is eene kleine hoeveelheid van het isomeer 1, 4, 3 te verwachten.

Uit het bovenstaande blijkt, dat slechts in drie van de negen gevallen de werking van beide groepen elkander volledig ondersteunt en dus met groote waarschijnlijkheid mag verwacht worden dat de substitutie op de aldus begunstigde plaats zal intreden. In de zes overige gevallen zal men omtrent het verloop der substitutie enkel dan eenige zekerheid erlangen, als men de snelheden der substitutie in C_6H_5A en in C_6H_5B kent; altijd in de veronderstelling dat de beide aanwezige groepen A en B elkaanders werking niet, of althans niet aanzienlijk storen.

Nu zijn echter directe metingen van substitutiesnelheden slechts in zeer gering aantal uitgevoerd; en in vele gevallen ook onuitvoerbaar, daar de substituties met te groote snelheid verlopen. Met behulp van de bovenstaande tabellen laat zich echter omtrent de volgorde in grootte dier snelheden een en ander afleiden, hetgeen voor de voorzeggings van het kwalitatieve verloop der substituties voldoende is.

Vooreerst de verhouding der snelheden van substituties naar para-ortho-plaatsen eenerzijds, naar de meta-plaats anderzijds. In het algemeen kan men zeggen, dat meta-substituties langzamer gaan, dan p-o-substituties. Nitrobenzol b.v. wordt langzaam genitreed, chloorbenzol momentaan. Phenol wordt snel, benzoëzuur onder dezelfde omstandigheden langzaam gesulfoneerd. Uit de tabellen volgt nu, dat de p-o-substituties in het algemeen veel sneller dan de meta-substituties moeten verlopen. Want in geval III, 2 waarbij A_{o-p} op 1 en B_m op 3 staat, zouden alle 4 isomeren te verwachten zijn. Nu leert echter de ervaring, dat het isomeer 1, 3, 5, dat onder den invloed van B zou moeten ontstaan, nooit wordt waargenomen (zie onderstaande tabel III, 2). Dit moet echter het geval zijn als de meta-substitutie zeer veel langzamer dan de p-o-substitutie verloopt, want dan is deze laatste reeds geheel ten einde geloopt, als eerstgenoemde nog slechts voor een zoo gering gedeelte is ingetreden, dat de gevormde hoeveel-

heid meta-product beneden de grenzen der analytische methoden komt te vallen.

Rest dus nog de volgorde der substitutiesnelheden voor de meta-richtende substituenten eenerzijds en voor de para-ortho-richtende substituenten anderzijds, vast te stellen.

Wat deze laatste betreft, betreft, geven de bovenstaande tabellen daarvoor de volgende gegevens.

Wij onderstellen, dat in het benzol twee ongelijke substituenten aanwezig zijn, beide naar p-o-plaatsen dirigerende en tot elkander

op ortho- en op para-plaatsen staande, dus $\begin{matrix} \text{A}_{p.o} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \\ \text{I} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 4 \\ \text{B}_{p.o} \end{matrix}$ en $\begin{matrix} \text{A}_{p.o} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{II} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{B}_{p.o} \end{matrix}$.

Uit de tabellen blijkt, dat dit in de volgende gevallen onderzocht is:

Aanwezig op		o p	
A _{p.o}	B _{p.o}	3 ^o subst. treedt op	
Cl	Br	—	2
Cl	J	—	2
Cl	CH ₃	4.6	2.3
Cl	NH ₂	5	3
Cl	OH	3.5	3
Br	CH ₃	4.5.3	2.3
Br	NH ₂	5	3.2
Br	OH	5.3	3
J	OH	5	3
CH ₃	NH ₂	5	3.2
CH ₃	OH	3.5	3
NH ₂	OH	5	3

Ook in deze tabel is het hoofdproduct door het eerste cijfer aangeduid, zoo er meer dan één in staan.

Zooals nu boven werd uiteengezet, zal het van de reactiesnelheid, die door A en door B veroorzaakt wordt, afhangen of in I als hoofdproduct 4 of 5, in II 2 of 3 zal ontstaan. Indien dus in bovenstaande tabel achter Cl, Br in de para-kolom het cijfer 2 staat,

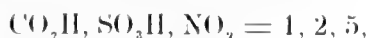
beteekent dit, dat chloor eene grootere substitutiesnelheid veroorzaakt dan broom. Achter Cl, CH₃ staat in de ortho-kolom 4.6, in de para-kolom 2.3. Beide geven aan, dat chloor ook hier de grootere snelheid bewerkt, daar 4, resp. 2 de hoofdproducten zijn. Men kan dit in het kort voorstellen door Cl > Br en Cl > CH₃. Bij de combinatie Br, CH₃ is in de ortho-reeks 4, in de para-reeks 2 het hoofdproduct; dus Br > CH₃. Daarentegen is bij de combinaties Br, NH₂ en Br, OH het hoofdproduct in de ortho-reeks 5, in de para-reeks 3. Derhalve moet NH₂ > Br en ook OH > Br zijn. Om te beslissen, welke der twee groepen OH en NH₂ de grootste reactiesnelheid veroorzaakt, heeft men de cijfers der combinatie NH₂, OH te raadplegen. Men vindt hier in de ortho-reeks 5, in de para-reeks 3 staan, dus is OH > NH₂. Uit de tabel blijkt voorts, dat steeds de cijfers 5 en 3 in de ortho-kolom samengaan met het cijfer 3 in de para-kolom. Wordt echter het cijfer in de ortho-kolom 4 voor het hoofdproduct, zooals bij de combinaties Cl, CH₃ en Br, CH₃, dan slaat te gelijkertijd het cijfer in de para-kolom voor het hoofdproduct in 2 om, zooals dit volgens de boven ontwikkelde gezichtspunten ook het geval moet zijn.

Op de hier niteengezette wijze laten zich nu de belangrijkste, naar para-ortho richtende substituenten naar de grootte der door hen veroorzaakte substitutiesnelheden ordenen; men verkrijgt dan de volgorde:

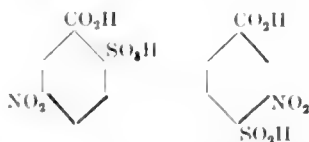


MARTINSEN, die de nitreeringssnelheid van eenige stoffen in geconcentreerd zwavelzuur heeft gemeten, komt ook tot het resultaat, dat de snelheidsconstante dier reactie bij aanwezigheid der hydroxylgroep grooter is, dan bij die van methyl.

Voor de beoordeeling der volgorde van de substitutiesnelheden bij aanwezigheid der naar meta-plaatsen dirigeerende groepen bieden de tabellen slechts zeer weinig materiaal. Het eenige, goed geconstateerde feit is eigenlijk slechts te ontleenen aan de nitratie van ortho- en para-sulfobenzoëzuur. Bij het eerste ontstaat de verbinding



bij het tweede de verbinding 1, 4, 3:

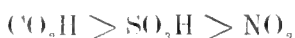


Beide geven dus aan, dat de carboxylgroep eene grootere substitutiesnelheid veroorzaakt dan de sulfogroep, daar de nitrogroep op meta-plaats ten opzichte van carboxyl en niet van de sulfogroep gaat staan. Dit wordt ook weder door de onderzoekingen van MARTINSEN

bevestigd, die voor de nitratiesnelheid in geconcentreerd zwavelzuur, bij 25° de volgende constanten vond:

	K
Nitrobenzol	1.5
Benzolsulfozuur	26
Benzoëzuur	100

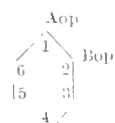
Men zal dus de volgorde



hebben.

Uit het bovenstaande is dus gebleken: 1°. dat de substitutiesnelheid naar o-p-plaatsen veel grooter is dan die naar de meta-plaats; 2°. de volgorde dier snelheden voor de naar p-o-plaatsen richtende substituenten 3°. hetzelfde voor de naar de m-plaats richtende substituenten. Het moet nu mogelijk zijn, als de grondstellingen, waarvan werd uitgegaan juist zijn, om met behulp van deze gegevens te voorspellen, welke isomeren er bij de invoering eener groep C in een gegeven lichaam $\text{C}_6\text{H}_4\text{AB}$ zullen ontstaan, en wat het hoofdproduct zal zijn. Inderdaad blijkt uit onderstaande tabellen, dat dit doel geheel bereikt is. Zij zijn ontleend aan de tabellen van blz. 509—511.

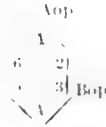
Indien de cijfers boven elkander zijn geplaatst, beteekent dit, dat niet bekend is, wat het hoofdproduct der reactie is. Voor de groep NH_2 is aangenomen, dat zij naar p-o-plaatsen richt, omdat de gevallen van meta-substitutie onder den invloed dezer groep slechts onder zeer bijzondere omstandigheden optreden.

Geval I, 1. 

Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$		Cl, Cl	Cl, CH ₃	Cl, NH ₂	Cl, OH	Br, Br	Br, CH ₃	Br, NH ₂	Br, OH	J, J	J, CH ₃	J, OH
3° subst. } treedt op }	exp.	4.3	4.6	5	5	4.3	4.5.3	5	5.3	4	4	5
	theor.	4.3	4.6	5	5	4.3	4.5	5	5	4	4	5

Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$		CH ₃ , CH ₃	CH ₃ , NH ₂	CH ₃ , OH	NH ₂ , OH	OH, OH
3° subst. } treedt op }	exp.	4	5	5	5	4
	theor.	4	5	5	5	4

Geval I, 2.



Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$	Cl ₁ Cl	Cl ₁ J	Cl ₁ CH ₃	Cl ₁ NH ₂	Cl ₁ OH	Br ₁ Br	Br ₁ CH ₃	Br ₁ NH ₂	J ₁ J	J ₁ NH ₂	CH ₃ GH ₃	CH ₃ NH ₂
3 ^o subst. } exp.	4.2	2 of 6	6.4	4.2(?)	4	4.2	4.2	6	4	6	4	6.2.4
treedt op } theor.	4.2	4.6.2	4.6.2	6.4.2	6.4.2	4.2	4.6.2	6.4.2	4.2	6.4.2	4.2	6.4.2

Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$	CH ₃ OH	NH ₃ NH ₂	NH ₂ OH	OH ₁ OH
3 ^o subst. } exp.	6.4	4(2)	4.6?	2.4.6
treedt op } theor.	6.4.2	4.2	6.4.2	4.2

Zoals de theorie verlangt, vormt zich dus nooit de verbinding A, B, C = 1, 3, 5.

Geval I, 3.



Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$	Cl ₁ Br	Cl ₁ J	Cl ₁ CH ₃	Cl ₁ NH ₂	Cl ₁ OH	Br ₁ CH ₃	Br ₁ NH ₂	Br ₁ OH	CH ₃ J	J ₁ OH	CH ₃ NH ₂	CH ₃ OH	NH ₂ OH
3 ^o subst. } exp.	2	2	2.3	3	3	2.3	3.2	3	3	3	3.2	3	3
treedt op } theor.	2	2	2	3	3	2	3	3	2	3	3	3	3

Onder theorie is enkel het hoofdprodukt vermeld. Omtrent de uitzondering bij J₁CH₃ moet worden opgemerkt, dat de plaats 3 waarop de substituent zoude intreden, niet werkelijk is bepaald, maar enkel „naar analogie” voor waarschijnlijk werd gehouden.

Geval II, 1. $\left. \begin{array}{c} \text{Am} \\ 1 \\ 5 \\ \vdots \\ 3 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\} \text{B}^n$

Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$		$\text{NO}_2, \text{CO}_2\text{H}$	$\text{SO}_3\text{H}, \text{CO}_2\text{H}$	$\text{CO}_2\text{H}, \text{CO}_2\text{H}$
3 ^o subst. } treedt op }	exp.	4 5 ::	4	3 1
	theor.	4 6	4, 6	3 4

Geval II, 2. $\left. \begin{array}{c} \text{Am} \\ 1 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right\} \text{B}^m$

Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$		$\text{NO}_2, \text{SO}_3\text{H}$	$\text{NO}_2, \text{CO}_3\text{H}$	$\text{SO}_3\text{H}, \text{SO}_3\text{H}$	$\text{SO}_3\text{H}, \text{CO}_2\text{H}$	$\text{CO}_3\text{H}, \text{CO}_3\text{H}$
3 ^o Subst. } treedt op }	exp.	2?	5	5	5	5
	theor.	5	5	5	5	5

Geval II, 3. $\left. \begin{array}{c} \text{Am} \\ 1 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{array} \right\} \text{B}^m$

Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$		$\text{SO}_3\text{H}, \text{CO}_2\text{H}$	$\text{NO}_2, \text{CO}_2\text{H}$
3 ^o Subst. } treedt op }	exp.	2	3
	theor.	2	2

Bij de nitreering van het p-nitrobenzoëzuur, die zeer moeielijk verloopt, is niet met zekerheid te zeggen wat het hoofdproduct is.

Geval III, 1.

$$\begin{array}{c} \text{Aop} \\ \sqrt{\text{Em}} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$	Cl ₂ NO	Cl ₂ CO ₂ H	Cl ₂ CHO	Br ₂ NO ₂	Br ₂ SO ₃ H	Br ₂ CO ₂ H	Br ₂ CN	J ₂ NO ₂	J ₂ CO ₂ H	CH ₃ NO ₂
3 ^o Subst.) exp.	4.6	4.6	4	4.6	4	4.6	4	4.6	4	6
treedt op) theor.	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6
	CH ₃ SO ₃ H	CH ₃ CO ₂ H	CH ₃ CN	NH ₂ NO ₂	NH ₂ SO ₃ H	NH ₂ CO ₂ H	OH ₂ NO ₂	OH ₂ SO ₃ H	OH ₂ CO ₂ H	OH ₂ CHO
	4	4.6	4	4.6	4	4	4.6	4	4.6	4
	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6

Geval III, 2.

$$\begin{array}{c} \text{Vp} \\ \sqrt{\text{H}} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Aanwezig $\frac{B}{A} \rightarrow$	Cl ₂ NO ₂	Cl ₂ CO ₂ H	Cl ₂ CHO	Br ₂ NO ₂	Br ₂ SO ₃ H	Br ₂ CO ₂ H	Br ₂ CHO	J ₂ NO ₂	CH ₃ NO ₂
3 ^o Subst.) exp.	4	6.4.2	4.6.2	4	4.6	6.4.2	4	4.2	4.6.2
treedt op) theor.	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2
	CH ₃ SO ₃ H	CH ₃ CO ₂ H	CH ₃ CHO	NH ₂ NO ₂	NH ₂ SO ₃ H	NH ₂ CO ₂ H	OH ₂ NO ₂	OH ₂ SO ₃ H	OH ₂ CO ₂ H
	6.2	6.4.2	4.2	4.6	6.4	2.4.6	2.6.4	6	6
	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2	4.6.2

Geval III, 3.

Aop
1
6
5
4
3
Bm

Aanwezig A →	B																							
		Cl,NO ₂	Cl,SO ₃ H	Cl,CO ₂ H	Cl,CHO	Br,NO ₂	Br,SO ₃ H	Br,CO ₂ H	Br,CN	Br,CHO	J,NO ₂	CH ₃ ,NO ₂	CH ₃ ,CO ₃ H	CH ₃ ,CO ₂ H	CH ₃ ,CN	CH ₃ ,CHO	NH ₂ ,NO ₂	NH ₂ ,SO ₃ H	NH ₂ ,CO ₂ H	OH,NO ₂	OH,SO ₃ H	OH,CO ₂ H	OH,CHO	
3 ^o Subst. } treedt op }	exp.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	theor.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Bij de opgave der theoretisch te verwachten cijfers in de gevallen III, 1, 2 en 3 zijn de isomeren, die de derde substituent bij III, 1 op 3 en 5, bij III, 2 op 5 en bij III, 3 op 3 hebben, uitgesloten, omdat de genoemde plaatsen enkel onder den invloed van den naar meta richtenden substituent B zullen gesubstitueerd worden, voor zoover betreft de nevenproducten, die dus ook veel langzamer zullen ontstaan dan de substitutieproducten, die onder den invloed van den naar p-o-plaatsen richtenden substituent A gevormd worden. Men ziet, dat dan de theorie met de waargenomen feiten ook in deze gevallen zeer bevredigend overeenstemt.

Ten slotte moge nog de volgende algemeene opmerking gemaakt worden. Bij de invoering van eene derde groep is aangenomen, dat in een gegeven diderivaat C₆H₄ AB alle groepen, onafhankelijk van hunnen aard, op dezelfde plaats intreden (bl. 508) Dit volgde terstond uit de primitieve tabellen, die in deze verhandeling niet zijn opgenomen. Is nu werkelijk, zooals werd aangetoond, de geheele uitslag der substitutie afhankelijk van de snelheden, waarmede zij onder den invloed van A en van B verloopt, dan moet, als een gegeven substituent C₁ in C₆H₅A met grooter snelheid dan in C₆H₅B intreedt, ditzelfde ook het geval zijn met alle andere substituenten C₂, C₃ . . . C_n. Dat dit zoo is, zal eerst door snelheidsmetingen met zekerheid kunnen worden uitgemaakt. Nu deze nog ontbreken, kan men echter voorloopig wel uit eenige gegevens afleiden, dat bovenstaande gevolgtrekking inderdaad juist is. Vergelijken wij b.v. phenol en toluol, wier substituenten beide naar p-o-plaatsen richten. Boven leidden wij af OH > CH₃. Nu ziet men inderdaad alle substituties bij phenol sneller dan bij toluol geschieden. De chloreering en bromeering van toluol in het duister is een langzaam verloopend proces; bij phenol

verloopt het momentaan. Phenol is reeds bij gewone temperatuur met geconc. zwavelzuur sulfoneerbaar, toluol niet of zeer langzaam; wel is waar wordt toluol snel genitreerd, maar de inwerking van salpeterzuur op phenol verloopt toch zonder twijfel met veel grooter hevigheid.

Van de meta-substitueerende groepen zij gewezen op nitrobenzol en benzoëzuur. Volgens MARTINSEX verloopt de nitratie van nitrobenzol langzamer dan die van benzoëzuur. Dit is ook het geval bij de chloreering en bromeering, want benzoëzuur is, hoewel moeielijk, toch direct halogeneerbaar, terwijl bij nitrobenzol dit eerst met behulp van een katalysator mogelijk is. Ook vond MARTINSEX, dat benzolsulfozuur langzamer genitreerd wordt dan benzoëzuur; zoo is het ook bij de sulfoneering; want voor de sulfoneering van benzoëzuur was verhitting op 200° gedurende 1 uur voldoende om het proces volledig te doen verlopen, terwijl bij benzolsulfozuur met veel grootere overmaat aan zuur van hetzelfde SO₃-gehalte op 200—220° gedurende 3 uur moest worden verhit.

Blijkt door snelheidsmetingen, dat deze betrekking inderdaad bestaat, dan zoude men daarvan omgekeerd ook gebruik kunnen maken om tot eene beoordeeling der snelheden van zeer snel verloopende substituties te komen. Of b.v. de nitratie van chloorbenzol sneller dan die van toluol verloopt, zoude dus kunnen gevonden worden door meting van de snelheid, waarmede beide gesulfoneerd worden, daar sulfoneeringen meestal langzaam verloopende processen zijn.

Amsterdam, Chem. lab. d. Univ..

December 1909.

Physiologie. — De Heer PEKELHARING doet een mededeeling, ook namens den Heer C. J. C. VAN HOOGENHUYZE: „*Over de vorming van kreatine in de spieren bij den tonus en bij de verstijving.*”

Vroeger¹⁾ heb ik in deze Akademie een mededeeling gedaan omtrent een onderzoek van de Heeren VAN HOOGENHUYZE en VERPLOEGH, over de afscheiding van kreatinine bij den mensch, waaruit bleek dat de afscheiding van die stof bij een voldoende gevoed mensch door spierarbeid niet wordt verhoogd. Sedert dien tijd is het onderzoek, dat nieuwe uitzichten bood, nu door FOLIN een goede methode voor de bepaling der kreatinine was gegeven, door VAN HOOGENHUYZE en VERPLOEGH en door verscheidene anderen voortgezet. Uit die

¹⁾ Verslag van de vergadering van 30 Sept. 1905.

onderzoekingen is de opvatting voortgevloeid, dat, bij het verbruik van eiwit in de weefsels bij gewervelde dieren, kreatine ontstaat en dat deze stof voor een deel onder oxydatie ontleed, voor een ander deel, in het bijzonder door de lever, in het anhydride, kreatinine, wordt veranderd, dat verder de aldus gevormde kreatinine grootendeels door de nieren uit het lichaam wordt verwijderd ¹⁾.

Men is wel genoodzaakt aan te nemen, indien deze opvatting juist is, dat de door de nieren afgescheiden kreatinine voor een belangrijk deel van de kreatine der spieren afkomstig is, niet alleen omdat de spieren rijker zijn aan kreatine dan andere organen, maar ook omdat juist de spieren een zoo groot deel van het lichaamseiwit bevatten. Die onderstelling scheen niet onaannemelijk, ondanks de bevinding dat de afscheiding van kreatinine niet door spierarbeid wordt verhoogd. Er werden waarnemingen gedaan die op een verband wezen tusschen de afscheiding van kreatinine en een ander verschijnsel, dat van de spiercontractie in engeren zin onderscheiden moet worden, den spiertonus. VAN HOOGENHUYZE EN VERPLOEGH vonden de afscheiding gedurende den nacht geringer dan over dag, evenzoo vonden zij opmerkelijk weinig kreatinine in de urine van oude menschen en van patiënten bij wie een aantal spieren verlamd waren, terwijl daarentegen bij koorts de urine meer kreatine dan gewoonlijk bleek te bevatten.

Dat inderdaad de verkorting van de spier bij den tonus op andere wijze tot stand komt als bij de, zooveel meer onderzochte, snelle contractie en dat, wanneer op een enkelen prikkel een trage contractie volgt, beide wijzen samenwerken, is zeer waarschijnlijk gemaakt.

Reeds meer dan 20 jaren geleden sprak GRÜTZNER ²⁾ de onderstelling uit, dat de lang aanhoudende samentrekking door een andere soort van spiervezelen zou worden bewerkstelligd dan die, welke een snelle contractie veroorzaken. In het eerste geval zouden vezelen van den typus der roode, in het tweede vezelen van den typus der witte spieren in het spel komen. Later is door anderen, in het bijzonder door BORTAZZI ³⁾, de stelling verdedigd, dat de tweeërlei samentrekking door twee verschillende bestanddeelen van denzelfden spiervezel, de snelle door de dubbelbrekende fibrillen, de trage door het sarkoplasma wordt uitgevoerd. Mosso ⁴⁾ maakte bezwaar tegen deze stelling en vestigde de aandacht op de, voor korten tijd in deze Akademie door

1) Zie Ned. Tijdschrift voor Geneeskunde 1908, II. p. 1663.

2) PFLÜGER's Archiv. Bd. XLI, S. 280.

3) Journ. of Physiol. Vol. XXI, p. 1, Arch. f. Physiol. 1901, S. 377, Arch. Ital. de Biol. T. XLII, p. 169.

4) Arch. Ital. de Biol. T. XLI, p. 183.

BOEKE¹⁾ op nieuw in het licht gestelde dubbele innervatie der spiervezelen.

Hoe men intusschen de zaak ook mag opvatten; er is in elk geval reden om aan te nemen, dat de tweërlei samentrekking met tweërlei scheikundige werking moet gepaard gaan. Nu bij de gewone arbeidsverrichting der spieren, die in hoofdzaak op snelle en tetanische contracties berust, geen vermeerdering van het verbruik van eiwit en van de afscheiding van kreatinine was gevonden, mocht de vraag worden gesteld, of misschien bij de tonische samentrekking vorming van kreatine in de spieren kon worden aangetoond.

Dat onder bepaalde omstandigheden de spieren meer kreatine bij de samentrekking aan het bloed afstaan dan anders, is reeds gevonden door WEBER²⁾, met betrekking tot het, naar LANGENDORFF's methode behandelde, in RINGER's vloeistof kloppende hart. Ook vond hij een belangrijke verhooging van de afscheiding van kreatinine bij een hond, nadat door vergiftiging met cinchonine hevige krampen bij het dier waren opgewekt. Niet alleen in het laatste geval, waarin het dier ruim een uur lang „in heftige tonische en klonische krampen verkeerde”, maar ook ten opzichte van het uit het lichaam genomen hart, mag worden aangenomen dat tonus een rol heeft gespeeld.

Om echter met meer zekerheid gevolgtrekkingen te kunnen maken, hebben wij het gehalte aan kreatine onderzocht van spieren, onder omstandigheden die zooveel mogelijk toelieten over den invloed, hetzij van tonische, hetzij van snelle samentrekkingen te oordeelen.

De bepalingen geschieden altijd op dezelfde wijze. De fijngesneden spieren werden eenige uren achtereen in 0.1% HCl gekookt, tengevolge waarvan het weefsel geheel uiteenvalt en alle kreatine in de vloeistof overgaat. Het extract werd door indampen geconcentreerd en dan met het dubbele volume normaal zoutzuur een half uur in de autoklaaf op 115° C. verhit, waardoor de kreatine volledig in kreatinine wordt omgezet. De bepaling werd dan, volgens de methode van FOLIN, met den vroeger in deze vergadering vertoonden colorimeter verricht.

Allereerst hebben wij enkele waarnemingen te vermelden omtrent vermindering van het gehalte aan kreatine van spieren, waarvan de tonus, tengevolge van doorsnijding der zenuw, opgeheven was. Aanvankelijk verkregen wij bij het onderzoek van de spieren der achterpooten bij konijnen en bij een jongen hond, na eenzijdige klieving van den nervus ischiadicus, zeer onregelmatige uitkomsten. Nu eens werd in de spieren van den verlandten poot minder, dan weer meer

¹⁾ Verslag van de vergadering van 23 April 1909.

²⁾ Arch. f. exp. Path. und Pharm. Bd. LVIII, S. 93.

kreatine gevonden dan in die van de verlamde zijde. De oorzaak van deze onregelmatigheid bleek hierin gelegen te zijn, dat wij niet juist gelijknamige spieren met elkaar vergeleken. Bepaaldelijk is bij het konijn het verschil in gehalte aan kreatine van witte en roode spieren vrij aanzienlijk. Bij 10 konijnen vonden wij in den gastrocnemius gemiddeld 4.463, in roode spieren (soleus, semitendinosus en semimembranosus te zamen onderzocht) 2.925 mgr. kreatinine op 1 grm. spier.

Toen deze fout werd vermeden, bleek de invloed van doorsnijding van den ischiadicus duidelijk. Bij 3 konijnen hebben wij met deze voorzorg de proef herhaald en 3 dagen na het doorsnijden van den nervus ischiadicus, den gastrocnemius van den verlamden en van den niet verlamden poot onderzocht. Wij vonden:

	Niet verlamd.	Verlamd.	Verlies na verlamming.
I	4.703	4.232	0.471 mgr. kr. p. gr. spier
II	4.448	4.289	0.159 „ „ „ „ „
III	4.983	4.013	0.970 „ „ „ „ „

Ofschoon de gevonden verschillen zonder twijfel buiten de grenzen der waarnemingsfouten liggen, hebben wij toch deze proeven niet voortgezet, omdat er te weinig met zekerheid omtrent den invloed van den tonus uit valt af te leiden. Weliswaar onderscheiden zich de spieren van den poot waarvan de ischiadicus is doorgesneden van die der andere zijde door het verlies van tonus, maar er zijn, gelijk WEBER, die bij een hond na doorsnijding van den ischiadicus, eveneens het gehalte aan kreatine in de spieren van den verlamden poot kleiner vond dan in die van den normalen, reeds heeft opgemerkt, ook andere verschillen die wellicht van belang zijn. Dat de normale poot willekeurige bewegingen blijft uitvoeren, is geen bezwaar, daar men toch geen grond heeft om aan te nemen dat daarbij kreatine wordt gevormd. Maar de spieren van den verlamden poot degenereren. Ofschoon wij de dieren reeds drie dagen na het doorsnijden der zenuw doodden, bleek toch telkens de verlamde gastrocnemius een kleiner gewicht te hebben dan de normale. Hoe het in degenererende spieren met de vorming, en ook met de ontleding, van kreatine gesteld is, weet men in het geheel niet. Van niet minder belang schijnt de verandering van den bloedstroom na de doorsnijding van de zenuw, tengevolge waarvan de afvoer van kreatine uit de spieren in geheel onberekenbare mate kan worden gewijzigd.

Wij meenden reeds wegens deze bezwaren geheel van het onderzoek naar den invloed van den spiertonus bij warmbloedige dieren te moeten afzien, en genoodzaakt te zijn ons alleen met koudbloedige

vertebraten, waarbij zonder hinder de bloedstroom kan worden uitgesloten, bezig te houden (in spieren van ongewerkte dieren is geen kreatine gevonden; zij waren dus voor ons doel onbruikbaar), toen mijn collega Prof. R. MAGNUS ons op een middel opmerkzaam maakte om, bij katten, spieren aan de eene lichaamshelft in krachtigen tonus te brengen, terwijl de gelijknamige spieren aan de andere zijde, zonder stoornis in de werking der centrifugale zenuwen en in den bloedstroom, verslapt blijven.

SHERRINGTON¹⁾ heeft gevonden, dat zich, wanneer men bij diep genarkotiseerde honden, apen, katten, konijnen of cavia's den hersenstam in de streek der achterste corpora quadrigemina doorsnijdt, na korten tijd de zogenaamde „decerebrate rigidity", onthenseningstijfheid, ontwikkelt, een lang aanhoudende tonische samentrekking van bepaalde spiergroepen, waaronder vooral de strekspieren van de ledematen en de opheffers van den kop en den nek op den voorgrond komen. Deze toestand is afhankelijk van impulsen die aan de peripherie, in de aangetaste lichaamsdeelen zelven, ontstaan en door centripetale zenuwen naar het ruggemerg worden geleid. Van daar dat de stijfheid niet ontstaat in die deelen waarvan de daarbij behoorende achterste wortels doorgesneden zijn.

Prof. MAGNUS had nu de groote vriendelijkheid vijf katten zoodanig te opereeren, dat de eene voorpoot twee, drie uren achtereen in tonus werd gebracht, terwijl de andere poot slap bleef. Nadat bij het, eerst door ether, daarna door chloroform, volkomen bedwelmd dier aan de linkerszijde de achterste wortels van de vier of vijf onderste halszenuwen en van de beide bovenste borstzenuwen waren doorgesneden, werd de hersenstam gekliefd. Spoedig geraakte nu de rechter poot in tonus, terwijl de linker slap bleef. Soms werd ook nog, ter versterking van den tonus in den voorpoot, het ruggemerg, ter hoogte van den 11den borstwervel, doorgesneden. Als de tonus een paar uren had geduurd, werd het dier door verstikking gedood. Terstond daarna werd aan beide zijden de triceps brachii uitgerepareerd, fijngesneden en in zoutzuur gebracht.

In alle proeven vonden wij de spier die in tonus had verkeerd rijker aan kreatine dan de slap gebleven spier, en wel, uitgedrukt in mgr. kreatinine op 1 grm. spier, aldus:

	Tonus	Slap	Verschiil
I	3.690	3.090	0.600
II	4.340	3.848	0.492
III	4.291	3.902	0.317
IV	3.806	3.185	0.621
V	3.198	2.963	0.235

¹⁾ Journ. of. Physiol. Vol. XXII. p. 319.

Opmerkelijk is het dat dit verschil vrij wel gelijken tred houdt met het verschil dat bij de proef in de samentrekking der spieren, rechts en links, werd waargenomen. In proef I en nog meer in IV, was de stijfheid rechts zeer fraai ontwikkeld, in II was de tonus krachtig, maar van minder langen duur, in III was de tonus rechts goed, maar vertoonde ook de linker voorpoot nu en dan enige stijfheid, hetgeen ook in V, ofschoon in mindere mate, voorkwam, terwijl hier de stijfheid zich slechts langzaam en in niet zoo hoogen graad als anders ontwikkelde.

Wij meenen uit deze proeven te mogen afleiden, dat door de in tonus verkeerende spieren meer kreatine gevormd was dan door de verslapte. Voor de onderstelling dat het verschil zou mogen worden toegeschreven aan een verhoogde ontleding van kreatine in de verslapte spieren, schijnt ons geen enkele grond aan te voeren te zijn.

Verder hebben wij een aantal proeven genomen bij kikvorschen (*Rana esculenta*).

Vooreerst werd de invloed van prikkeling met inductiestroomen op het gehalte der spieren aan kreatine onderzocht. Daarentrent zijn mededeelingen bekend van MELLANBY¹⁾ en van GRAHAM BROWN en CATHCART.²⁾ MELLANBY bracht de spieren, door direkte prikkeling in tetanus en vond dan een zoo geringe vermeerdering van het gehalte aan kreatine, dat hij tot het besluit komt: "that the performance of muscular work leaves creatin unaffected". BROWN en CATHCART prikkelden de spieren door middel van de zenuw en vonden een iets belangrijker verhooging, van 7 à 13%, in vier proeven, waarbij de bloedstroom was opgeheven. Bij behouden bloedstroom vonden zij eenige vermindering, niet alleen bij kikvorschen, maar ook bij konijnen, waarbij echter in aanmerking dient te worden genomen, dat, ten gevolge van de prikkeling, de spier ruimer met bloed werd doorstroomd, zoodat een juiste vergelijking met de rustende spieren niet goed mogelijk is.

Wij hebben proeven genomen met kikvorschen, op drieërlei wijze, altijd met uitsluiting van den bloedstroom. Vooreerst werd, na vernieling van hersenen en ruggemerg en doorsnijding van het hart, de nervus ischiadicus aan één zijde, hoog aan de dij blootgelegd, doorgesneden en met een reeks van snel opeenvolgende inductieslagen geprikkeld. De prikkeling duurde telkens $\frac{1}{2}$ minuut, waarna $\frac{1}{2}$ minuut rust werd gegeven, ongeveer een uur lang. In de tweede plaats werd de proef overigens op dezelfde wijze ingericht, maar werd de zenuw, ongeveer een half uur lang, met behulp van

¹⁾ Journ. of Physiol. Vol. XXXVI, p. 447.

²⁾ Bio-Chemical Journ. Vol. IV, p. 420.

ENGELMANN's rhythmischen polyrheotoom, 24 malen in de minuut afwisselend met een sluitings- en een openingsinductieslag geprikkeld. Eindelijk werden nog twee proeven aldus genomen: de kikvorsch werd in het lendengedeelte dwars doorgesneden, waarna van het achterstel de huid werd weggenomen. Nu werd dit schrijlings op het tusschenschot van twee, vlak tegen elkaar staande, bakjes van celluloid geplaatst, die met RINGER's vloeistof gevuld waren, zoodat iedere poot tot ongeveer halverwege de dij in de vloeistof was gedompeld. Daarna werd aan één zijde de ischiadicus, van het bekken uit, 24 maal in de minuut met enkele sluitings- en openingsinductieslagen geprikkeld, een half uur lang.

Het gehalte aan kreatine, uitgedrukt in mgr. kreatinine op 1 grm. spier, werd gevonden als volgt:

	Geprikkeld	Rust	Vershil		Geprikkeld	Rust	Vershil		
B	I	3.490	3.418	+ 0.072	A	I	3.366	3.386	— 0.020
	II	3.537	3.457	+ 0.080		II	3.616	3.683	— 0.067
	III	3.629	3.550	+ 0.079		III	3.796	3.856	— 0.060
	IV	3.567	3.560	+ 0.007					
C	I	3.203	3.230	— 0.027					
	II	3.585	3.593	— 0.008					

De verschillen zijn gering en vallen niet of nauwelijks buiten de grenzen der onvermijdelijke waarnemingsfouten. Bovendien is het verschil nu eens ten gunste van de geprikkelde, dan weer van de niet geprikkelde spieren. Wenscht men aan de grootste verschillen die bij deze proeven werden gevonden, eenige werkelijke waarde toe te kennen, dan behoeft men daaruit nog niet af te leiden dat de spier bij de snelle contractie kreatine vormt of verliest. Aan den eenen kant toch is de ontleding van kreatine in de spier aan nog wel geheel onbekende, maar toch zeker wel wisselende invloeden onderhevig, terwijl aan den anderen kant langdurig voortgezette prikkeling ook tot eenige blijvende samentrekking, tonus, aanleiding kan geven.

Dat bij den kikvorsch gedurende den spiertonus, in tegenstelling met de snelle contracties, de rijkdom der spieren aan kreatine toeneemt, terwijl die bij afwezigheid van tonus vermindert, blijkt uit de volgende proeven.

Vooreest werd de invloed van het opheffen van den tonus, door het uitsluiten der innervatie, onderzocht, eerst onder afsluiting van den bloedstroom, daarna bij ongestoorden bloedsomloop. In het eerste geval werd aan één zijde de ischiadicus doorgesneden en dan aan beide kanten de wortel van de dij met een elastieke ligatuur zoo vast omsnoerd, dat het bloed in de vaten der zwemvliezen stilstond,

zoodanig dat de ligatuur onder den niet doorgesneden ischiadicus doorliep. In het tweede geval werd eenvoudig aan één kant de ischiadicus doorgesneden. Drie dagen na het doorsnijden der zenuw werden de dieren gedood en de spieren van de achterpooten onderzocht.

		Ischiadicus					Ischiadicus		
		intact	doorgesn.	Vershil			Intact	doorgesn.	Vershil
Bloedstroom afgesloten	I	2.204	2.137	0.067	bloedstroom ongestoord	I	3.784	3.342	0.442
	II	2.678	2.282	0.396		II	4.000	3.653	0.347
	III	2.990	2.790	0.200		III	4.146	3.688	0.458
	IV	2.987	2.887	0.100		IV	3.490	3.192	0.298
	V	2.726	2.551	0.175		V	3.434	3.131	0.303
	VI	2.833	2.688	0.145		VI	3.685	3.334	0.351
					VII	3.157	2.900	0.257	

Zonder uitzondering werd dus in de spieren die sedert drie dagen den tonus hadden verloren, minder kreatine gevonden dan in den ongedeerden poot. Bij opgeheven bloedstroom was het verschil kleiner dan wanneer de bloedstroom ongestoord voortging. Intusschen was bij de afgebonden pooten het gehalte aan kreatine ook aan de zijde van de ongedeerde zenuw kleiner dan het gewoonlijk bij den kikvorsch wordt gevonden. Er is dus waarschijnlijk aan beide zijden, na het ophouden van den bloedstroom, kreatine ontleed. Ten opzichte van de proeven bij ongestoorden bloedsomloop kan hetzelfde bezwaar worden aangevoerd waarvan met betrekking tot dergelijke proeven bij het konijn melding is gemaakt, dat men niet weet in hoever misschien door verandering van den bloedstroom de afvoer van kreatine uit de spieren is gewijzigd. Het is echter niet wel aan te nemen dat de waargenomen verschillen daaraan zouden zijn toe te schrijven.

Met veel meer zekerheid mag evenwel, naar wij meenen, het verband tusschen tonische contractie en vorming van kreatine bij den kikvorsch worden afgeleid uit eene andere reeks van proeven, waarin, onder uitsluiting van den bloedstroom, spiertonus werd opgewekt. Wij hebben de spieren blootgesteld aan de werking van stoffen van zeer uiteenlopenden aard, die echter alle hierin overeenstemmen, dat zij den tonus opwekken, namelijk: veratrine, nicotine, chloorcalcium, rhodaan-natrium en coffeine.

Op de toniserende werking van veratrine heeft in het bijzonder BOTTAZZI gewezen ¹⁾. Wordt de gastrocnemius van een kikvorsch in RINGER'S vloeistof gedompeld die 1 : 20000, of zelfs nog minder,

¹⁾ l. c.

veratrine bevat, dan veroorzaakt prikkeling van den ischiadicus met een enkelen inductieslag een contractie die veel langer aanhoudt dan bij een in onvermengde RINGER's vloeistof gedompelde spier. Aan de snelle wordt een trage contractie toegevoegd.

Om den invloed op de vorming van kreatine te onderzoeken werden de achterpooten van een kikvorsch in de zoeven genoemde celluloidbakjes gebracht, waarvan het eene met RINGER's vloeistof, het andere met dezelfde vloeistof waarin een bepaalde hoeveelheid veratrine was opgelost, gevuld was. Nu werden de beide ischiadici, van het bekken uit, gedurende een half uur, 24 maal in de minuut afwisselend met een sluitings- en een openingsinductieslag geprikkeld. Dan werden de spieren afgeprepareerd en, met de vloeistof waarin zij gedompeld waren geweest, op de gewone wijze voor de bepaling van kreatine behandeld. De uitkomst was:

	RINGER's vl.	Veratrine. (1 : 40000)	Vershil.
I	3.442	3.561	0.119
II		(1 : 20000)	
	3.189	3.389	0.200
		(1 : 5000)	
III	3.056	3.430	0.374
IV	3.250	3.670	0.420
V		(1 : 1000)	
	3.029	3.429	0.400

In III, IV en V maakten de in veratrine gedompelde pooten reeds voordat het half uur was afgelopen geen zichtbare bewegingen meer. Ook vertoonden die pooten in deze proeven op het eind eenige stijfheid.

Het vermogen van nicotine, tonische contractie van spieren te weeg te brengen, is zeer uitvoerig bestudeerd door LANGLEY bij zijn onderzoekingen over „receptieve stoffen” ¹⁾. De voorpooten van den kikvorsch, waarvan de flexoren zoo gemakkelijk in tonus zijn te brengen, ook door bedruppeling met nicotine, zouden voor ons doel zeer geschikt zijn geweest indien niet de massa der daar beschikbare spieren zoo klein was, dat voor een enkele bepaling van kreatine een groot aantal kikvorschen noodig zou zijn. De waarnemingen van LANGLEY deden ons echter vermoeden, dat ook de achterpooten voor ons bruikbaar zouden zijn, welk vermoeden door den uitslag werd bevestigd.

¹⁾ Journ. of Physiol. Vol. XXXIII, p. 347, Vol. XXXVI, p. 374, Vol. XXXVII, p. 165, p. 285, Vol. XXXIX, p. 235. Proc. Royal Soc. B. Vol. LXXVIII, p. 170.

Eerst werd een proef op de volgende wijze genomen:

Na vernieling van hersenen en ruggemerg werd 1 CC van een 1 %-oplossing van nicotine in RINGER's vloeistof in de buikholt ingespoten, waarna zich spoedig de tonische contractie der voorpooten ontwikkelde. Een half uur na de inspuiting werd de bloedstroom, door doorsnijding van het hart, tot stilstand gebracht. Nu werd de linker ischiadicus hoog aan de dij blootgelegd, doorgesneden en gedurende een half uur 24 maal in de minuut met inductieslagen geprikkeld. Tot het laatst toe reageerden de spieren op de prikkeling van de zenuw. Op het eind was er een geringe rigor waar te nemen.

De geprikkelde spieren leverden 3.491 mgr. kreatinine per grm. spier, de niet geprikkelde 3.090 mgr. Verschil 0.401.

Daarna werden de proeven op dezelfde wijze als met veratrine genomen, met de volgende uitkomst.

	RINGER's vl.	Nicotine. (1 : 100)	Vershil.
I	3.286	3.766	0.480
II	3.090	3.492	0.402
III		(1 : 200)	
	3.276	3.538	0.262
IV		(1 : 100)	
	3.037	3.401	0.364

Op het eind van de proef trok zich de in nicotine gedompelde poot niet zichtbaar meer samen en was telkens die poot een weinig stijf.

Door het onderzoek van de werking van kalium- en calciumzouten is ook GÜENTHER¹⁾ tot de slotsom gekomen, dat de spiervezel tweeerlei contractiele stoffen bezit, waarvan de eene door K, de andere door Ca meer prikkelbaar wordt gemaakt.

„The first contractile substance of the sartorius”, zoo zegt hij, „responds quickly with a contraction when subjected to a 1 percent solution of potassium chloride Calcium chloride in a 1 percent solution produces no contraction of the first contractile element of the sartorius, gives rise to a slow contraction of the second contractile element, and produces quite a vigorous contraction of heart muscle”.

Wij moesten dus verwachten dat prikkeling van in chloorcalcium-oplossing gedompelde spieren het gehalte aan kreatine zou doen toenemen. Inderdaad bleek dit het geval te zijn. Het eene bakje werd nu met RINGER's vloeistof gevuld, het andere met een daarmee isotonische oplossing van CaCl₂. Overigens werden de proeven

¹⁾ Amer. Journ. of Physiol. Vol. XIV, p. 73.

geheel op dezelfde wijze genomen als de vorige. De uitkomsten volgen hier.

	RINGER's vl.	CaCl ₂ 0.72 %	Vershil
I	3.177	3.820	0.643
II	3.193	3.703	0.510
III	3.340	3.894	0.554
IV	3.040	3.647	0.607
V	3.156	3.501	0.345

In de eerste vier proeven hield de contractie van de in CaCl₂ gedompelde spieren op voordat het half uur was verstreken en vertoonden deze spieren duidelijke stijfheid. In V waren de contracties van de in CaCl₂ gedompelde spieren op het eind der proef nog duidelijk waarneembaar en was er van stijfheid niets te bespeuren.

Tot het onderzoek van de werking van rhodaan en van coffeine werden wij geleid door een mededeeling van von FÜRTH en SCHWARZ ¹⁾, waaruit bleek dat deze stoffen, evenals b.v. veratrine, in staat zijn het arbeidsvermogen der spieren belangrijk te verhoogen. De onderstelling, dat ook hierbij de tonus, de „innere Unterstützung” waarvan GRÜTZNER sprak, in het spel zou zijn, vonden wij bevestigd. De beide gastrocnemii van denzelfden kikvorsch werden opgehangen, de een in een vat met RINGER's vloeistof, de ander in een vat met dezelfde vloeistof waarin een weinig citras coffeini was opgelost, of waarvan het chloornatrium door rhodaannatrium was vervangen. Nadat beide spieren aan registreerende hefboompjes, onder zooveel mogelijk gelijke spanning, bevestigd waren, werden zij nu en dan, door middel van de op een enkel elektrodenpaar gelegde nervi ischiadici, met een inductieslag geprikkeld. Terwijl nu de in RINGER's vloeistof gedompelde spier na iedere contractie tot haar vorige lengte terugkeerde, of zelfs een weinig werd uitgerekt, werd de met coffeine of met rhodaan in aanraking gebrachte spier, terwijl zij op den prikkel goed bleef reageeren, allengs niet onbelangrijk korter.

De invloed op het gehalte aan kreatine werd op de gewone wijze onderzocht. De volgende cijfers werden gevonden.

	Ringers' vl.	NaCNS 0.614 %	Vershil
I	2.822	3.098	0.276
II	3.106	3.354	0.248
III	3.051	3.537	0.486
IV	3.129	3.459	0.330
V	2.916	3.146	0.230

¹⁾ PFLÜGER's Archiv, CXXIX, S. 525.

De spieren contraheerden zich op het eind der proef niet meer. Verstijving was niet te bespeuren.

	Ringer's vl.	Citr. Coff.		Vershil
I	3.017	3.432	1 : 100	0.415
II	3.055	3.623	1 : 200	0.568
III	3.090	3.422	1 : 400	0.332
IV	3.194	3.551	1 : 400	0.357
V	3.316	3.519	1 : 800	0,203

De met coffeine in aanraking gebrachte poot was in I na 10 minuten, in II na een kwartier geheel stijf, terwijl de contracties ophielden. In III, IV en V bleven de contracties tot het eind der proef zichtbaar. Ook in die gevallen was de rigor zeer duidelijk, in V evenwel niet zoo sterk als in III en IV.

In alle gevallen, zonder uitzondering, werd dus bij de spieren die in tonus hadden verkeerd het gehalte aan kreatine verhoogd gevonden. Zelfs mag het verschil, behalve bij coffeine, nog iets grooter worden geschat dan de cijfers aangeven, aangezien, op de genoemde uitzondering na, de tonus met een geringe verhooging van het gehalte aan water gepaard bleek te gaan. Dit verschil is echter zoo onbeduidend, dat het niet in aanmerking behoeft te worden genomen.

Vermeerdering van het gehalte aan kreatine werd alleen dan gevonden, wanneer de spieren door prikkeling in tonus waren gebracht. Indompeling van de pooten, gedurende een half uur, in de oplossingen, zonder prikkeling, had geen invloed op de hoeveelheid kreatine. De volgende proeven werden op de gewone wijze genomen, alleen met dit verschil, dat de zenuwen niet werden geprikkeld.

RINGER'S vl.	Veratr. 1 : 5000	Vershil
3.954	3.954	0
	Nicotine 1 : 100	
3.544	3.510	0.034
	CaCl ₂ 0.72 %	
3.399	3.394	0.005
	NaNCS	
3.340	3.336	0.004
	Coffeine 1 : 100	
3.295	3.327	0.032

In geen van deze gevallen was iets van stijfheid der spieren te bespeuren.

Onze uitkomsten zijn dus volkomen in overeenstemming met de

opvatting, dat de spiervezel, wanneer zij op een prikkel reageert met een snelle contractie, op geheel andere wijze werkt als wanneer zij in tonische contractie wordt gebracht. In het eerste geval verbruikt zij stikstofvrije stof, in het tweede vormt zij kreatine, verbruikt zij dus eiwit. Tegen de onderstelling van GRÜTZNER, dat elk dezer werkingen aan een bijzondere soort van spiervezelen zou toekomen, pleit o. a. onze bevinding, dat, bij het konijn, juist de roode spieren, die zich door de traagheid van contractie onderscheiden, minder kreatine bevatten dan de witte. Ofsehoon de uitspraak van BOTTAZZI, dat spiervezelen te sterker het verschijnsel van tonus vertoonen, naarmate zij rijker zijn aan sarkoplasma, zooals reeds door Mosso in het licht is gesteld, niet goed met de waarneming is overeen te brengen, mag toch, vooral op grond van ENGELMANN's omvangrijke onderzoekingen, wel worden aangenomen, dat de snelle contractie door de dubbelbrekende elementen, dus door de spierfibrillen wordt uitgevoerd. Den zetel van den tonus moet men dus wel in het sarkoplasma zoeken of misschien ook in de bestanddeelen der fibrillen waartusschen de dubbelbrekende elementen een plaats vinden. Zeker zal het bij het verder onderzoek omtrent de tweërlei samentrekking der spiervezelen van belang zijn ook op de door BOEKE op nieuw in het licht gestelde dubbele innervatie de aandacht gericht te houden.

Wat het uitgangspunt van ons onderzoek aangaat, meenen wij de vraag, of de vorming van kreatine, en dus het verbruik van eiwit, in het lichaam, voor een belangrijk deel door den tonus der spieren wordt beheerscht, bevestigend te mogen beantwoorden. Reeds voor vele jaren is door PFLÜGER¹⁾ aangetoond van hoe groot gewicht de spiertonus is voor de warmteproductie. Is onze meening juist, dan volgt daaruit ook, dat beperking van den toevoer van eiwit met het voedsel, waarnaar tegenwoordig door velen wordt gestreefd, een bedenkelijke zijde heeft. Mechanischen arbeid kunnen de spieren op kosten van stikstofvrij voedsel verrichten; om echter ook in andere opzichten, door den tonus, aan het organisme goeden dienst te bewijzen, hebben zij eiwit noodig.

Dikwijls is de meening uitgesproken, dat de verstijving der spieren na den dood als een laatste spiercontractie zou zijn op te vatten. Vooral HERMANN heeft de overeenkomst van de veranderingen die de spier bij de stolling ondergaat met die welke bij de contractie worden waargenomen, in het licht gesteld. In het boven aangehaalde werk van VON FÜRTH en SCHWARZ wordt aangetoond, dat juist zulke

1) PFLÜGER's Archiv, Bd. XVIII, S. 247.

stoffen, die in staat zijn de stolling van spierplasma te bevorderen, het arbeidsvermogen der spieren verhoogden.

Naar het schijnt, betreft de overeenkomst niet de snelle contractie, maar den tonus. Wij hebben vermeerdering van de hoeveelheid kreatine gevonden in kikvorschspieren, die door indompeling in water van 42 of 45° C. verstijfd waren. De vermeerdering bedroeg in vier proeven gemiddeld 0.305 mgr. kreatinine op 1 grm. spier (min. 0.204, max. 0.460 mgr.).

Bij het konijn leverde het onderzoek eenige moeilijkheden op, omdat daar de door GOTTLIEB en STANGASSINGER aangetoonde ontleding van kreatine een belangrijke rol speelt, en de zooveel dikkere konijnenspier niet zoo snel geheel door verwarming verstijfd wordt als de dunne spieren van den kikvorsch. Wanneer echter de daaruit voortvloeiende fouten zooveel mogelijk werden vermeden, werd ook, zoowel bij de roode spieren van het konijn als bij de witte, in de meerderheid der gevallen een duidelijke vermeerdering van de hoeveelheid kreatine in de verstijfde spieren waargenomen.

Ook bij het onderzoek van de spontane lijkverstijving der spieren moest met het postmortale verdwijnen van kreatine rekening worden gehouden. Wanneer echter de spieren van de eene lichaamshelft terstond na den dood in zoutzuur werden gebracht en de gelijknamige spieren van de andere zijde na drie of vier uren, als de verstijving zich goed had ontwikkeld, werd telkens in de gestolde spieren meer kreatine gevonden dan in de versch onderzochte. In de vier gevallen die op deze wijze werden behandeld, vonden wij eenmaal een buitengewoon groot verschil en in de andere drie gemiddeld 0.260 mgr. kreatinine meer (min. 0.124, max. 0.336 mgr.). De beschrijving in bijzonderheden van deze en de andere medegedeelde waarnemingen zullen wij elders geven.

Wij meenen uit ons onderzoek te mogen afleiden, dat in de spieren van gewervelde dieren, bij de warmtestolling en bij de lijkverstijving zoowel als bij den tonus, een scheikundige verandering plaats vindt, die tot het ontstaan leidt van kreatine.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN doet, mede namens den Heer J. BOËSEKEN, eene mededeeling: „*Over de oorzaak der tegenstelling tusschen de substitutie naar para-ortho-plaatsen en naar de meta-plaats in de benzolkern.*”

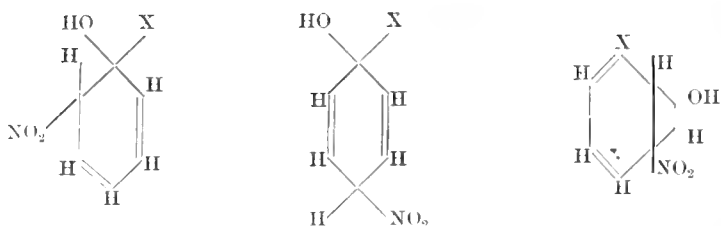
Indien men in een monogesubstitueerd benzolderivaat C_6H_5X een tweeden substituent invoert, ontstaan in hoofdzaak òf ortho- en para-derivaten, òf meta-derivaten. In het eerste geval vormt zich soms ook nog eene kleine hoeveelheid meta-derivaat; in het tweede ontstaat naast het meta-derivaat als hoofdproduct de ortho- of de para-verbinding als nevenproduct.

Van deze verschijnselen heeft men tot nog toe geene voldoende verklaring kunnen geven. De volgende beschouwing kan wellicht eenig licht daarop doen vallen.

Als grondslag neme men de benzolformule van KEKULÉ aan. In elke verbinding C_6H_5X staat dan X aan een dubbel gebonden koolstofaatom. Nu is bekend, dat de onmiddellijke nabijheid eener dubbele binding van grooten invloed is op het gedrag van de daaraan gebonden groep of atoom. Men denke b.v. aan de weinige geneigdheid tot dubbele omzettingen, die het chlooraatom in β -chloorpropyleen $CH_2 = CHCl \cdot CH_3$ heeft, in tegenstelling van hetgeen men bij alkylchloriden en ook bij allylchloride $CH_2 = CH \cdot CH_2Cl$ waarneemt, in welke laatste verbinding X niet direct aan een dubbel gebonden C-atoom is geplaatst. Men mag dus omgekeerd ook wel aannemen, dat X van invloed op de dubbele binding is, daar zulke wisselwerkingen tusschen verschillende atoomgroepen in een zelfde molecule algemeen worden waargenomen.

Men onderstelle nu, dat die werking van X op de dubbele binding, waaraan deze substituent is geplaatst, daarin bestaat, dat zij òf de additie vergemakkelijkt, òf die bemocilijkt. Dan is er — volgens de beschouwingen van THIELE over geconjugeerde dubbele bindingen — te verwachten dat ook de additie aan de plaatsen 1 en 4 dienzelfden invloed van X zal ondergaan. Daarentegen kan de additie aan de dubbele binding 2, 3 door X geen groote wijziging ondergaan, omdat X (evenals in allylchloried) niet direct aan die dubbele binding staat. Met andere woorden komt deze hypothese daarop neer, dat onder den invloed van X de additiesnelheid aan de plaatsen 1, 6 en 1, 4 vergroot of verkleind wordt, terwijl zij aan de plaatsen 2, 3 weinig verandering ondergaat.

Het mag zeer waarschijnlijk geacht worden, dat aan eene substitutie in de benzolkern eene additie voorafgaat. Wordt C_6H_5X b.v. in



salpeterzuur gebracht, dan is primaire additie op een der bovenstaande wijzen voor de hand liggend, gevolgd door afsplitsing van water, waardoor de minder stabiele zesring met twee dubbele bindingen, weder in den stabielen benzolring wordt overgevoerd. Welke additie, met daarop volgende afsplitsing, d. i. welk type van substitutie optreedt, moet nu bij deze beschouwingwijze door de snelheid der reacties beheerscht worden.

Versnelt X de reactie, dan treedt substitutie naar *p-o*-plaatsen op, en wel uitsluitend, indien X een grooten versnellenden invloed heeft. Want in dat geval wordt de hoeveelheid van het meta-derivaat, die zich tegelijkertijd kan vormen, zoo gering, dat zij niet meer te bepalen is. Versnelt X echter de additie niet zoo aanzienlijk, dan kan er ook nog een zekere hoeveelheid van de meta-verbinding gevormd worden. Als voorbeeld diene eenerzijds phenol, anderzijds toluol. In de vorige mededeeling werd aangetoond, dat de substitutiesnelheid in phenol grooter is dan in toluol. Inderdaad leert nu de proefneming dat bij substituties in phenol geene meta-verbinding ontstaat, daarentegen wel bij toluol; althans bij de nitratie daarvan is dit scherp bewezen.

Heeft X daarentegen eene vertragende werking, dan komt de additie van de dubbele binding 2—3 op den voorgrond; deze verloopt thans sneller dan die aan het geconjugeerde systeem. Het gevolg is, dat thans de meta-verbinding het hoofdproduct wordt. De langzaamheid der reacties, waarbij meta-derivaten ontstaan, wordt op deze wijze ook begrijpelijk, daar ook substituties in het ongesubstitueerde benzol meest vrij langzaam verlopen.

Evenals bij addities aan een geconjugeerd systeem naast de vorming van 1.4-producten, ook dikwijls 1.2-producten ontstaan, is dit bij de substituties op para-ortho-plaatsen het geval. De relatieve hoeveelheden, waarin de ortho- en de para-verbindingen ontstaan, wisselen tusschen zeer wijde grenzen en zijn afhankelijk van den aard van X, van dien van den ingevoerden substituent, van de temperatuur en van het milieu; het substitutie-type blijft echter behouden. Men zal dus hebben aan te nemen, dat al deze omstandigheden wel is waar niet in staat zijn om den versnellenden invloed van X te doen

te loor gaan, maar dat zij toch van aanzienlijken invloed zijn op de snelheid, waarmede eenerzijds de dubbele binding, anderzijds het geconjugeerde systeem reageert. Er ligt hier nog een wijd veld van onderzoek bijna geheel onontgonnen. Uit het feit, dat in de meeste gevallen bij *p-o*-substitutie het para-derivaat in verreweg de grootste hoeveelheid ontstaat, moet men afleiden, dat X een nieuwe substituent zoover mogelijk van zich af tracht te plaatsen.

Dat naast meta-verbindingen als hoofdproduct, ook dikwijls ortho-derivaten ontstaan, laat zich uit het voorafgaande terstond afleiden. Immers de primaire additie heeft dan aan de koolstofatomen 2 en 3 plaats. Nu kan zich hierbij de substituent (b.v. NO₂), zoowel aan het koolstofatoom 2 als aan 3 plaatsen. In de tot hertoe bestudeerde gevallen is het meta-product steeds hoofdproduct geweest; dit is wellicht op dezelfde oorzaak terug te voeren, die maakt, dat bij de *o-p*-substituties de *p*-verbinding hoofdproduct is.

In andere gevallen ontstaat echter naast de meta-verbinding als hoofdproduct, als voornaamste bijproduct de para-verbinding. Men zal dan aan te nemen hebben, dat de vertragende werking van X niet zoo aanzienlijk is, dat ook nog niet additie volgens *p-o*-plaatsen kan intreden. Een voorbeeld hiervan is de sulfoneering van benzoëzuur eenerzijds, en van benzolsulfozuur anderzijds. De nitratiesnelheid van benzoëzuur in zwavelzure oplossing is volgens MARTINSEN ca 4 maal grooter dan die van benzolsulfozuur. De vertragende invloed op de substitutie-snelheid is dus bij de carboxylgroep geringer dan bij de sulfogroep. Daaruit zoude dus moeten volgen, dat bij de sulfoneering van benzoëzuur meer para-verbinding moet ontstaan dan bij die van benzolsulfozuur. De sulfoneering van benzoëzuur is niet quantitatief bestudeerd, doch men krijgt den indruk, dat hierbij veel meer para-verbinding, dan bij sulfoneering van benzolsulfozuur, onder dezelfde omstandigheden, gevormd wordt. Nauwkeurige quantitatieve bepalingen ontbreken nog nagenoeg geheel, die ter verificering van de opgestelde hypothesen kunnen dienen.

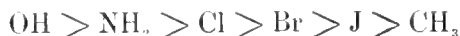
In afwachting van verdere snelheidsbepalingen van substituties en van verdere quantitatieve bepalingen der relatieve hoeveelheden, waarin de isomeren ontstaan, schijnt echter het bovenstaande niet geheel ongeschikt om althans over de kwalitatieve zijde van het substitutie-vraagstuk, voor zooverre dit de twee typen van substitutie betreft, eenig licht te verspreiden.

Is nu door het bovenstaande ook al eenig inzicht verkregen, waarom òf hoofdzakelijk para-ortho- òf hoofdzakelijk meta-derivaten ontstaan, voor de voorspelling waarheen een bepaalde groep een nieuwen sub-

stituent zal richten, is daardoor nog niets gewonnen. Want evenmin als men tot nu toe in het algemeen kan zeggen, waarom sommige katalysatoren versnellend, andere vertragend werken, of waarom bij aanwezigheid van sommige substituenten reacties intreden, die bij hunne afwezigheid uitblijven, laat zich hier in het bijzondere geval der substitutie in de benzolkern een kenmerk aangeven, waardoor men van te voren kan weten of een aanwezige substituent versnellend of vertragend op de additie aan het geconjugeerde systeem zal inwerken, m. a. w. of de substitutie naar para-ortho- of naar meta-plaatsen zal geschieden. Men zal dus voorloopig als feit enkel moeten aannemen dat de halogenen, NH_2 , OH en alkyl naar para-ortho-plaatsen richten, CO_2H , SO_3H , NO_2 , COCH_3 naar de meta-plaats, om enkel de belangrijkste te noemen.

Wel echter schijnt het ons mogelijk toe, om uit het gedrag dezer substituenten af te leiden, hoe andere, daarvan af te leiden substituenten, zullen richten. Zulke substituenten kan men zich nl. uit de genoemde opgebouwd, of door substitutie daaruit ontstaan denken. Daarbij zijn dan twee gevallen te onderscheiden: of wel de substituenten die een complex opbouwen dirigeren in denzelfden zin; of wel in tegengestelden zin.

In het eerste geval laat zich verwachten, dat het complex naar dezelfde plaatsen als zijne componenten zal richten. Inderdaad is dit in overeenstemming met de feiten, hetgeen aan eenige voorbeelden moge getoond worden. Hierbij wordt wederom gebruik gemaakt van de volgorde der substitutiesnelheid, die in een vorige verhandeling (zie p. 507) voor de verschillende groepen is afgeleid en welke toen is voorgesteld door



waarbij OH de grootste, CH_3 de kleinste versnelling veroorzaakt; en door



waarbij CO_2H de minste, NO_2 de grootste vertraging teweeg brengt.

Men beschouwe nu b.v. het aniline. Volgens het bovenstaande is te verwachten dat de groepen O Alk , NH Alk en N (Alk)_2 naar dezelfde plaatsen zullen richten als OH en NH_2 . Dit blijkt zonder eenige exceptie te geschieden.

In de tweede plaats zij gewezen op toluol en zijne in de zijketen gehalogeneerde derivaten. Wordt in deze laatste in de kern een substituent ingevoerd, dan zoude deze op dezelfde plaats moeten treden als in toluol zelf. Ook dit wordt door de ervaring, wat de halogeneeringen betreft, bevestigd. Hiermede schijnt echter in tegenpraak te zijn, dat bij de nitratie van benzalchloried en benzotri-

chloried meta-nitrobenzoëzuur is verkregen. Het is echter meer dan waarschijnlijk te achten, dat daarbij deze chloriden eerst in benzaldehyd, resp. benzoëzuur zijn omgezet en daarna de nitratie heeft plaats gegrepen.

In de derde plaats vestigen wij de aandacht op het benzoëzuur. In de carboxylgroep komt de OH-groep voor. Vervangt men deze laatste door andere atomen of groepen, die ook naar para-ortho richten, dan treedt steeds in de plaats van OH een atoom of groep, die minder versnellend dan OH zelf werkt. Het gevolg moet hiervan zijn, dat de nu ontstane groep COX eveneens vertragend werkt en dus meta-derivaten bij de invoering van een nieuwen substituent moeten ontstaan. Ook dit is geheel in overeenstemming met de feiten: de invoering van een tweeden substituent in benzoëster in benzamied, benzoylchloried, acetophenon, benzaldehyd geeft altijd meta-derivaten. Door de onderzoekingen van MONTAGNE en van v. SCHERPENZEEL is ook gebleken, dat bij nitratie van de chloorbenzoëzuren en der toluylzuren het hoofdprodukt de nitrogroep op dezelfde plaats heeft, als bij de nitratieproducten der amidn, monoen dimethylamiden dezer zuren.

Zijn er in het complex twee tegengesteld richtende bestanddeelen aanwezig, dan wordt de voorspelling hoe het een nieuwen substituent richten zal, zeer onzeker. Toch schijnt ook hier de volgorde der snelheden een zekere rol te spelen. Dit moge blijken uit de substitutie in toluol, in phenylazijnzuur, benzylsulfozuur $C_6H_5 \cdot CH_2SO_3H$ en in phenylnitromethaan. Terwijl nl. de vertragende werking der karboxyl- en der sulfogroep onvoldoende is om de versnellende werking van de methylgroep geheel weg te nemen, wat daaruit blijkt, dat in phenylazijnzuur en in benzylsulfonzuur de substitutie — als in toluol — naar para-ortho-plaatsen geschiedt, overweegt in phenylnitromethaan de werking der nitrogroep, die het sterkst vertragend werkt, want er ontstaat bij nitratie dezer laatste verbinding in hoofdzaak het meta-derivaat. Voorshands is het aantal gevallen, waaraan het hierboven ontwikkelde kan getoetst worden, nog tamelijk beperkt: het wil ons echter voorkomen, dat verdere onderzoekingen in deze richting vruchtdragend zullen kunnen zijn en er wellicht toe zullen kunnen leiden om nauwkeuriger dan tot nu toe te voorspellen, hoe een gegeven groep richtend zal werken.

Amsterdam }
Delft } Dec. 1909.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt, mede namens den Heer I. J. RINKES, eene mededeeling aan: „*Over de bereiding en de physische eigenschappen van de mono-chloor- en monobroomphenolen*”.

De Heer RINKES houdt zich sinds eenigen tijd onledig met de bestuering van het chloreeren en bromeeren van phenol, met het doel om te bepalen in welke verhouding zich de isomere mono-chloor-, resp. broom-phenolen onder verschillende omstandigheden vormen. Hiertoe was noodig, om genoemde verbindingen in volkomen zuiveren toestand te bereiden. Daar nu in „Berichte” 42, 4369 (aflevering van 20 Nov. II.) door WOHLLEBEN eene verhandeling gepubliceerd is, die o.a. ook over de zuivering van ortho-chloor- en ortho-broomphenol handelt, schijnt het wenschelijk het gedeelte van het onderzoek van den Heer RINKES dat ook hierover handelt reeds te publiceeren, daar hij zich van de zuiverheid der door hem bereide stoffen op veel nauwkeuriger wijze dan WOHLLEBEN heeft overtuigd, en het sterk te betwijfelen valt, of laatstgenoemde inderdaad deze verbindingen in zoo zuiveren toestand in handen gehad heeft. WOHLLEBEN gaat van ortho-chloor- en ortho-broomphenol van den handel uit en schudt deze praeparaten met een overmaat van 10-percentige potaschoplossing, waardoor naar zijne meening de halogenphenolen in phenolaten overgaan, phenol niet. Na dit laatste door uitschudden der alkalische vloeistof met aether verwijderd te hebben, zuurt hij aan, waardoor halogenphenol neerslaat. Het halogeengehalte van het zoo gezuiverde product komt, wat het ortho-chloorphenol betreft, met het berekende cijfer overeen; maar van verdere kenmerken van zuiverheid vermeldt hij alleen bij o-chloorphenol het kookpunt (194°, zonder opgave van den barometerstand); bij o-broomphenol volstaat hij met de mededeeling, dat het constant kookte, terwijl het door hem gevonden broomgehalte 45.04 % bedroeg (berekend broomgehalte 46.2 %); van geen van beide praeparaten vermeldt hij het stolpunt.

Voor de bereiding van o-chloorphenol ging de Heer RINKES uit van zuiver o-chloornitrobenzol, hetgeen met ijzervijzel en verd. zwavelzuur tot o-chlooranilien gereduceerd werd. Na distillatie in vacuo stonde dit laatste bij — 2°.4, na omzetting in pikraat bij — 2°.1. Dit zuivere o-chlooranilien werd nu volgens GATTERMANN's methode (Praxis 6e Aufl. bl. 205) gediazoteerd en in phenol omgezet door de diazoniumoplossing te laten druppelen in een tot 140° verhit mengsel van 2 deelen zwavelzuur en 1 deel water. De opbrengst aan phenol bedroeg 65 % van de theoretische. Na distillatie in vacuo

was het stolpunt van het o-chloorphenol $7^{\circ}.7$, terwijl het hoogste tot nu toe waargenomen stolpunt dezer stof bij 7° wordt opgegeven (KRAMERS A. 173, 331). Het produkt, smeltende $7^{\circ}.7$ is echter nog niet volkomen zuiver. Door omzetting in een pikraat en afscheiding daaruit, gelukte het nl., na tweemaalige herhaling dezer bewerking het stolpunt op $8^{\circ}.8$ te brengen, hetgeen door verdere zuivering der stof over het pikraat onveranderd bleef. Dit o-chloorphenol was volkomen kleurloos en had een veel minder intensieven reuk dan het onzuivere product.

Voor de bereiding van metaachloorphenol ging de heer RIXES uit van zuiver metaachloornitrobenzol. Dit werd met ijzervijzel en zwavelzuur gereduceerd. Het metaachlooranilien distilleerde volmaakt constant bij 118.5° en 21 mM. en stonde scherp bij -10.4° . Het hieruit in een opbrengst van 67 % van de theoretische bereide metaachloorphenol werd herhaaldelijk uit ligroïne omgekristalliseerd. Het stolpunt van het nog iets geel gekleurde produkt was $32^{\circ}.8$. WOHLLEBEN zegt alleen, dat hij van metaachloorphenol van het „juiste smeltpunt” is uitgegaan. Dit moet dus $28,5^{\circ}$ geweest zijn, daar een andere smeltpuntsopgave voor deze verbinding in de literatuur niet voorkomt (UHLEMANN, Ber. 11 1161).

Het parachloorphenol werd uit zuiver parachloornitrobenzol bereid. Na herhaald omkristalliseeren uit ligroïne was het stolpunt tot $42^{\circ}.9$ op te voeren, terwijl WOHLLEBEN aan het parachloorphenol het smeltpunt 41° toekent.

Ortho-broomphenol werd met dezelfde voorzorgen uit o-nitrobroombenzol bereid en gezuiverd als boven voor de overeenkomstige chloorverbinding werd aangegeven. Het zoo verkregen o-broomphenol had een stolpunt van $5^{\circ}.6$; tot nu toe stond het enkel als eene vloeistof bekend, die niet tot stolling was te brengen. Hierop heeft zonder twijfel invloed gehad, dat ook dit zuivere o-broomphenol sterk onderkoeld kan worden.

De bereiding van zuiver o-broomphenol langs dezen weg blijft echter eene vrij omslachtige bewerking. Beter kan men het verkrijgen door phenol met de berekende hoeveelheid broom in dampvorm bij 150° samen te brengen, de hoofdmassa van het hierbij gevormde p-broomphenol door uitvriezen te verwijderen, en dan uit de vloeibaar gebleven rest het o-broomphenol door gefractioneerde distillatie en door middel van zijn pikraat in zuiveren toestand af te scheiden.

December, 1909.

Amsterdam, Lab. der Univ.

Scheikunde. — De Heer VAN ROMBURGH biedt aan eene mededeeling van Dr. H. R. KRUYT: „*Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire mengkristal-systemen.*”

(Eerste mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer W. H. JULIUS).

In de Archives Néerlandaises [2] 5 (Jubelband voor Prof. LORENTZ pag. 360 (1900)) publiceerde Prof. BAKHUIS ROOZEBOOM een artikel: „Sur l'équilibre de cristaux mixtes avec la phase vapeur”, waarin hij het *p*-*T*-oppervlak voor een binair stelsel beschrijft en in teekening brengt, wanneer als vaste phase uitsluitend homogene mengkristallen optreden. Hij behandelt het geval van onbeperkte mengbaarheid in alle fasen en speciaal voor een systeem, waarin de smeltlijnen zonder maximum of minimum verlopen. Bovendien heeft hij zich beperkt tot het geval, dat ook de driefasen lijn vast-vloeibaar-gas (*SLG*) zonder maximum of minimum optreedt.

Theoretisch zijn deze zaken verder niet onderzocht¹⁾; daartoe was dan ook geen aanleiding, daar experimenteel onderzoek vrijwel geheel is blijven ontbreken. Slechts twee onderzoekers leverden materiaal omtrent het evenwicht van mengkristallen met een gasphase t. w. SPERANSKI²⁾ en KÜSTER³⁾ terwijl onderzoekingen van HOLLMAN⁴⁾ in een categorie van meer gecompliceerde verschijnsels thuis behooren.

Ik stel mij voor een reeks onderzoekingen te verrichten om onze kennis van systemen met mengbaarheid in vasten toestand uit te breiden. Allereerst wensch ik mij aan te sluiten bij het reeds bekende en wensch daarom thans *theoretisch* nader te bespreken de verschillende mogelijkheden van het verloop der door ROOZEBOOM (l.c.) aangegeven driefasenlijn en later de resultaten mede te deelen van een *onderzoek* naar de driefasenevenwichten in het systeem *p*-dichloor- en *p*-dichroom benzol; hetzelfde systeem dus, waarvan we door KÜSTER en SPERANSKI (l.c.) reeds een reeks vast-gas evenwichten kennen.

¹⁾ Door A. SMITS is in deze Verslagen 17, 116, (1908) en Zeitschr. f. physikal. Chem. 67, 464 (1909), een en ander medegedeeld, waarvan het resultaat zich niet van ROOZEBOOM's uitkomsten onderscheidt. Alleen is mij nog een verhandeling bekend van MEYERHOFFER: „Ueber Reifkurven”, Zeitschr. f. physikal. Chem. 46, 379 (1903).

²⁾ Zeitschr. f. physikal. Chem. 46, 70 (1903) en 51, 45 (1905).

³⁾ Ibid. 51, 222 (1905).

⁴⁾ Ibid. 37, 193 (1901).

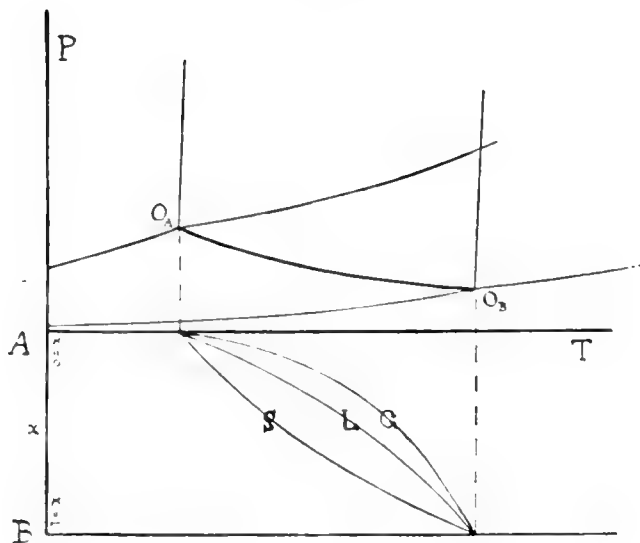


Fig. 1.

Fig. 1 is een gecombineerde PT en Tx -projectie: O_A en O_B zijn de tripelpunten der componenten. Zij worden door de driephasenlijn verbonden. In de Tx projectie valt deze lijn in drie takken uiteen, waarvan een de samenstelling der vaste (S), een die der vloeibare (L) en een die der gasphase (G) weergeeft. Aangezien de invloed van den druk op het evenwicht LS zeer gering is en tripelpuntdrukken in het algemeen betrekkelijk laag zijn, zullen de takken S en L gewoonlijk gelijk gesteld kunnen worden aan de takken, zooals we die in de smeltfiguur bij 1 atmosfeer aantreffen.

In de fig. 1 is aangenomen $P_{O_A} > P_{O_B}$ ¹⁾, welk geval wij hoofdtype 1 zullen noemen. Wij willen thans nagaan onder welke omstandigheden drie denkbare gevallen op zouden kunnen treden n.l.:

- geval a met een drukmaximum op de driephasenlijn
 „ b „ „ drukminimum „ „ „
 „ c zonder max. of min. „ „ „

Om tot een inzicht te komen omtrent de verandering van den druk met de temperatuur zal men zijn weg allereerst zoeken in de richting door Prof. VAN DER WAALS²⁾ ingeslagen, waar hij de drie-

¹⁾ A is (zooals gebruikelijk is) de naam voor den component met het laagste smeltpunt en met een dampdruk grooter dan dien van B bij gelijke temperatuur.

²⁾ Deze Verslagen 5, 482 (1897).

phasenevenwichten eener binaire verbinding met vloeistof en damp behandelt.

Aan het ψ_{vx} -oppervlak voor den vloeistof- en damp-toestand zal dan een ander toegevoegd moeten worden, dat het verband tusschen die grootheden in de homogene vaste phase weergeeft. Nemen wij het meest voorkomende geval aan, dat het smelten onder volumevergrooting geschiedt, dan zal dit oppervlak zich tusschen het vloeistof-damp oppervlak en het ψ_x -vlak bevinden. Omtrent de gedaante van dit nieuwe ψ_{vx} -oppervlak valt op te merken, dat het vrijwel een regelvlak zal zijn met beschrijvende lijnen, die van het ψ_x -vlak voor $x=0$ naar dat voor $x=1$ loopen. Immers de menging van twee vaste stoffen tot een homogene phase geschiedt *zonder of met nauwelijks* constateerbare volumeverandering ¹⁾.

Willen wij nu nagaan, welke de coëxisterende fasen zijn, dan moeten wij raakvlakken zich over deze oppervlakken laten voortbewegen, en zoodoende de gederiveerde oppervlakken en connodale lijnen te voorschijn brengen ²⁾.

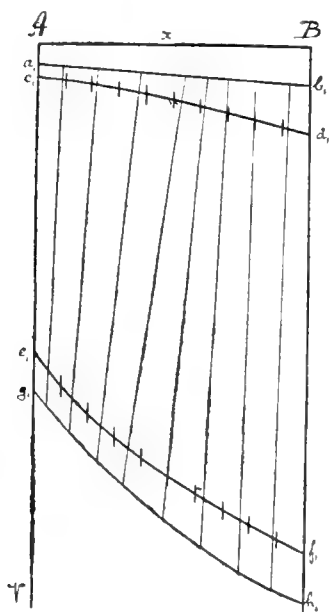


Fig. 2.

Beginnen wij onze beschouwing bij een oppervlak voor een temperatuur beneden de tripelpuntstemperaturen der componenten. Het oppervlak voor den vasten toestand zal dan zeer laag liggen, het raakvlak zal dáárop en op het dampblad rusten. De lijnen a_1b_1 en g_1h_1 in fig. 2 geven de zoo outstane connodale lijnen aan. Het aldus ontstane gederiveerde oppervlak zal lager gelegen zijn dan het gederiveerde oppervlak, dat op damp- en vloeistofblad rust en dat dus geen stabiele toestanden representeert, maar de dampevenwichten van „onderkoelde” vloeistoffen. De daaruit voortkomende connodale lijnen (c_1d_1 en e_1f_1) liggen binnen de connodale lijnen voor het vast-damp evenwicht.

Gaan wij naar hoogere temperatuur,

¹⁾ Cf. RETGERS, Zeitschr. f. physikal. Chem. 3, 497 (1889) en
GOSSNER, „ „, Kristallographie 44, 417 (1908).

²⁾ In de volgende bespreking zijn de gevallen buiten beschouwing gelaten, dat er een minimum- of maximum-druk voor de coëxistentie van twee fasen mogelijk zou zijn. Alle nodenlijnen zijn dus gedacht in denzelfden zin te verloop.

dan naderen de bij elkaar behorende connodale lijnen elkander; en ook de stabiele en de metastabiele takken op het dampblad, speciaal aan de zijde van den bij de laagste temperatuur smeltenden component¹⁾. Immers zijn wij aan de temperatuur van het tripelpunt van dezen component genaderd, dan zullen de punten e_1 en g_1 van fig. 2 samengevallen zijn tot de punten e_2g_2 in fig. 3, die voor de temperatuur van O_A (fig. 1) geldt. De twee gederiveerde oppervlakken snijden elkander in het ψ -vlak voor den component A ; die snijlijn is natuurlijk de raaklijn aan de ψ -lijn voor gas en vloeistoftoestand van A en juist die, welke tevens de ψ -lijn voor vast A raakt (tripelpunt A).

Wat nu bij een temperatuur tusschen

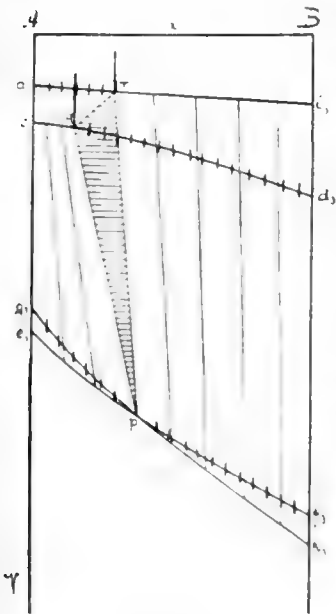


Fig. 4

connodale lijnen voor LS evenwichten. De fig. 4 zal overigens

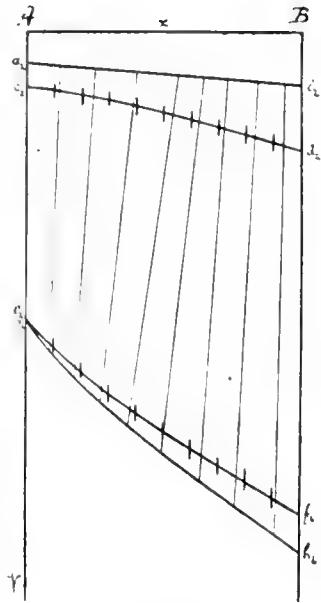


Fig. 3.

die der twee tripelpunten gebeurt, is gemakkelijk te overzien aan de hand van fig. 4. Het wentelende raakvlak zal nu, komende van den A kant, eerst op het vloeistof- en dampblad rusten; maar is zoodoende zekere nodenlijn pq ontstaan, dan zal het raakvlak tevens rusten op een punt r van het oppervlak der vaste phase. De hoekpunten van den driephasen-driehoek pqr leeren ons de samenstelling der drie mogelijke coëxisterende G , L en S phasen bij die temperatuur, kennen. Voortrollend ontstaat een gederiveerd oppervlak voor GS evenwichten, terwijl evenzeer een voortrollen over het vloeistofblad en het oppervlak der vaste phase mogelijk is in de richting der kleine volumina. Daardoor ontstaat van uit r en q een nieuw stel

¹⁾ De niet bij elkaar behorende connodale lijnen ab (vast) en cd (vloeistof) echter verwijderen zich van elkander, daar in het algemeen de uitzettingscoëfficiënt eener vaste stof kleiner is dan die van haar smelt.

zonder verder commentaar duidelijk zijn; en evenzeer zal een bespreking der configuraties voor hoogere temperaturen overbodig zijn.

Prof. VAN DER WAALS heeft nu loc. cit. pag. 490 tevens den weg gewezen voor de afleiding eener uitdrukking, die ons de betrekking tusschen p, t en x leert.

Uit de drie vergelijkingen

$$V_S dp - \eta_S dt = dM_1 u_1 + x_S d(M_2 u_2 - M_1 u_1)$$

$$V_L dp - \eta_L dt = dM_1 u_1 + x_L d(M_2 u_2 - M_1 u_1)$$

$$V_G dp - \eta_G dt = dM_1 u_1 + x_G d(M_2 u_2 - M_1 u_1)$$

volgt

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} x_S \eta_S & 1 \\ x_L \eta_L & 1 \\ x_G \eta_G & 1 \\ x_S V_S & 1 \\ x_L V_L & 1 \\ x_G V_G & 1 \end{vmatrix}}{x_S(V_L - V_G) + x_L(V_G - V_S) + x_G(V_S - V_L)} = \frac{x_S(\eta_L - \eta_G) + x_L(\eta_G - \eta_S) + x_G(\eta_S - \eta_L)}{x_S(V_L - V_G) + x_L(V_G - V_S) + x_G(V_S - V_L)}.$$

Hierin hebben wij een *volkomen algemeene uitdrukking* voor de driephasenlijn in de hier behandelde systemen. Het zal echter niet gemakkelijk zijn door haar tot de gewenschte onderscheidingen te komen.

Wanneer wij b.v. willen nagaan, wanneer $\frac{dp}{dt} = 0$ zal worden, de teller dus nul wordt, dan komen wij ten eerste voor de vraag, wat eigenlijk $\eta_L - \eta_G$ enz. voorstellen; en dan heeft terecht KOHNSTAMM¹⁾ er op gewezen, dat dergelijke verschillen maar niet een condensatiewarmte enz. zonder meer te noemen zijn, omdat η_L en η_G hier niet op hetzelfde mengsel betrekking hebben. En de tweede vraag, naar de getallenwaarde dier grootheden in een te onderzoeken systeem, is nog veel lastiger te beantwoorden.

Ik ben daarom, ter orienteering in deze systemen een anderen, zij het veel minder algemeenen weg ingeslagen.

Wij zullen nagaan, hoe de druk verandert ten opzichte van den tripelpuntsdruk van A , wanneer de vloeistofphase de samenstelling x_L heeft, aannemende, dat x_L een zeer geringe waarde heeft, m. a. w. dat er dus slechts een zéér geringe hoeveelheid B aan A is toegevoegd.

De temperatuur T_2 , waarbij die vloeistof in evenwicht is met een vaste phase, waarvan de samenstelling x_S zij, vinden wij uit de door ROTHMUND²⁾ afgeleide betrekking voor zeer verdunde mengsels:

¹⁾ Deze Verslagen 15, 740 (1907).

²⁾ Zeitschr. f. physikal. Chem. 24, 710 (1897).

$$T_2 = T_1 + \frac{RT_1^2}{q}(x_S - x_L) \dots \dots \dots (1)$$

waarin T_1 de temperatuur van het tripelpunt O_A is.

De dampdruk P_2 bij de temperatuur T_2 is de som der partiaal-drukken der componenten, p_A en p_B :

$$P_2 = p_A + p_B$$

waarvoor wij kunnen schrijven

$$P_2 = (1-x_L) P_{T_2} + p_B \dots \dots \dots (2)$$

als P_{T_2} de dampspanning van vloeibaar A bij die temperatuur voorstelt. Noemen wij verder P_{T_1} de dampspanning van A bij zijn tripelpunt dan kunnen wij, gebruikmakend van de bekende formule van Prof. VAN DER WAALS voor de verzadigde-dampspanning, schrijven:

$$l \frac{P_k}{P_{T_1}} = j \frac{T_k - T_1}{T_1}$$

$$l \frac{P_k}{P_{T_2}} = j \frac{T_k - T_2}{T_2}$$

Door aftrekking verkrijgt men hieruit:

$$l \frac{P_{T_2}}{P_{T_1}} = j \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

$$l P_{T_2} = j \frac{T_2 - T_1}{T_1} P_{T_1}$$

Substitueeren wij nu de in (1) gevonden waarde voor T_2 , dan verkrijgen wij

$$P_{T_2} = P_{T_1} e^{j \frac{RT_1}{q}(x_S - x_L)}$$

waardoor wij dus (2) in dezen vorm schrijven:

$$P_2 = (1-x_L) P_{T_1} e^{j \frac{RT_1}{q}(x_S - x_L)} + p_B \dots \dots (3)$$

Zal nu geval *la* (maximumdruk) optreden, dan moet de driephasenlijn van O_A uit stijgen én dus $P_2 > P_{T_1}$ zijn. De kans dit geval verwezenlijkt te zien in een zeker systeem, wordt er dus door bepaald, of P_2 een zoo groot mogelijke waarde ten opzichte van P_{T_1} heeft; en wanneer zulks het geval zal zijn leert betrekking (3) ons. Voor den eersten term zijn dan karakteristiek $\frac{T_1}{q}$ en $x_S - x_L$. De grootte van $x_S - x_L$ wordt aangegeven door het verschil in aanvangsrichting der smeltlijn-takken voor vast en vloeibaar en dit verschil wordt juist door

T
 q bepaald ¹⁾. Letten wij daarom speciaal op $x_S - x_L$, dan zal dus

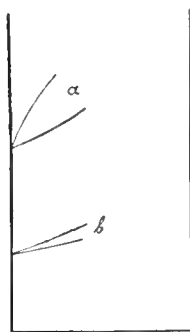


Fig. 5.

de eerste term van (3) groot zijn als $x_S - x_L$ groot is, d. w. z. als de aanvangsrichtingen der smeltlijntakken sterk verschillen (fig. 5a).

De tweede term van (3), de partiaaldruk van den component B , zal in het algemeen ²⁾ grooter zijn, naarmate deze component vluchtiger is; daar wij voor dit hoofdtype I aangenomen hebben, dat zijn tripelpuntsdruk kleiner is dan die van A , zullen wij dus in de voordeeligste omstandigheden zijn, wanneer zij zoo min mogelijk verschillen.

Voor geval Ia wordt dus vereischt: 1. smeltlijntype met wijduiteenliggende takken bij de A -as en 2. ongeveer gelijke tripelpuntsdrukken.

Geval Ib (minimumdruk) stelt twee eischen: van uit O_A een aanvankelijke daling, maar gevolgd door een stijging; is deze tweede eisch niet vervuld, dan hebben we met Ic te doen. Die tweede eisch vraagt natuurlijk weer gering verschil der tripelpuntsdrukken; de eerste eisch, een kleine P_2 , is dus ten opzichte van de grootte van p_B in (3) in strijd met de tweede, en wordt dus geheel bepaald door den eersten term von (3). Dat deze minimaal zij, vereischt natuurlijk, dat $x_S - x_L$ zooveel mogelijk 0 nadere, een eisch, die in een smeltlijn met bijna in aanvangsrichting samenvallende takken vervuld is (zie fig. 2b).

Tot eenzelfde resultaat komen wij als wij bij onze beschouwing van het tripelpunt van B uitgaan en den dampdruk P_2' van een vloeistof beschouwen, die een weinig A bevat, wanneer die vloeistof tevens met vaste phase coëxisteeën kan. Voor deze beschouwing worden de betrekkingen (1), (2) en (3)

$$T_2 = T_1 - \frac{RT_1'^2}{q'} (x_S - x_L) \dots \dots \dots (1bis)$$

$$P_2 = p'_A + x_L P'_{T_2} \dots \dots \dots (2bis)$$

$$P_2 = P'_{T_1} e^{-\frac{RT_1'}{q'} (x_S - x_L)} + p'_A \dots \dots (3bis)$$

zooals zonder meer duidelijk zal zijn, wanneer men bedenkt, dat de teekens met accenten m.m. dezelfde beteekenis hebben voor B als die zonder accent boven voor A hadden.

¹⁾ Verg. VAN LAAR, Zeitschr. f. physikal. Chem. **64**, 257 (1908).

²⁾ Afgezien dus van bijzondere verschillen in de kritische grootheden en van speciale beïnvloedingen der componenten.

Voor geval *Ib* nu moet de driefasenlijn van uit *B* dalen, P'_2 dus $< P'_{T_1}$: daartoe zij 1. p'_{A_1} minimaal, wat onder gelijke vooronderstelling als boven weer ongeveer gelijke tripelpuntsdrukken voor *A* en *B* vraagt;

2. de exponent van *e* met negatief teeken zoo groot mogelijk, wat wijd uiteen liggende smeltlijntakken aan de zijde van den component *B* eischt.

Deze van twee kanten gestelde eischen worden met elkander in overeenstemming gebracht door een conclusie uit de geciteerde verhandeling van VAN LAAR (pag. 265 e. v.), dat nauw aaneenliggende smelttakken aan de zijde van den eenen component niet met eenzelfde configuratie aan den anderen kant kunnen samentreffen¹⁾. Is zulks wel mogelijk, dan zou het optreden van een maximum en een minimum in één driefasenlijn tot de mogelijkheden behooren.

Voor geval *Ib* wordt dus vereischt:

1. Smeltlijntype met bijna samenvallende takken aan de zijde der *A*-as en 2. ongeveer gelijke tripelpuntsdrukken.

Geval *Ic* eindelijk treedt op als tusschengeval tusschen de twee voorafgaande extreme gevallen. Natuurlijk kan de lijn $O_A O_B$ concaaf of convex zijn t. o. v. de temperatuur-as, al naar mate de condities voor *Ia* resp. voor *Ib* gedeeltelijk vervuld zijn. Noemen wij deze gevallen resp. Ic_1 en Ic_2 . Allicht kunnen voor bepaalde vormen der smeltlijn ook buigpunten optreden; maar om zulks scherp na te gaan is deze behandelingswijze ontoereikend.

Een enkele opmerking zij gemaakt omtrent de kans, een daling der driefasenlijn van uit O_A te zien optreden. Zooals gezegd, moet daartoe

$$(1 - x_L) P_{T_1} e^{j \frac{RT_1}{q} (x_S - x_L)} + P_B < P_{T_1}.$$

Denken wij nu maar de gunstige omstandigheid, dat p_B te verwaarlozen is, (doordat b. v. de componenten zeer veel in smelttemperatuur verschillen) dan bewerkt de factor $(1 - x_L)$ een ver-

kleining, de factor $e^{j \frac{RT_1}{q} (x_S - x_L)}$ een vergrooting van de waarde van het eerste lid ten opzichte van die van het tweede lid. Immers $1 - x_L$ is steeds < 1 ; de andere factor is > 1 en slechts voor $x_S = x_L$ is zij gelijk aan 1: in dat geval is dus daling te verwachten, maar zoodra x_S en x_L in waarde verschillen, treedt de vergrootende factor op en het bedoelde verschil komt daar *exponentieel* in voor.

¹⁾ Alweer bij de in de noot op pag. 548 genoemde vooronderstellingen.

De vergrootende invloed zal den anderen dus al zeer spoedig overtreffen, waardoor de kans op geval Ic verkleind en die op Ib tot een minimum gebracht wordt.

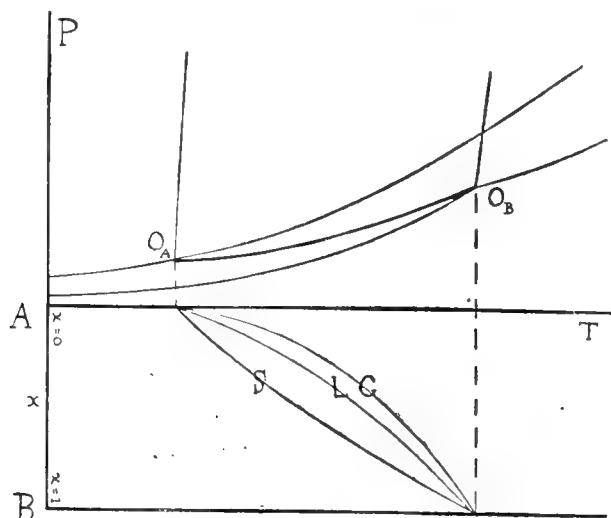


Fig. 6.

Beschouwen wij thans nog een tweede categorie van mogelijkheden n.l. $P_{O_A} < P_{O_B}$, welk geval wij hoofdtype II zullen noemen.

Wij onderscheiden weer drie mogelijkheden n.l.:

- a. drukmaximum op de driefasenlijn
- b. drukminimum „ „ „
- c. geen max. of min. „ „ „

Het zal overbodig zijn de voorafgaande beschouwingen weer te herhalen, wanneer wij de aanvangsrichtingen aan de vergelijkingen (3) en (3b₁s) nagaan. De conclusies, waartoe wij komen, zijn, dat vereischt wordt voor:

Geval IIa: smeltlijntype met nauw aaneengesloten takken aan de zijde van den component B; slechts weinig verschillende tripelpuntsdrukken.

Geval IIb: smeltlijntype met nauw aaneengesloten takken aan de zijde van den component A; slechts weinig verschillende tripelpuntsdrukken.

Geval IIc zal weer het tusschengeval tusschen de twee voorafgaande zijn; eveneens zullen een concaaf (IIc₁) en een convex (IIc₂) verloop weer tot de mogelijkheden behooren.

In een volgende verhandeling hoop ik de uitkomsten van een reeds geruimen tijd in gang zijnd experimenteel onderzoek van het systeem *p*-dichloorbenzol en *p*-dibroombenzol mede te deelen.

November 1909.

Utrecht, VAN 'T HOFF-laboratorium.

Anatomie. — De Heer Bolk biedt eene mededeeling aan: „*Over de Helling van het Foramen magnum bij de Primaten.*”

(2e Mededeeling over de vergelijkende Craniologie der Primaten).

In de eerste mededeeling over de anatomie van den Primaten-schedel is de ligging en verschuiving van het achterhoofds gat bij de Primaten besproken. In deze mededeeling zal meer in 't bijzonder de helling van dit vlak ter sprake worden gebracht.

Door alle schrijvers die zich met dit onderwerp hebben bezig gehouden is er op gewezen dat beide verschijnselen: ligging en helling in een zekere betrekking tot elkander staan, in dien zin dat hoe dichter het Foramen bij de occipitaalpool van den schedel gelegen is, des te meer nadert het tot den vertikalen stand, bij verschuiving naar voren komt het allengs meer horizontaal te liggen. Men heeft deze hellingsverandering evenals de verschuiving met den stand en de statiek van het lichaam in verband gebracht. Bij den typischen viervoeter, waar de schedel min of meer aan de wervelkolom hangt, ligt het Foramen aan de occipitale pool van den schedel en staat het vlak vertikaal, bij den mensch waar de lengteas van het lichaam vertikaal verloopt ligt het achterhoofds gat in het midden van de schedelbasis, terwijl het vlak ervan ongeveer horizontaal ligt. Dit vlak vertoont dus neiging om zich loodrecht ten opzichte van de lengteas van het lichaam te stellen. Een ander gezichtspunt dat het eerst door HUXLEY nader ontwikkeld is, betreft de betrekking die bestaan zoude tusschen de helling van het vlak van het Foramen magnum en den graad van prognathie ¹⁾. Hoe sterker prognathie — hoe langer dus de gezichtschedel — des te steiler zoude het Foramen magnum staan. Maakt men nu een ruwe vergelijking van een dierschedel met een menschenschedel dan valt het parallellisme tusschen beide verschijnselen direct in 't oog. Doch HUXLEY vermeende het zelfs bij schedels van verschillende menschenrassen te kunnen aantoonen. Uit de superpositie van de mediagrammen van een zeer prognathen Australiërschedel en Negerschedel op een Tartarenschedel, bleek dat: „the plane of the occipital Foramen forms a somewhat smaller angle with the basiscranial axis in those particular prognathous skulls than in the orthognathous”. WELCKER ²⁾ is van een eenigszins overeenkomstige meening, doch drukt het verband niet uit tusschen prognathisme en helling van het Foramen magnum, doch tusschen

¹⁾ T. HUXLEY, *On some fossil remains of man. Collected Essays*, VII, blz. 198.

²⁾ H. WELCKER, *Untersuchungen über Wachstum und Bau des menschlichen Schädels*, Leipzig 1862.

prognathisme en ligging van deze opening, wat echter, wanneer men eene betrekking tusschen ligging en helling aanneemt op 't zelfde neerkomt. „Biegt am Vorderschädel“, zegt hij l. c. blz. 50, „der Oberkiefer des Menschen mehr nach vorn (Prognathismus) so rückt zugleich am Hinterschädel das Foramen medullare mehr nach rückwärts“. AEBY¹⁾ kan HUXLEY'S meening niet deelen: „HUXLEY glaubte die Neigung mit dem Prognathismus in Verbindung bringen zu können. Die Steilheit der Stellung sollte in gleichem Maasse wie die letztere wachsen. In unseren Tabellen findet sich keine Bestätigung dieser Ansicht (l. c. blz. 17)“ AEBY zelf ziet een verband tusschen den ontwikkelingsgraad van het achterhoofd en de helling van het Foramen magnum: „Die Ablächung des Hinterhauptes führt eine Erhöhung des Foramen magnum im Gefolge.“ Inderdaad verschilt deze meening niet principieel van die van WELCKER, want is het achterhoofd sterk afgeplat dan ligt het For. magn. verder naar achteren en zoo komen de meeningen van WELCKER en AEBY ten slotte neer op de reeds door DAUBENTON geuite zienswijze dat het For. magn. steiler staat naar gelang het meer naar achteren geschoven is. De verhouding die HUXLEY vermeende aangetoond te hebben, was van een andere natuur, en ten onrechte doet AEBY het voorkomen alsof zijne opvatting in strijd is met die van HUXLEY. Het is toch zeer goed mogelijk dat de helling eenerzijds in betrekking staat tot den graad van prognathie, anderzijds tot de ligging. Is nu de betrekking tusschen ligging en heiling eene zoo standvastige als b.v. TOPINARD het oorspronkelijk²⁾ wilde doen voorkomen „qu'il suffit de mesurer l'un des deux termes par exemple l'inclinaison du trou occipital pour connaître l'autre c'est à dire la quantité du déplacement du trou“? Dit lijkt reeds à priori onwaarschijnlijk, waar de bepalingsmethode van elk der beide verschijnselen bij TOPINARD slechts een zeer relatieven graad van juistheid bezit. Later³⁾ heeft trouwens TOPINARD dit zelf ingezien en drukt hij zich dan ook veel voorzichtiger uit: „Toutefois il n'y a pas un parallélisme rigoureux entre les deux phénomènes.“

In hoofdzaak bepaalden de genoemde schrijvers de helling van het Foramen magnum door den hoek te bepalen die gevormd werd tusschen de door hen aangenomen grondlijn en de lijn die basion met opisthion verbindt. De grondlijn verbindt daarbij het basion met het nasion of typhlon, verliep dus door de schedelbasis. Tegen deze methode is terecht BROCA opgekomen. De waarde van den hoek toch

¹⁾ C. AEBY, Die schädelformen der Menschen und Affen. Leipzig 1867.

²⁾ P. TOPINARD. L'Anthropologie. 4me Edition.

³⁾ P. TOPINARD. Eléments d'Anthropologie générale.

die door deze twee lijnen gevormd wordt is niet alleen afhankelijk van de richting van het Foramen magnum. De richting toch van de grondlijn, dat is dus een der beenen van den hoek hangt van verschillende momenten af, bijv. de knikkingshoeken van de schedelbasis, de lengte van den schedel, de lengte van den clivus, de ligging van het nasion enz. Om dit bezwaar te ontgaan bepaalde Broca de helling van het Foramen magnum door een hoek die het vlak van deze opening maakt met een vlak dat geheel onafhankelijk is van de schedelbasis, nl. dat, 't welk de assen der beide orbitae verbindt. Hij construeerde zijn „angle orbito-occipital”¹⁾. Broca ging hierbij uit van het postulaat dat althans bij de Primaten het orbitaavlak het natuurlijke horizontaavlak van den schedel is, daar bij normale blikrichting deze dieren recht voor zich uit zien, en de orbitae dus bij deze dieren ook volkomen gelijkgericht zullen zijn. Deze meening zal in een der volgende mededeelingen op haar juistheid onderzocht worden.

RAUBER²⁾ keert in een voor kort verschenen verhandeling weer tot de oude onbruikbare methode terug, neemt als grondlijn weder de nasion-basionlijn en zegt zelfs dat: „eine Beziehung der Neigung des Foramen occipitale auf eine andere Linie als auf die Basallinie führt sehr leicht zu Unverständlichkeiten und entbehrt zugleich der morphologischen Bedeutung”.

Ook SCHWALBE heeft zich in den laatsten tijd over de waarde van AEBY's grondlijn uitgesproken: „So rationell auch die von AEBY gezogene Grundlinie ist, ist sie doch nicht geeignet über die Ausbildung der verschiedenen Teile des Schädelraumes Auskunft zu geben.”³⁾ Eenige tegenspraak is in deze kritiek wel gelegen. Een grondlijn van een kranio-metrisch systeem moet toch, wil zij rationeel zijn, in staat zijn om als basis te dienen althans voor de eerste indeelingen van den schedel. Ik heb mijn bezwaren tegen de grondlijnen, die door de schedelbasis getrokken worden reeds kort aangeduid, en zal later wel gelegenheid vinden hierop in bijzonderheden terug te komen. Zulk een lijn moge als grenslijn tusschen hersen- en aangezichtsschedel een zekere waarde hebben, als grondlijn van een cranio-metrisch systeem is zij volkomen onbruikbaar.

HUBER⁴⁾ ten slotte heeft de helling van het For. magnum bij *Hylobates* bepaald ten opzichte van de zoogenaamde Deutsche hori-

¹⁾ P. BROCA. Sur l'angle orbito-occipital. Revue d'Anthropologie 1897.

²⁾ A. RAUBER. Der Schädel von Kegel. Int. Monatsch. f. Anat. und Phys. 1906.

³⁾ G. SCHWALBE. Kritik zu KOHLBRÜGGE's: Morphologische Abstammung des Menschen. Globus 11 Juni 1908.

⁴⁾ L. HUBER. Vergleichung des *Hylobates* und Menschenschädels. München 1902.

tale, een methode, die, wanneer men de te onderzoeken schedels niet mediaan kan halveeren, de voorkeur verdient boven die der andere onderzoekers. De waarschijnlijke fout is hierbij toch geringer dan bij het gebruik der basaallijn, en zeker ook kleiner dan bij de door LISSAUER ¹⁾ gebruikte horizontale hulplijn, gaande van protuberantia occipitalis externa naar het punt waar de ala van het vomer zich aan het rostrum sphenoidalis vasthecht.

Bij de door mij gevolgde methode ter bepaling van de helling van het For. magnum ben ik uitgegaan van de grondlijn die in de eerste mededeeling beschreven is, en heb daarbij de vraag beantwoord: welken hoek maakt het vlak van het achterhoofds gat met deze lijn. Om deze helling bij alle Primaten in een steeds positieve waarde uit te drukken is het niet mogelijk den hoek direkt te meten. Want er komen bij de Primaten drie toestanden voor: *a* het opisthion ligt hooger dan het basion, het For. magn. ziet achterwaarts, de hellingshoek is dus een naar achteren gesloten scherpe hoek; *b* basion en opisthion liggen op gelijken afstand van de grondlijn, het For. magn. ziet recht naar onder, ligt evenwijdig aan de grondlijn, de hellingshoek is gelijk 0; *c* het basion ligt hooger dan het opisthion, het For. magnum ziet naar voren, en de hellingshoek is een naar voren gesloten scherpe hoek. Om verwarring tusschen gelijk groote hoekwaarden in de gevallen *a* en *c* te voorkomen, zou men gebruik kunnen maken van een + en een - teeken. Ik heb echter gemeend de zaak eenvoudiger te kunnen voorstellen door de helling uit te drukken door den hoek die het vlak van het For. magn. maakt met een loodlijn uit het basion op de grondlijn opgericht. In geval *a* is deze hoek steeds

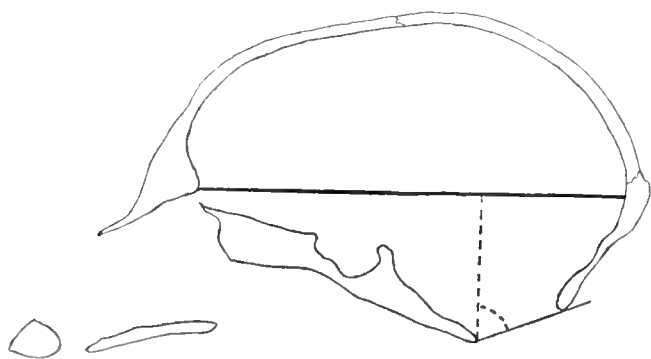


Fig. 1.

Mediagram van een Atelesschedel, ter toelichting van de bepalingswijze van de helling van het For. magn. (Verkleining $\frac{3}{4}$).

¹⁾ LISSAUER. Untersuchungen über die sagittale Krümmung des Schädels. Arch. f. Anthrop. XV Bd. Suppl.

een scherpe, in geval *b* een rechte, in geval *c* een stompe.

In Fig. 1 is aan het mediagram van een Atelesschedel de bepalingswijze verduidelijkt.

Onderstaande tabel vermeldt de uitkomsten der bepalingen bij de schedels van volwassen apen.

Lemur. 40. Propithecus 42.

Mycetes. (18) 33. 45. 53. 59. Gem. 47.5.

Pithecia. 54. 56. 60. 64. Gem. 58.5.

Hapale. 61. 61. 63. 64. 69. 72. Gem. 65.

Chrysothrix. 60. 61. 63. 65. 66. 69. 70. 70. 71. 71. Gem. 66.6.

Cebus. 63. 64. 64. 65. 67. 67. 68. 72. 73. 75. Gem. 67.8.

Ateles. 66. 67. 68. 71. 77. 79. 82. Gem. 72.7.

Cynocephalus. 63. 64. 66. Gem. 64.2.

Inuus. 66. 68. 70. 76. 76. Gem. 71.2.

Macaens ♂. 68. 70. 70. 74. 79. Gem. 72.2.

Macaens ♀. 67. 73. 75. 78. 84. Gem. 75.4

Cercopithecus. 74. 80. 81. 82. Gem. 79.2.

Colobus. 64. 72. Gem. 68.

Semnopithecus. 60. 61. 61. 64. 68. Gem. 62.8.

Siamanga. 55. 56. 56. 56. 58. 61. 63. 63. 67. 68. Gem. 60.2.

Hylobates. 52. 60. 66. 73. 75. Gem. 65.1.

Chimpanzee. 64. 79. 80. Gem. 74.3.

Gorilla. 63. 63. 66. 70. 76. 77. 80. 80. Gem. 71.8.

Orang. 58. 62. 68. 70. 72. 75. 79. 80. Gem. 70.3.

Uit deze cijfers blijkt in de eerste plaats dat de helling van het Foramen magnum individueel sterk wisselt, een feit dat reeds bij eenvoudige beschouwing der schedels opvalt. Vooral bij grootere schedels, als van de Anthropoiden, valt dit verschil sterk in het oog. En toch, wordt door deze sterke schommelingen in de helling van het Foramen, de algemeene configuratie van den schedel slechts zeer weinig

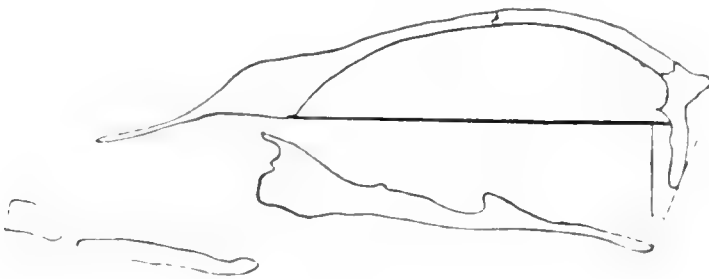


Fig. 2.

Mycetes. (%) Hellingshoek van het For. magn. 18°.

beïnvloed. Ten bewijze hiervan geef ik in Fig. 2 en 3 de media-

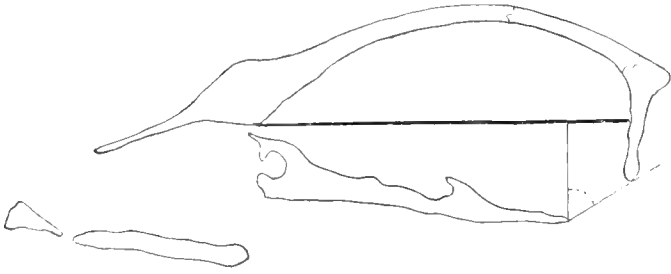


Fig. 3.

Mycetes. ($\frac{3}{1}$) Hellingshoek van het For. magn. 59°.

grammen van twee *Mycetesschedels*, met een hellingshoek van 18 resp. 59 graden. Hieruit kan men tevens zien dat eene geringe verkorting van den Clivus van grooten invloed is op den hellingshoek. Nu neemt *Mycetes* wat de variatiebreedte betreft ook hier, evenals ten opzichte van de ligging van het Foramen magnum de eerste plaats in, om redenen in de eerste mededeeling nader toegelicht. Doch voor de overige schedels geldt hetzelfde. Een tweede moment dat de individueele variaties veroorzaakt, is het vooral bij *Anthropoïden* opvallende verschil in sagittale afmeting van het For. magnum. Bij de door mij gebruikte *Orangschedels* b.v. wisselden deze maat tusschen 25 en 41 m.M.

Toch zijn, niettegenstaande deze individueele variaties, vooral als men de seriën in hun geheel onderling vergelijkt, wel merkwaardige verschijnselen te konstateeren. Opmerkelijk is het dat *Chrysothrix*, niet die plaats blijkt in te nemen die aan dit geslacht in de literatuur over dit onderwerp wordt toegekend. Onder *Plathyrrhinen* bezitten *Cebus* en vooral *Ateles* hooger hoekwaarden, dat wil zeggen dat bij

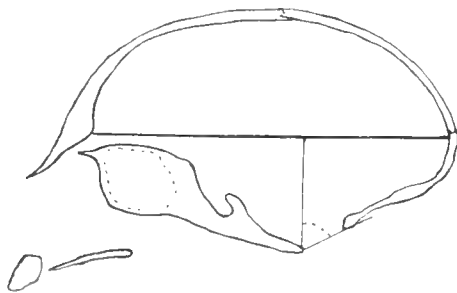


Fig. 4.

Mediagram van den schedel van *Chrysothrix*. ($\frac{1}{11}$).

deze geslachten het For. magn. meer horizontaal ligt. Ook bij de meeste geslachten der Katarrhinen staat Chrysothrix in dit opzicht achter. Bij uitwendige bezichtiging echter lijkt het For. magn. bij dezen apenschedel horizontaal te liggen tengevolge van de enorme ontwikkeling van het achterhoofd, en het grootte $\frac{1}{2}$ aandeel dat de squama occipitalis aan de vorming van de schedelbasis neemt. (Zie Figuur 4).

Onder de katarrhine apen komen de hoogste hoekwaarden, 80° en daarboven, bij de Anthropoïden en het geslacht Cercopithecus voor. Dit geslacht neemt dus ook in de helling van het Foramen magnum de hooge plaats in die wij het reeds in de voorgaande mededeeling op grond van de ligging moesten toekennen. En evenzoo neemt onder deze groep van Primaten het geslacht Siamanga weder de laagste plaats in. Bij dezen overigens zoo hoog ontwikkelden aap ligt het Foramen magnum steiler dan bij enig ander geslacht der apen van de oude wereld, al wordt het dan ook van nabij gevolgd door het geslacht Semnopithecus. Bij de studie van de schedelbasis zullen wij gelegenheid hebben meer in 't bijzonder te wijzen op de afzonderlijke plaats die Siamanga in de groep der Primaten inneemt wat den gemeenen vorm van den hersenschedel betreft, en waardoor het moeilijk wordt te gelooven dat hier primaire toestanden zijn blijven bestaan.

In de voorgaande mededeeling is aangetoond dat gedurende de infantiele en juveniele periode het For. magn. occipitaalwaarts schuift. Het blijkt nu dat ook de helling van het Foramen gedurende den groei zich wijzigt. Want *bij den jeugdigen apenschedel ligt het Foramen magnum meer horizontaal dan bij den volwassen schedel.* Ten bewijze hiervan diene het volgende. Terwijl bij den volwassen Siamanga de hellingshoek schommelt tusschen 55° en 68° graden, vond ik bij een juvenielen schedel (gemengd gebit) een hoek van 70° , bij een infantielen (nog volledig melkgebit) een van 81° . Bij een Chimpanzee met volledig melkgebit lag het For. magn. bijkans horizontaal, de hellingshoek bedroeg 88° . Bij drie infantiele Orangschedels vond ik de hoekwaarden 78° , 85° en 86° , terwijl eindelijk een juveniele Gorillaschedel een hellingshoek had van 87° en een infantiele een van zelfs 95° . Bij dit schedeltje zag dus het For. magn., zooals dat bij den mensch het geval is, naar voren. Wij zullen hier onder aantoonen dat ook bij den mensch het vlak van het For. magn. gedurende infantiele en juveniele periode in gelijken zin als bij de Anthropoïden draait, doch er zij hier reeds op gewezen dat deze draaiing — evenals dit met de verschuiving het geval is, bij Anthropoïden en Siamanga veel sterker is dan bij den mensch.

In beide verschijnselen, *in in de ligging en in de helling van het Foramen magnum, komt dus de jeugdige Anthropoïd meer met den menschelijken toestand overeen dan de volwassene.*

De mensch neemt ten opzichte van de helling van het For. magn. onder alle Primaten een afzonderlijke plaats in daar bij hem de opening niet naar achter doch naar voren gekeerd is. Dit feit, waarop reeds door DAUBENTON en na hem door alle schrijvers gewezen is die zich met dit onderwerp hebben bezig gehouden, wordt nader door de onderstaande cijfers toegelicht, waarbij ik er aan herinner dat een hellingshoek van 90° bij de door mij gevolgde methode overeenkomt met eene ligging van het For. magn. evenwijdig met de grondlijn, dus horizontaal.

Hellingshoek van het For. magn. bij volwassen menschedels.

Papoeas: $96^\circ, 99, 99, 99, 100, 101, 103, 107, 107, 108$, Gem. $101,9^\circ$.
 Negers: $92^\circ, 96, 07, 98, 99, 100, 100, 101, 103, 106$, Gem. $99,2^\circ$.
 Friezen: $86^\circ, 89, 90, 94, 95, 99, 100, 103, 103, 103$, Gem. $96,2^\circ$.
 Zeeuwen: $93^\circ, 97, 99, 100, 101, 103, 104, 105, 109, 112$, Gem. $102,3^\circ$.
 Javanen: $92^\circ, 92, 97, 99, 100, 100, 103, 103, 103, 105$, Gem. $99,4^\circ$.

De gemiddelden der drie groepen liggen betrekkelijk dicht bij elkander, en tot het bestaan van een verschil tusschen dolichocephale schedels (de eerste drie groepen) en brachycephale kan men op grond dezer cijfers niet besluiten, al is dan ook het verschil tusschen de lange dolichocephale Friezenschedels en de korte, sterk brachycephale Zeeuwenschedels wel merkwaardig. Eigenaardig is het ook dat onder de Friezenschedels twee voorkwamen waarbij het Foramen magnum een weinig achterwaarts zag (hellingshoek 86° en 89°) en een waar het juist horizontaal lag. Dit was het gevolg van de bijzondere lengte van den clivus bij deze schedels. Dat de ontwikkelingsgraad van dit deel van de schedelbasis bij den mensch een grooten invloed heeft op de helling van het For. magn. wordt bewezen door de infantiele schedels. Gemiddeld toch is zonder uitzondering bij jeugdige menschedels het For. magn. nog sterker naar voren gekeerd dan bij volwassenen, zooals uit de volgende hoekwaarden blijkt.

Hellingshoek van het For. magn. bij kinderschedels.

0	-1	jaar.	110, 110, 109, 105, 104, 103, 102, 101, 100, 100, 92.
1	2	jaar.	100, 110, 110, 108, 106.
	2	jaar.	107, 107, 106, 106, 103, 101, 95.
	3	jaar.	110, 110, 108, 107.
	4	jaar.	114, 109, 106, 105, 100.
5	6	jaar.	114, 113, 109, 107, 105, 103, 96, 96.
	7	jaar.	108, 100, 100, 99, 98.
8	9	jaar.	104, 103, 101, 97.
10	11	jaar.	110, 104, 104, 101, 100 92.

De gemiddelde hellingshoek van den volwassen schedel kan men blijkens de voorafgaande tabel op 100° stellen. En nu blijkt dat van de 31 kinderschedels beneden het 5e jaar slechts twee een kleiner hellingshoek dan dit gemiddelde hebben, terwijl van de 23 kinderschedels tussehen het 5e en 12e jaar zulks met 6 het geval was. Hiernit is dus te besluiten dat gedurende de infantiele periode waarin, zooals in de 1e mededeeling aangetoond is, eene verschuiving van het achterhoofds gat bij den mensch plaats grijpt, ook het vlak van het Foramen magnum draait en wel in denzelfden zin als bij de Anthropeïden. Doch, zooals reeds gezegd, is bij de Anthropeïden deze draaiing, evenals de daaraan gepaard gaande verschuiving aanzienlijker dan bij den mensch.

Wij hebben nu dus tweemaal gelegenheid gehad op te merken dat verschuiving van het Foramen magnum en verandering in den hellingshoek hand in hand gaan gedurende de individueele ontwikkeling. Zoowel toch bij den mensch als bij de Anthropeïden wordt met de verschuiving naar achteren de hellingshoek kleiner. In hoeverre deze relatie tussehen beide verschijnselen nu ook vergelijkend anatomisch bestaat, wordt uit de onderstaande tabel duidelijk. In de tweede kolom is de gemiddelde hellingshoek aangegeven, in de eerste de gemiddelde basaalindex, zooals deze in de 1e mededeeling is vastgesteld. Ik herinner er daarbij aan dat hoe grooter deze index is, des te verder ligt het Foramen magnum naar achteren.

	<i>Index basalis.</i>	<i>Hellingshoek van het For. magn.</i>
Lemur albifrons	87 (1)	40° (1)
Propithecus diadema	80 (2)	42° (2)
Myecetes	86 (3)	47.5° (3)
Pithecia	74 (6)	58.5° (4)
Hapale	71 (8)	65° (8)
Cebus	67 (10)	67.8° (11)
Ateles	64 (13)	72.7° (16)
Chrysothrix	59 (18)	66.6° (10)
Inuus	65 (12)	71.2° (14)
Cynocephalus	65 (12)	64.2° (7)
Macaecus	64 (14)	73.8° (17)
Cercopithecus	57 (19)	79.2° (19)
Sennopithecus	74 (7)	62.8° (6)
Colobus	75 (5)	68° (12)
Siamanga	76 (4)	60.2° (5)
Hyllobates	71 (9)	65.1° (9)
Chimpanzee	64 (15)	74.3° (18)
Gorilla	61 (16)	71.8° (15)
Orang	61 (17)	70.3° (12)

In elk der beide seriën is tusschen haakjes aangeduid het plaatsnummer dat elk der geslachten bij eene regelmatige rangschikking zou innemen. In hoeverre nu tusschen ligging en helling van het Foramen magnum eene betrekking bestaat kan uit een vergelijking van deze rangcijfers direkt afgelezen worden. In 't algemeen blijkt wel degelijk bij de apen een parallëllisme tusschen beide verschijnselen te bestaan, slechts in enkele gevallen ziet men eene eenigszins sterke tegenspraak tusschen ligging en helling. Dit is b.v. het geval bij *Chrysothrix* waar de hellingshoek te klein is met betrekking tot de ligging, en bij *Colobus* waar juist het omgekeerde geval zich voordoet.

In het begin dezer mededeeling werd aan de meening van HUXLEY herinnerd, volgens welke de helling van het Foramen magnum in betrekking zoude staan tot den graad van prognathie. In de volgende mededeeling, die het prognathisme van den primatenschedel tot onderwerp heeft, zal op deze meening nader worden ingegaan.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van den Heer PH. KOHNSTAMM: „*Een kort antwoord op de opmerkingen van den Heer VAN LAAR.*”

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

In het verslag van de vorige zitting dezer Akademie heeft de Heer VAN LAAR eenige opmerkingen gemaakt, naar aanleiding eener verhandeling van den Heer TIMMERMANS en mij. Hoewel die opmerkingen op geen punt de juistheid van onze uitkomsten betwisten, maar uitsluitend de vraag betreffen, of wij voldoende recht hebben laten wedervaren aan het aandeel dat de Heer VAN LAAR gehad heeft in den opbouw der theorie, meen ik, dat zoowel de beleefdheid jegens den Heer VAN LAAR als de deferentie voor de beide aanbieders dier opmerkingen mij verbieden, deze onbeantwoord te laten. Ik zal dus trachten zoo kort mogelijk te motiveeren, waarom ik ook thans nog meen, dat aandeel geheel correct te hebben weergegeven.

1°. De Heer VAN LAAR schrijft in punt *a* zijner opmerkingen: ¹⁾ „Hierbij moet ik opmerken, dat ik *nimmer* ²⁾ het bijzondere geval $a_{12} = \vee a_1 a_2$ als het algemeene geval heb voorgesteld.”

Blijkbaar herinnerde de Heer VAN LAAR zich bij het schrijven dezer regels niet meer, dat hij in deze Verslagen van Sept. 1906 p. 228 geschreven had: „In de derde Verhandeling werd alsnu voor het *geheel algemeene* ²⁾ geval $a_2 \lesseqgtr a_1$ $b_2 \lesseqgtr b_1$ afgeleid,” enz.

En op diezelfde pag. „Thans werd voor de bepaling van het dubbel-

¹⁾ Deze Versl. XVIII p. 499.

²⁾ Cursivering van den Heer VAN LAAR.

punt de beperkende onderstelling $\beta = 0$ opgeheven, en het *geheel algemeene geval*¹⁾ $a_2 \geq a_1$ $b_2 \leq b_1$ beschouwd."

En op p. 229: „Men kan nl. *alle mogelijke paren*¹⁾ van stoffen karakterizeeren door de waarden van θ en π , en het zal ten slotte *alleen van deze waarden*¹⁾ afhangen, welke der drie hoofdtypen zal optreden."

En op p. 231: „De berekeningen worden echter zoo uiterst ingewikkeld, dat deze voor het *geheel algemeene geval*¹⁾ $a_2 \geq a_1$ $b_2 \leq b_1$ praktisch onuitvoerbaar bleken."

En op p. 232: „Dit blijkt reeds hieruit, dat het vervangen van de vereenvoudigende onderstelling $b_1 = b_2$ door de *geheel algemeene aanname*¹⁾ $b_1 \leq b_2$ niets aan het bestaan van een dubbelpunt... heeft veranderd, en dat ook de berekeningen voor de begrenzing van het type III... kunnen geschieden voor het *geheel algemeene geval*¹⁾ $b_1 \geq b_2$."

En op p. 233: „Berekening leert nu, dat in het *geheel algemeene geval*¹⁾ $b_1 \leq b_2$ enz."

Immers overal waar hier gesproken wordt van het *algemeene geval*, — en ik wensch met dit lijstje geenszins aanspraak te maken op volledigheid, — is inderdaad bedoeld $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$, en ook het citaat van p. 229 is alleen mogelijk bij identificatie van dit bijzondere met het algemeene geval.

2^o. In punt *b* zijner opmerkingen zegt de Heer VAN LAAR; naar aanleiding van ons gezegde, dat zijne onderzoekingen: „zeer eenzijdig den nadruk leggen op het bestaan van open plooiën, een omstandigheid, die toch geenszins als *resultaat*²⁾ kan beschouwd worden, daar zij onmiddellijk voortvloeit uit de willekeurige, zoo niet onjuiste *onderstelling*²⁾ der lineaire afhankelijkheid van b en x ": „Wederom heb ik nooit beweerd, dat $\frac{d^2b}{dx^2} = 0$ altijd met de werkelijkheid zou overeenstemmen; alweder heb ik dit eenvoudig *aangenomen*³⁾ teneinde de *berekeningen*³⁾ mogelijk te maken."

Toch lees ik op p. 232 van zijn reeds genoemde Verhandeling: „Wij willen er nogmaals met nadruk op wijzen, dat de *numerieke*³⁾ uitkomsten van ons onderzoek natuurlijk zullen gewijzigd worden, wanneer b niet onafhankelijk van r en T wordt aangenomen... maar dat *localitatief*³⁾ alles hetzelfde zal blijven."

En op p. 234: „Daarna doet verdere drukverhooging de phasen I en 2 wederom uiteenwijken, zonder dat de lengteplooi — *zoals vroeger wel mogelijk werd geacht*¹⁾ — (zie o.a. VAN DER WAAALS, COHT, II p. 190, — zie ooit weer sluit. Alleen bij temperaturen hooger dan T ... kan er van blijvende homogeniteit sprake zijn."

1) Cursivering van mij. 2) Cursivering van T. en K.

3) Cursivering van den Heer VAN LAAR.

Mij dunkt, dat elk onbevooroordeeld lezer dezer regels zal erkennen, dat de Heer VAN LAAR meende hier een nieuwe uitkomst te geven, materieel afwijkende van de uitkomst eener gesloten plooi, zooals die door VAN DER WAALS mogelijk werd geacht, en dat het hem bij het schrijven dezer regels onmogelijk bewust kan geweest zijn, dat die afwijkende uitkomst alleen berustte op zijn onderstelling $\frac{d^2b}{dr^2} = 0$.

3°. Wat punt *c* betreft, de daar genoemde zin slaat inderdaad op een stuk van den Heer VAN LAAR van voor April 1905 (nl. van 8 Feb. 1905). Het was mij echter tot het verschijnen der „Opmerkingen” niet bekend (en het is mij thans ook alleen uit die „Opmerkingen” bekend), dat de Heer VAN LAAR die vroegere Verhandeling geabandonneerd heeft. Wij zouden er anders natuurlijk van gezwegen hebben.

4°. Wat punt *d* betreft moet ik den Heer VAN LAAR tegen zich zelve in bescherming nemen. Wij hadden gezegd: „Zijn uitkomsten zijn vooral belangrijk omdat zij toonden, dat onder bepaalde omstandigheden bij volkomen normale stoffen ontmenging kan voorkomen, iets wat in dien tijd vrij algemeen betwijfeld werd.” De Heer VAN LAAR „teekent daarbij aan, dat tot nog toe volstrekt niet algemeen betwijfeld werd, dat bij volkomen normale stoffen ontmenging kan voorkomen . . . maar dat alleen betwijfeld werd, of sommige „abnormale” vormen van ontmenging bij volkomen normale stoffen konden voorkomen.” Ik moet hertegenover volhouden, dat zoowel LEHFELDT als VAN DER WAALS, naar wie wij l. c. verwezen, volstrekt niet een of ander speciaal geval van ontmenging op 't oog hadden, maar wel degelijk *elke* ontmenging. Den Heer VAN LAAR komt dus inderdaad grooter lof toe, dan hij hier wil erkennen. Wel moet ik toegeven, dat wij, in ons streven om geheel objectief te zijn tegenover den Heer VAN LAAR, inderdaad in den boven geciteerden zin onbillijk zijn geworden tegenover des Heeren VAN LAAR'S voorgangers: VAN DER WAALS en KORTEWEG. Onze zooeven geciteerde zin toch zou den schijn wekken, alsof VAN LAAR de eerste ware geweest, die de mogelijkheid van ontmenging voor normale stoffen had aangetoond. Zooals de Heer VAN LAAR terecht zegt, is dit onjuist en onze zin had dan ook beter geluid: „Zijn uitkomsten zijn vooral daarom belangrijk, omdat hij bleef vasthouden aan de mogelijkheid van ontmenging voor normale stoffen in een tijd, waarin dit vrij algemeen werd betwijfeld, en opnieuw liet zien, dat bij bepaalde waarden van *a*'s en *b*'s, die geenszins a priori als onwaar schijnlijk mogen worden beschouwd, ontmenging inderdaad moet optreden.”

Wilde ik ook de andere opmerkingen van den Heer VAN LAAR bespreken, dan zou ik — daar ik niet mag aannemen, dat de lezer

van de details van deze onderzoekingen op de hoogte is - uitvoerig op het fond zelve der zaak moeten ingaan. Maar ik zou dan meenen misbruik te maken van de gastvrijheid, die deze Akademie zoo heuschelijk ook aan hare niet-leden in deze kolommen aanbiedt. Ik zal mij dus met het bovenstaande vergenoegen. Mocht de Heer VAN LAAR echter wenschen, deze discussie elders voort te zetten, dan ben ik daartoe, hoewel ongaarne, bereid.

Geologie. — De heer MOLENGRAAFF biedt een mededeeling aan van den heer H. A. BROUWER: „*Pienavriet, een melanocrate foyaiet van Transvaal*”.

(Mede aangeboden door den Heer K. MARTIN).

(Aangeboden in de vergadering van 27 November 1909).

Onder de nepheliensyenieten op en ten westen van de hoeve Leeuwfontein (No. 320) ten noordoosten van Pretoria, welke groote wisselingen in chemische en mineralogische samenstelling vertoonen, bevindt zich in de „collectie MOLENGRAAFF” een zeer titanietrijke variëteit, gevonden $\frac{1}{4}$ mijl ten westen van de Pienaarsrivier, nabij de grens van de plaats Zeekoegat.

Makroskopisch herkent men in dit gesteente tot 1 cM. groote, zeer sterk afgeplatte Karlsbader tweelingen van rooden veldspaat en kleinere kristallen van rooden nephelien, waartegen tallooze aegyrien naaldjes en kleine, sterk glinsterende kristallen van titaniet afsteken.

Mikroskopisch blijken de samenstellende mineralen te zijn, veldspaat, nephelien, sodaliet, veel aegyrien, zeer veel titaniet en in geringe hoeveelheden apatiet, fluoriet, calciet, analciem en titano-magnetiet.

De veldspaten zijn orthoklaas en mikropertheet in Karlsbadertweelingen.

Nephelien en sodaliet zijn doorgaans geheel overgegaan in glimmer en natroliet pseudomorphosen, waarvan de eerste in hoofdzaak tot den nephelien, de laatste tot sodaliet beperkt zijn. In de weinige, niet geheel veranderde kristallen ziet men de omzetting langs barstjes in het kristal beginnen, het eindproduct is dan een complex van zeer fijne glimmerblaadjes. De glimmer komt ook onregelmatig verspreid in de natroliet pseudomorphosen van sodaliet voor.

De aegyrien is sterk pleochroïsch van olijfgroen tot groenachtig geel, de kristallen zijn homogeen, slechts bij uitzondering is er een kern van aegyrienaugiet; ze zijn rijk aan insluitsels van kleine idiomorphe kristalletjes van titaniet en apatiet en sterk geïmpregneerd met vloeispaat.

De titaniet komt voor in de voor de foyaietische magma's algemeene tweelingen naar (001), in de ruitvormige doorsneden is de lange diagonaal de tweelingsgrens. Bovendien zijn beide individuen

polysynthetisch vertweeingd. Het pleochroïsme is sterk, van zalmkleurig tot kleurloos.

De apatiet is het oudste kristallisatieproduct, ze komt zelfs in idiomorphe kristalletjes in de titaniet ingesloten voor; de kristallisatie der overige elementen geschiedde grootendeels gelijktijdig, de aegyrien heeft soms zijn eigen vorm tegenover veldspaten en veldspatoïden, maar meestal is de onderlinge begrenzing onregelmatig en wijst op een gelijktijdig ontstaan. De veldspaat omsluit enkele idiomorphe kristallen van nephelien en sodaliet, in hoofdzaak is hij dus het laatste kristallisatieproduct. Waarschijnlijk langs pneumatolytischen weg kristalliseerden in de laatste holten fluoriet, calciet en analciem.

We zien hoezeer dit gesteente mineralogisch afwijkt van de normale nephelien syenieten door zijn hoog gehalte aan aegyrien en titaniet. Den mesocraten vorm dezer groep noemde A. LACROIX¹⁾ coviet, den melanokraten teraliet, met als type van coviet het door WASHINGTON beschreven gesteente van Magnet Cove in Arkansas, als type van teraliet de alkaliveldspaat-nephelien gesteenten van de Crazy Mountains in Montana.

Hieronder volgen de analyses van het hier beschreven gesteente (geanalyseerd door F. PISANI), en die van enkele covieten en teralieten.

	I	II	III	IV	V	VI
SiO ₂	49.20	49.70	51.10	47.67	44.65	47.85
TiO ₂	7.13	1.33	1.38	—	0.95	—
Al ₂ O ₃	9.23	18.45	21.40	18.22	13.87	13.24
Fe ₂ O ₃	7.73	3.39	0.90	3.65	6.06	2.74
FeO	3.24	4.32	5.58	3.85	2.94	2.65
MnO	—	—	—	0.28	0.17	—
CaO	11.55	7.91	5.35	8.03	9.57	14.36
MgO	1.35	2.32	2.81	6.35	5.15	5.68
Na ₂ O	6.20	5.33	6.35	4.93	5.67	3.72
K ₂ O	4.96	4.95	4.21	3.82	4.49	5.25
P ₂ O ₅	0.06	0.40	—	2.97	2.10	2.74
H ₂ O	2.20	1.34	0.87	—	1.50	2.42
Som	99.85	99.44	99.65	100.15	99.93	100.65

¹⁾ Matériaux pour la Minéralogie de Madagascar. Extr. nouv. Arch. du Museum, 4e serie, deel 1, pag. 184.



Verklaring der Figuur.

Vergrooting 30 maal. Een deel van een groot veldspaatkristal omsluit poikilietisch aegyrien, titaniet, nephelien (boven links) en sodaliet (onder-midden en onder-rechts).

De aegyrien bevat talrijke idiomorphe insluitsels van titaniet, apatiet en fluoried.

- I. Pienaariet. Leeuwfontein (320) Pretoria. Transvaal.
- II. Coviet. Magnet Cove. Arkansas cf. H. S. Washington: Journ. of Geol. IX, 614. 1901.
- III. Coviet. Nosy Komba. cf. A. Lacroix Mat. Minéral. Madagascar Extr. Nouv. Arch. du Museum 4e Ser. I, 32.
- IV. Teraliet. Crazy Mountains Bull. U. S. Geol. Surv. no. 150.
- V. Teraliet. " " " " " " " " " "
- VI. Teraliet. (nephelien pyroxeen maligniet) cf. A. C. Lawson Bull. Dep. of Geol. Univ. of California I, 337. 1896.

Zoowel mineralogisch als chemisch wijkt het hier beschreven gesteente dus sterk af van de tot nu toe bekende melanoerate nephelien-syenieten; het is gekenmerkt door zijn hoog Fe_2O_3 , TiO_2 , en CaO gehalte (rijkdom aan aegyrien en titaniet) en zijn laag Al_2O_3 gehalte (afname der veldpaten en veldspatoïden). Prof. MOLENGRAEFF sloeg mij den naam Pienaariet voor, naar de Pienaarsrivier, omdat de plaats, waar hij dit gesteente verzamelde, zich in een strook grond bevindt, gelegen tusschen een zijrivier van de Pienaarsrivier, Mundtspunt genaamd, en de genoemde rivier zelve.

Voor de Boekerij wordt aangeboden:

1°. Door den Heer HUBRECHT, een exemplaar van zijn: „Die Säugetierontogenese in ihrer Bedeutung für die Phylogenie der Wirbeltiere” en van zijn: „The foetal membranes of the vertebrates” (Advance print from the Proceedings of the 7th international zoological Congress, Boston meeting August 19—24, 1907):

2°. Door den Heer ZEEMAN de dissertaties van: *a.* MEVROUW VAN BILDERBEEK-VAN MEURS, getiteld: „Magnetische splitsing van het ultraviolette ijzerspectrum (λ 2300— λ 4500)”; *b.* den Heer A. VAS NUNES, getiteld: „Experimenteel onderzoek van klokken van F. HEMONY.”

De Vergadering wordt gesloten.

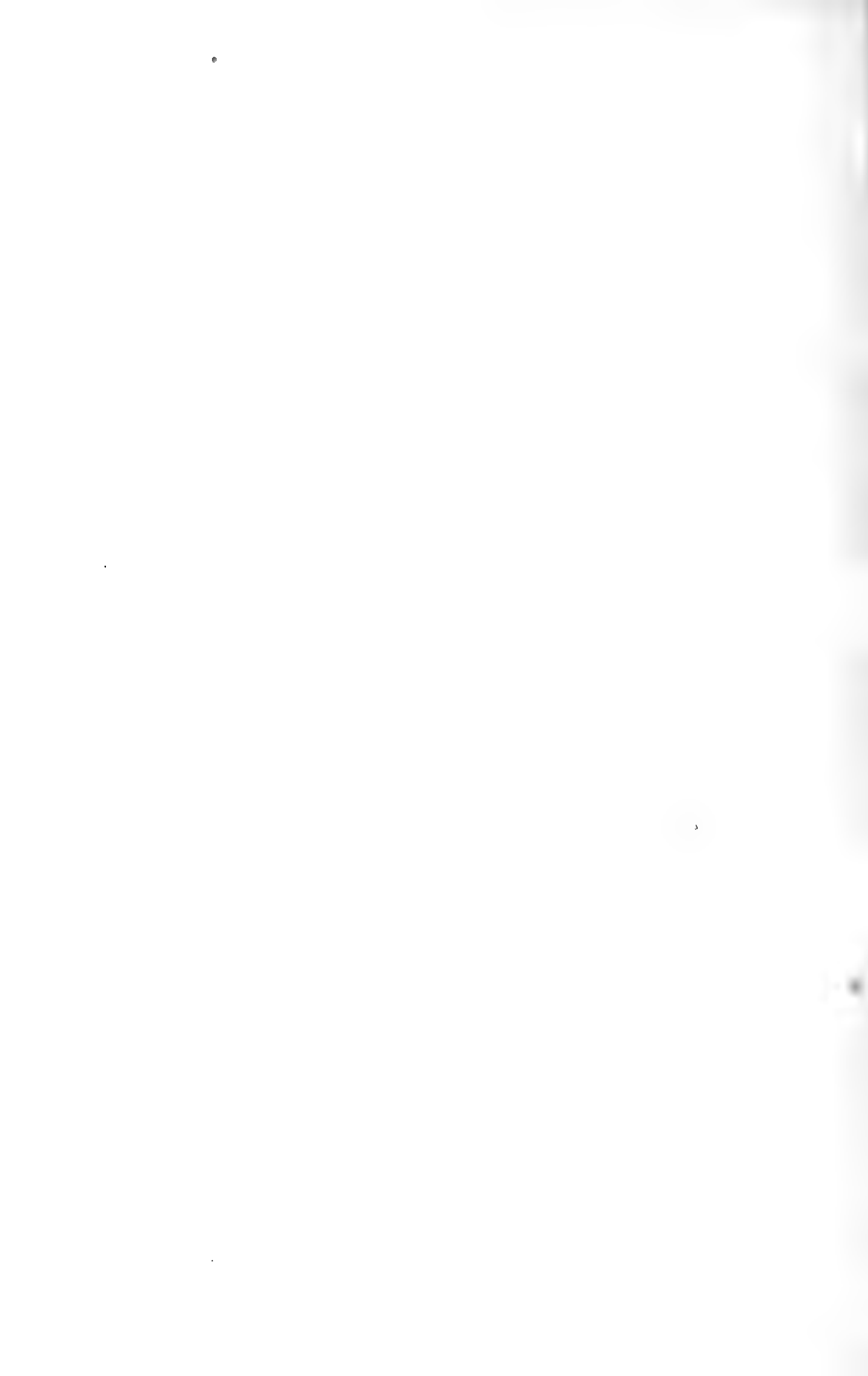
E R R A T A.

Bladz. 509 Tabel I te lezen als volgt:

TABEL I.

Aanwezig op	<i>o</i>	<i>m</i>	<i>p</i>
Cl = 1	nieuwe subst. treedt op		
Cl, Cl	4.2	4.2	—
Cl, Br	—	—	2
Cl, J	—	2 of 6	2
Cl, NO ₂	4.6	4	2
Cl, SO ₃ H	—	—	2
Cl, CH ₃	4.6	4.6	2,3
Cl, CO ₂ H	4.6	4.6.2	2
Cl, NH ₂	4.5	4.6	3
Cl, OH	3.5	4	3
Cl, CHO	4.6	4.6.2	2

Bladz. 513 regels 4 en 5 van onderen staat: (zie onderstaande Tabel III, 2). lees: (zie Tabel III, 2 op bladz. 519).



KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 29 Januari 1910.

Voorzitter (Waarn^d): de Heer D. J. KORTEWEG.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

Ingekomen stukken, p. 568.

E. REINDERS: „Over de rol van levende elementen in het hout bij den transpiratiestroom in boomen”. (Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en F. A. F. C. WEST), p. 568.

K. ZIELSTRA: „Bijdragen tot de kennis der waterbeweging in de planten”. (Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en F. A. F. C. WEST), p. 580.

M. W. BELJERINCK: „Viscosacharase, een enzym dat uit rietsuiker slijm voortbrengt”, p. 591. (Met één plaat).

M. W. BELJERINCK: „Over variabiliteit bij *Bacillus prodigiosus*”, p. 596.

F. M. JAEGER: „Studien over het Tellurium. I. Over het wederzijdsch gedrag der elementen zwavel en tellurium”. (Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 606.

P. ZEEMAN en B. WINAWER: „De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken”, (1ste Mededeeling), p. 621. (Met 3 platen).

H. J. BETH: „De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tuschen de trillingsgetallen”. (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 634. (Met één plaat).

H. A. LORENTZ: „Over de verstrooiing van het licht door moleculen”, p. 650.

H. E. J. G. DE BOIS en KŪRARŌ HONDA: „De thermomagnetische eigenschappen der elementen”, p. 666.

C. VAN WISSELLINGH: „Over het aantoonen van looistof in de levende plant en over hare physiologische beteekenis”. (Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en F. A. F. C. WEST), p. 673.

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 673.

Errata, p. 673.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1°. Bericht van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, HOOGWERFF, VOSMAER, DE BRUYN en WIND dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 22 Januari 1910, waarbij bericht wordt dat de Heer H. E. J. G. DU BOIS te Berlijn, oud-Hoogleraar aan de Rijks-Universiteit te Utrecht, benoemd is tot gedelegeerde der Regeering bij het van 13—15 September a. s. te Brussel te houden internationaal Congres voor Radiologie en Electriciteit. Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Missive van den Minister van Koloniën van 6 Januari 1910 waarin gevraagd wordt om afschriften te mogen ontvangen van 3 rapporten welke door den Duitschen Oberbergrat STEFFT in 1827 zijn uitgebracht over een mijnbouwkundig onderzoek van de eilanden Curaçao, Bonaire en Aruba.

Aan Z. Exc. is medegedeeld dat de Akademie de oorspronkelijke rapporten *niet* bezit, maar wel de afschriften daarvan, en dat deze ter beschikking van Z. Exc. zijn.

4°. Brief van den Rector en Senaat der Kön. Friedrich Wilhelm Universität te Berlijn, waarbij de Akademie wordt uitgenoodigd één afgevaardigde te zenden bij de herdenking van het 100-jarig bestaan dier inrichting op 10—13 October 1910. Dit schrijven zal voor afdoening in handen worden gesteld van de Letterkundige Afdeeling, daar deze op dien tijd de voorzittende Afdeeling is.

Plantenkunde. — De Heer MOLL doet eene mededeeling namens den Heer E. REINDERS : „*Over de rol van levende elementen in het hout bij den transpiratiestroom in boomen.*”

(Mede aangeboden door den Heer F. A. F. C. WENT).

Van de vele theorieën, die men heeft opgesteld om den transpiratiestroom in boomen te verklaren spelen de meeste tegenwoordig in de literatuur nog slechts een historische rol. De imbibitiethorie van SACHS ¹⁾; BÖHM's luchtdruktheorie ²⁾; de gasdruktheorie van HARTIG ³⁾; de opvattingen van WESTERMAIER ⁴⁾, die het houtparenchym als de waterbanen aanwees en de vaten voor reservoirs verklaarde; EWART's ⁵⁾ suppositie dat de levende elementen de weerstanden zouden helpen overwinnen; de cohaesietheorie van ASKENASY ⁶⁾, die verzuimde de continuïteit van het water op te nemen als *conditio sine qua non* — ze zijn alle verlaten. Daarentegen zijn over twee hypothesen de meeningen nog verdeeld en de aanhangers van beide

partijen bestrijden de opvattingen der tegenpartij op een merkwaardig heftige wijze. GODLEWSKI⁷⁾ en de zijnen staan de meening voor, dat men den transpiratiestroom niet kan verklaren, zonder de medewerking der levende houtelementen aan te nemen; DIXON en JOLY⁸⁾ daarentegen verdedigen de stelling, dat de levende elementen met het proces niets te maken hebben en er niets mee te maken kunnen hebben. Zij verklaren het verschijnsel, dat er water opstijgt tot in de toppen der hoogste boomen door aan te nemen, dat het water in die boomen, opgesloten in de nauwe waterbanen, als een draad hangt aan het oppervlak der bladcellen, waar het wordt vastgehouden door capillaire of andere physische werkingen. De draad breekt niet, doordat ze, naar ondersteld wordt, nergens met lucht in aanraking is, onder welke omstandigheden het water een spanning door uitrekking verdraagt tot 150 atmosferen toe. Verdampft het water boven aan de bladeren, dan wordt die draad door de weefsels heen omhooggesleurd.

Hoe scherp beide partijen tegenover elkaar staan, laat zich het best illustreeren door een paar citaten.

SCHWENDENER⁹⁾, die de meer physiologische theorie aanhangt zegt:

„An der Vorstellung, dass die Lebenstätigkeit der Zellen irgendwie in die Saftbewegung eingreift ist . . . unbedingt festzuhalten. Ohne dieses Eingreifen ist die Hebung des Wassers auf Höhen von 150-200 Füsse und darüber einfach unmöglich und alle Bemühungen, die vorhandenen Schranken mit unklaren physischen Annahmen zu durchbrechen, sind nicht viel mehr als ein Suchen nach dem Stein der Weisen.”

In hetzelfde jaar 1909 schrijft Dixon:¹⁰⁾

„The adhesion of writers to the vital hypothesis . . . is so remarkable that we must devote some space to examine fully the grounds for their contention”.

Als men tracht na te gaan hoe het komt, dat de meeningen zoozeer uiteenloopen, dan schijnt de oorzaak vooral te liggen in een verschillende appreciatie van eenige proeven en in het ietwat avontuurlijke, dat de Dixoniaansche verklaring op het eerste gezicht heeft. Aan de gedachte, dat het leven van onze boomen zou hangen aan een waterdraadje moet men gewennen voor men er vree bij kan hebben. GODLEWSKI¹¹⁾ had trouwens een nog heel wat avontuurlijker hypothese noodig om den anatomischen bouw van het hout te rijmen met de eigenschap, water te kunnen oppompen. Dit deel van zijn theorie wordt dan ook door niemand aanvaard waarom ik het verder ter zijde zal laten. In het vervolg zal dus met „de stelling van GODLEWSKI” bedoeld worden de opvatting, dat

het levende hout als oorzaak van den stroom moet worden aangenomen.

Om een oordeel over den stand van zaken te vergemakkelijken zal ik de gewichtigste argumenten, door beide partijen aangevoerd naast elkander plaatsen in een tabel en ze daarna paarsgewijs bespreken. Uit deze tabel zal ik alles weg laten wat de kwestie betreft, of de cohaesie van het water voor het werk berekend is, dat DIXON en JOLY haar opdragen. Ik wil aannemen, dat er, als ik het zoo mag noemen, technisch tegen hun theorie geen bezwaren bestaan en ik geloof dat men dat gerust mag doen.

GODLEWSKI c. s.

DIXON en JOLY.

1*a*. Er bestaat geen voldoende continuïteit der waterkolommen in het hout, om de cohaesie ter verklaring toe te laten ¹²).

1*b*. Aan de continuïteit der waterdraden behoeft niet te worden getwijfeld ¹³).

2*a*. De overblijvende beschikbare fysische krachten zijn onvoldoende om het water hooger dan 14 M. omhoog te voeren ¹⁴).

2*b*. STRASBURGER'S proeven, waarbij hij water liet opstijgen in vergiftigde boomen, bewijzen het tegendeel ¹⁵).

De cohaesietheorie beschikt over krachten, die een boom van 200 M. en meer nog wel van water zouden kunnen voorzien ¹⁶).

3*a*. URSPRUNG'S proeven, met takken, die over een bepaalde lengte gedood waren, waarna de bladeren verwelkten, bewijzen dat dood hout geen water genoeg vervoeren kan om de transpiratie te dekken ¹⁷).

3*b*. In URSPRUNG'S, proeven geraakten de banen verstopt en werden de bladeren vergiftigd doordat ze met een afkooksel van hout gedrenkt werden ¹⁸).

4*a*. De bouw van het hout pleit vóór de theorie van GODLEWSKI ²²).

4*b*. „The very structure of the wood offers the strongest evidence against GODLEWSKI'S theory” ¹⁹).

Levend hout biedt bij het doorpersen van water in beide richtingen evenveel weerstand ²⁰).

5*a*. Analogiebewijzen ²²⁾.5*b*. Analogiebewijzen ²¹⁾.

6*a*. De drukverdeeling in levende, transpireerende stammen strijdt tegen de cohaesietheorie ²³⁾.

6*b*. De drukmetingen worden onbetrouwbaar verklaard of genegeerd.

P u n t 1. De kwestie van „de continuïteit der waterdraden” in het hout komt op het volgende neer. De cohaesietheorie heeft noodig aan te nemen, dat er zich in de meeste vaten geen lucht bevindt, maar dat het water in den boom één samenhangende massa vormt van den wortel tot de bladeren. Elk houtvat waarin zich een luchtbel bevindt is volgens haar voor de watergeleiding onbruikbaar geworden, daar in zulk een vat het water niet onder negatieven druk kan staan; het wordt direct door de aangrenzende vaten leeggezogen. Elke luchtbel stelt dus één vat buiten gebruik.

Wanneer men nu kon aantoonen, dat verreweg de meeste vaten luchtbellens bevatten, dan zou er voor de watergeleiding slechts een gering percentage beschikbaar blijven, misschien zelfs zou hier en daar de vereischte samenhang van het water geheel worden verbroken, zoodat er van medewerking der cohaesie geen sprake kon zijn.

Nu is het natuurlijk moeilijk, de afwezigheid van lucht te constateeren, daar men bij de noodzakelijke voorbereidingen voor het onderzoek altijd de kans heeft, dat er op de een of andere wijze luchtbellens in de vaten geraken ²⁴⁾. Vindt men dus in de meerderheid van de vaten lucht dan is dit nog geen bewijs, dat het in de levende plant reeds aanwezig was, daar het bij de bewerking binnengedrongen kan zijn.

Voor het verdere verloop van mijn betoog maakt het echter weinig uit, of hier DIXON en JOLY gelijk hebben of de tegenpartij. Ik zal dus bij dit punt niet langer stilstaan.

P u n t 2. De stelling, dat physische krachten alleen onvoldoende zijn ²⁵⁾, om het water hooger dan 13 à 14 Meter omhoog te voeren is een zeer zwak punt in de verdediging van de hypothese van GODLEWSKI, daar STRASBURGER's giftproeven de onhoudbaarheid er van op de meest sprekende wijze aantoonen. Hij zag, dat in vergiftigde boomen het water nog tot in de hoogste toppen opsteeg, tot 22 Meter toe.

De pogingen van de aanhangers van GODLEWSKI om hun stelling tegenover dit feit te handhaven maken dan ook een zeer onbevredigenden indruk. Men valt STRASBURGER aan in vage termen ²⁶⁾, beschuldigt hem van weinig kritiek, verwijt hem, dat hij zelf geen pogingen doet tot verklaring; het feit zelf blijft bestaan.

Iets gewichtiger schijnt het volgende argument. Men zegt: ²⁷⁾ met behulp van een JAMINSche keten kan men zich wel voorstellen dat de luchtdruk het water omhoogperst tot 13 à 14 Meter, maar veertien is geen twee-en-twintig en bovendien is de JAMINSche keten onbruikbaar ter verklaring. Ze zou voor dit doel misschien met eenige kans op succes kunnen worden aangewend, wanneer de vaten van den wortel tot het blad in ééns doorliepen, zeker niet in een blaasjesstelsel als het hout is, daar de luchtbellens de tusschenschotten niet kunnen passeeren, om van de vele andere afdoende bezwaren niet te spreken.

Verder wordt tegen STRASBURGER aangevoerd, dat er samenhangende vloeistofdraden worden gevormd wanneer de afgezaagde stam in het water wordt gezet ²⁷⁾, maar het is in de eerste plaats niet duidelijk wat men daar dan eigenlijk mee wil tegenwerpen en in de tweede plaats is het moeilijk in te zien, hoe men zich die draden dan denkt te ontstaan. Het opgezogen water kan de aanwezige lucht niet verwijderen, daar deze opgesloten zit; het is bovendien met lucht verzadigd en zal eerder bellen afgeven dan opslorpen, zoodra het op grootere hoogte onder lageren druk komt te staan. Ook het afzagen kan bezwaarlijk anders dan vermeerderend op het luchtgehalte van den boom werken; voor de cohaesie levert de binnengedrongen lucht echter geen gevaar op, daar ze niet kan opstijgen.

Punt 3. URSPRUNG's proeven ¹⁷⁾ met takken, die over een bepaalde lengte met stoom gedood werden, waardoor de bladeren verwelkten, bewijzen voor GODLEWSKI ook niet veel. Door den stoom worden niet alleen de levende elementen gedood, er treden ook andere veranderingen op.

De vaten moeten een tijdlang een afkooksel van hout vervoeren inplaats van water, en het is waarschijnlijk dat daardoor de membranen of zelfs de vaatlumina meer of minder verstopt geraken, waardoor de weerstanden toenemen. Bovendien worden de bladcellen door dit vocht meer of minder vergiftigd, zoodat het zeer de vraag is of de ondergang der bladeren wel aan watergebrek mag worden toegeschreven ¹⁸⁾.

Voor de beslissing in onze kwestie hebben deze proeven dus niet veel te beteekenen.

Punt 4. De anatomische bouw van het hout pleit verder meer voor DIXON ¹⁹⁾ ²⁰⁾ dan voor GODLEWSKI, daar men zich voorloopig nog volstrekt geen voorstelling kan maken van de wijze, waarop de levende elementen eigenlijk met eenig succes zouden kunnen pompen. De eenzijdige weerstand, zonder welken men zich zulk een

werking moeilijk kan denken, is nooit geconstateerd, hoe zorgvuldig men er ook naar gezocht heeft.

Dit argument wordt dan ook niet altijd meer vóór GODLEWSKI aangevoerd.

Punt 5. Van analogiebewijzen is natuurlijk in kritieke gevallen niet veel meer te verwachten dan een illustratie. Ik zal er daarom hier niet op ingaan.

Wij zien derhalve dat de tot dusver aangevoerde argumenten weinig steun geven aan GODLEWSKI's theorie. Daarentegen pleit voor DIXON en JOLY het zoo demonstratieve en afdoende resultaat van STRASBERGER's vergiftproeven. Voegt men hierbij nog de groote overtuigende kracht, die er pleegt uit te gaan van goed voorgedragen analogiebewijzen (en hierin zijn DIXON en JOLY veel gelukkiger dan hun tegenstanders) dan kan men het zeer goed begrijpen, dat de cohaesietheorie talrijke aanhangers telt.

Er zijn echter 2 feiten, die met meer succes tegen haar worden aangevoerd.

In de eerste plaats een tweede proefreeks van URSPRUNG²³⁾, waarbij hij ijs gebruikte om een stuk tak onwerkzaam te maken inplaats van heet water of stoom. Deze proefreeks is natuurlijk vrij van de bezwaren, die de andere haar bewijskracht ontnamen. Maar het feit, dat het verwelken eerst na ettelijke dagen optreedt, maakt de resultaten minder overtuigend.

Gewichtiger is een ander bezwaar:

Punt 6. De drukverdeeling in levende boomen strijdt tegen de theorie.²³⁾

In een hangenden waterdraad neemt de drukking regelmatig af naarmate men hooger komt en wel minstens één atmosfeer per 10 Meter stijging. Bij levende, transpireerende boomen heeft men dit niet kunnen constateeren; integendeel bleek bij de proeven, dat manometers, op verschillende hoogten in een stam aangebracht, zich aan elkanders verloop volstrekt niet storen. Nu eens wijst de eene een lagere drukking aan, dan weer de andere.

Wel is waar laten zich tegen vele van deze drukmetingen bedenkingen aanvoeren, die haar waarde als beslissend argument sterk verminderen, maar enkele er van gaven naar het oordeel van SCHWENDENER positieve, onloochenbare bewijzen dat er van een regelmatig afnemen van den druk geen sprake is. In dit geval zou het immers ondenkbaar zijn, „dass ein Baumstamm, der nach 2—3 Regentagen durch Nachschub von unten etwas wasserreicher geworden, in mittlerer Höhe (wo vorher Saugen stattfand) Luft in das hier

angebrachte Manometer hineinpreszi, während oben in der Krone und insbesondere unten am Stamm weder Saugung noch Pressung stattfindet".²³⁾

Opmerkelijk is het, dat DIXON zoowel de ijsproeven van URSPRUNG als de drukmetingen geheel onvermeld laat in zijn overzicht van den stand der kwestie in den Progressus,²⁹⁾ hoewel hij heel wat minder belangrijke bezwaren daar in den breede bespreekt en weerlegt.

Zoo hebben wij dus de oorzaken nagegaan van het merkwaardige verschijnsel, waarvan ik in de inleiding sprak. De aanhangers van GODLEWSKI wijzen op de drukmetingen en beweren, dat STRASBURGER's proeven niet deugen, DIXON wijst op STRASBURGER en bekommert zich niet om de drukmetingen.

Men ziet, de toestand is tamelijk verward. En naar mijn overtuiging zal men hier langs theoretischen weg niet verder komen. Het eenige wat ons uit de verwarring kan helpen is het experiment.

En nu meen ik het afdoende, experimenteele bewijs te kunnen leveren, dat het normale, levende hout in staat is actief water te pompen.

Om dit bewijs te leveren ging ik uit van de volgende grondgedachte. Wanneer de grilligheid in de uitkomsten der drukmetingen inderdaad veroorzaakt wordt door een pompwerking in het levende hout, dan moet ze oogenblikkelijk verdwijnen, zoodra men de proefboomen dood maakt of verlamt. Dit nu bleek mij inderdaad het geval te zijn. Sterker nog: zoodra de stam dood was, volgden de drukverschillen denzelfden regel, die men bij een glazen buis verwachten zou. Zoodra de omstandigheden voor de verdamping ongunstiger werden, zooals tegen den avond en wanneer het begon te regenen, naderden de standen der manometers elkander meer en meer. Tegen den middag, als de zon scheen liepen ze daarentegen meer uit elkaar. Dit wordt begrijpelijk, als men bedenkt, dat een snellere verdamping een sterker stroom vereischt; voor een sterkeren stroom zijn echter ook grootere drukverschillen noodig om de grootere weerstanden te overwinnen.

Ik zal nu eerst de proeven iets uitvoeriger beschrijven. De curven van de manometerstanden hoop ik later te publiceeren, tegelijk met de resultaten van uitgebreider onderzoek over dit onderwerp.

Van een $\pm 2\frac{1}{2}$ M. hoog exemplaar van *Sorbus latifolia*, waarvan de stam zich even boven den grond verdeelde in 2 nagenoeg gelijke, krachtige takken werd de eene tak ongeschonden gelaten ter vergelijking; aan den anderen bracht ik boven elkaar eenige U-vormige, open kwikmanometers aan, en wel op de volgende wijze. Van den hoofdtak werden eenige zijtakken afgesneden, zóó, dat er van ieder

een stomp van 5 cM. lengte bleef zitten. Over dien stomp werd een buisje geschoven, waaraan later de manometer gehangen werd; dit buisje was in het midden tot een verwijding uitgeblazen en werd met een eindje gummieslang luchtdicht op den stomp bevestigd. Daarna werd het half met water gevuld en even luchtleedig gepompt om de aangesneden vaten te injecteeren. Dan liet ik het een half uur open staan en sloot het ten slotte af met de doorboorde gummie-stop, waarin de manometer stak. Eens per dag moesten de bolbuisjes worden bijgevuld, daar het hout altijd een beetje uit de intercellulairen lekt. De bast lekt nog meer, waarom ik die telkens verwijderde op de plaats waar het gummieslangetje zou komen.

Zoolang de boom leefde, was er in de standen der manometers en het verloop daarvan geen regelmaat te bespeuren: ze wezen alle een drukking aan, kleiner dan die der buitenlucht, maar nu eens „zoog” de eene meer, dan weer de andere. Na eenige dagen doodde ik dat deel van den tak, dat de manometers droeg, over zijn geheele lengte met behulp van stoom. Dadelijk volgden de manometerstanden den boven aangegeven regel om dien niet weer te verlaten. De drukverschillen werden tegen den middag zeer aanzienlijk, ten teeken, dat het doode deel een grooten weerstand bood aan den sterken stroom.

De kroon en de basis van den tak bleven bij de behandeling ongeschonden. Aan de bladeren kon men eerst na 3 weken bemerken, dat ze onder de bewerking geleden hadden; tot dien tijd toe bleven ze volkomen frisch. Toen ze eindelijk begonnen te veranderen maakten ze meer den indruk ziek te zijn, dan gebrek aan water te hebben.

Aan het stammetje van een *Cornus* werden 2 manometers aangebracht op nagenoeg gelijke takstoppen, 66 cM. boven elkaar. Het geheele boompje was 2 M. hoog. Voordat ik de takken afsneed, die de stoppen zouden leveren, doodde ik den stam op die beide plaatsen met stoom over een lengte van 10 à 12 cM. De manometers kwamen dus te zitten op doode takstoppen aan doode stamstukjes, gescheiden door een levend gedeelte.

Ik wenschte nu te onderzoeken, of het levende middenstuk ook pompte. Zoo ja, dan zou het dus steeds bezig zijn, het drukverschil tusschen de doode stukjes stam te verminderen. Als het dan opeens met ijs afgekoeld werd, zouden de manometers plotseling moeten uiteenwijken om elkaar weer te naderen, wanneer de boom aan zichzelf overgelaten werd. Werd het eindelijk gedood, dan moest de bekende regelmaat optreden.

De uitkomst was echter anders. Het middenstuk pompte blijkbaar

niet, want de manometers gedroegen zich precies als bij een dooden boom. Tegen den middag verschilden ze soms 24 c.M. kwik. Maar — op den vijfden dag veranderde hun verloop tamelijk plotseling en op den zesden was het even onberekenbaar geworden als bij levende boomen!

Blijkbaar had het middenstuk door de behandeling te veel geleden, om dadelijk te functionneeren, maar was het op den zesden dag zoover hersteld, dat het weer kon werken. Het heeft nog geleefd tot einde December, zooals men aan de volslagen frissche bast kon zien. Op het oogenblik, einde Januari, is het dood. De kroon ziet er echter nog gezond uit, ook de knoppen.

Hoewel deze feiten, voor zoover ik zie, geen andere interpretatie toelaten, dan die ik hier gegeven heb, zij hier nog een bewijs aangevoerd, dat men zulke verschijnselen niet aan een verandering van de weerstanden mag toeschrijven. Deze moest trouwens ook al van zeer merkwaardigen aard zijn, wilde men er voor de verklaring eenig nut van hebben.

Aan den stam van een Sering (*Syringa vulgaris*), 2 M. hoog werden 4 manometers aangebracht, van onderen naar boven gaande genummerd met 1, 2, 3 en 4. Na korten tijd wezen ze alle een ongeveer even sterke „zuiging” aan, die met dagelijkse perioden schommelde tusschen ongeveer 48 en 28 c.M. kwik. Hoewel weinig stond ook hier nu eens de eene hooger, dan weer de andere. Na 15 dagen, toen ik het verloop der drukeurven voldoende kende, werd stomp 2 gedood met het stukje stam waar hij aan zat. Dit gebeurde, door er gedurende een uur de slagen door te leiden van een RUMKORFF van 10 M. vonkenlengte, zonder vonkenbaan in den secundairen keten. Stomp en stamdeel werden hierbij verwarmd tot bijna 60° C.: een paar stukjes glaskit van dat smeltpunt, die ik er op bevestigd had, begonnen even te smelten.

Tijdens het doorvoeren van den inductiestroom nam door de verwarming de zuiging van stomp 2 eerst sterk af, de andere manometers bleven constant staan. Weldra hield het dalen van de kwikzuil in 2 op en vermeerderde de zuiging weer. Na het verbreken van den stroom steeg het kwik hooger dan gewoonlijk; deze abnormaal hooge zuiging bleef in het vervolg bestaan; 2 volgde later wel de perioden der andere manometers, die ongestoord hun gang gingen, maar zoog steeds opvallend veel sterker. Hoe we hieruit het bewijs kunnen putten, dat dit verschijnsel niet door de weerstandsveranderingen wordt veroorzaakt, zal ik dadelijk aangeven.

Tot zoover de beschrijving der proeven. Ik zal nu nagaan, wat er uit de resultaten kan worden geconcludeerd.

Het manometerverloop bij den *Sorbus* bewijst, dat de waterstroom in een levenden tak door geheel andere krachten wordt veroorzaakt dan in een dooden. Aan fouten in de meetmethode kan men het resultaat niet toeschrijven. De meeste van deze zijn vóór en na den dood gelijk en men mag niet onderstellen dat de omstandigheden, die door de bewerking worden gewijzigd juist zóó zouden veranderen, dat daardoor de waargenomen wettelijkheid voor den dag komt. En dan is het drukverloop vóór den dood alleen te verklaren door aan te nemen, dat er in het hout drukverhoogende factoren, pompwerkingen aanwezig zijn.

Een machtige steun ontvangt deze opvatting van een totaal andere zijde door de proeven van ZIJLSTRA³⁰⁾. Hij liet een oplossing van Säureviolet opstijgen in levende zoowel als in doode takken en onderzocht ze daarna onder het microscoop. In de levende waren alleen de tori der hofstippels gekleurd en een dun binnenlaagje van de wanden der vaten; in de doode daarentegen was de geheele houtmassa homogeen gekleurd. Hierdoor wordt het bewijs geleverd, dat de waterstroom in dood hout een geheel anderen weg neemt dan in het levende.

Het verschijnsel, dat bij de sering alleen die manometer invloed ondervond, die aan het door inductieslagen gedooide deel zat, kan m. i. ook niet anders verklaard worden dan met behulp van de theorie van GODLEWSKI. Stelt men zich voor, zooals DIXON en JOLY, dat de geheele stam zich als een doode buis gedraagt, dan kan men het verschijnsel niet verklaren. Weerstandsvermeerdering kan niet de oorzaak zijn, daar hiervan ook de andere manometers invloed hadden moeten ondervinden. Stelt men zich daarentegen een boomstam voor als een buizenstelsel, waarin zich overal pompjes bevinden, dan wordt het begrijpelijk. De dood van het stukje stam zet op die plaats de pompjes stil en er moet dan iets harder gezogen worden om het water door het doode stuk hout te krijgen. Aan de volgende manometers behoeft men dit echter niet te bemerken daar de tusschengelegen elementen den druk al weer op normale hoogte hebben kunnen brengen.

Ik beschouw al het voorgaande als positieve bewijzen, dat het levende hout hydromotorisch werkt. De proef met de *Cornus* bewijst dit al zeer demonstratief: men heeft als het ware voor zijn oogen kunnen zien, dat het zich herstellende middenstuk opeens begon te pompen.

Na aldus het positieve bewijs geleverd te hebben, dat het levende hout het water helpt omhoog voeren, zal ik de theoretische beschouwingen weer opvatten waarmede ik begonnen ben, en zien in hoe-

verre dit bewijs wijziging kan brengen in den stand van zaken.

Wij bevinden ons in de moeilijkheid, dat STRASBURGER's vergiftproeven bewijzen hoe de hulp van het leven niet noodig is, terwijl de eenige theorie, die van deze proeven geen bezwaren ondervindt door de drukmetingen onhoudbaar wordt gemaakt. De oplossing ligt na het voorgaande voor de hand.

De aanhangers van GODLEWSKI hebben ongelijk met te beweren, dat het water zonder hulp van het leven niet boven 14 Meter omhoog kan stijgen, daar STRASBURGER's proeven bewijzen dat dit wèl mogelijk is. Maar dat is ook de vraag niet. De zaak is eenvoudig deze, dat in een levenden boom het water door levende elementen omhooggepompt wordt, terwijl het in een dooden ook opstijgt, maar door andere oorzaken, bijv. met behulp van zijn cohaesie.

Toetsen we deze opvatting aan de gegevens in de tabel:

Punt 1, de continuïteitskwestie is alleen van belang voor de cohaesietheorie. Zoodra deze langs anderen weg onhoudbaar is gemaakt, mag men de vraag over de continuïteit van het water laten rusten tot ze misschien eens weer aan de orde komt in verband met nieuwe kwesties.

Punt 2. De vergiftproeven van STRASBURGER zijn in mijn stelling opgenomen.

Punt 3. Al mogen de proeven van URSPRUNG ook al niets zekers bewijzen vóór de theorie van GODLEWSKY, er tegen bewijzen ze zeker niets.

Punt 4. De anatomische bouw van het hout kan nooit worden aangevoerd als een feitelijk bezwaar tegen de hier voorgestelde opvatting. Zoodra het bewezen is dat levend hout pompt, kan dit feit natuurlijk niet verzwakt worden, doordat men zich uit zijn structuur niet dadelijk een voorstelling kan maken van de wijze, waarop het dit doet. Dit uit te vorscheen moet eenvoudig aan het verdere onderzoek overgelaten worden.

Punt 6, de drukverdeling is met de opvatting van GODLEWSKI volkomen in overeenstemming. Als men overal in den stam drukverhoogende factoren heeft, kan men van het drukverloop in dien stam niets voorspellen, zoolang niet die factoren zelf volledig bekend zijn.

We zien dus, dat de hier aangevoerde kwesties voor mijn opvatting geen bezwaren opleveren. In deze voorloopige mededeeling heb ik mij natuurlijk tot de hoofdzaken beperkt; later hoop ik hetzelfde onderwerp vollediger te behandelen.

De literatuur had ik misschien geheel kunnen weglaten, maar het kwam mij wenschelijk voor mijne citaten en dergelijke ten minste even te legaliseeren. De cijfertjes in den tekst verwijzen naar de literatuurlijst, die hierachter is afgedrukt.

Ik wil deze voorloopige mededeeling eindigen met er op te wijzen, dat de hier ingevoerde methode van onderzoek ook dienst kan doen bij de oplossing van andere kwesties. Zoo bijvoorbeeld kan men met haar hulp uitmaken, of de levende elementen ook meewerken, wanneer men een tak in omgekeerde richting water laat vervoeren; men kan den invloed onderzoeken dien allerlei prikkels (warmte, koude, electriciteit, prikkelende stoffen) op de werkzaamheid dier elementen mochten hebben. En als men de vergiftproeven van STRASBURGER herhaalt, maar aan de proefboomen manometers aanbrengt, worden ze opeens een afdoend bewijs voor GODLEWSKI. Men kan hiertoe echter met een klein boompje volstaan.

Voorals de methode, waarbij een levend stuk tak wordt geïsoleerd tusschen twee doode gedeelten is zeer aanbevelenswaardig. Men zorge er echter voor, de plaatsen, die men wil dooden niet hooger dan $\pm 60^\circ$ te verhitten, om het middenstuk te sparen. (verg. de proef met den inductiestroom). Zoo mogelijk late men een bebladerden tak aan het middenstuk zitten, daar het anders spoedig moet verhongeren.

Groningen, 28 Januari 1910.

LITERATUURLIJST.

- ¹⁾ SACUS, Ein Beitrag zur Kenntniss d. aufsteig. Saftstromes in transpirirenden Pflanzen. Arb. des Bot. Inst. in Würzburg, Bd. II. 1882; F. ELEVING, Ueber die Wasserleitung im Holz. Bot. Ztg. 1882 p. 706; J. VESQUE, Ann. d. Scienc. Nat. Bot. Sér. VI, 19, 1884, p. 188; J. BÖHM, Publicaties vóór 1884. ²⁾ J. BÖHM, Ueber die Ursache der Wasserbewegung, etc. Bot. Ztg. 1881. E. GODLEWSKI, Zur Theorie der Wasserbewegung in den Pflanzen. Pringsh. Jahrb. Bd. XV, Heft 4 1884. ³⁾ R. HARTIG, Die Gasdrucktheorie Berlin 1883. E. GODLEWSKI l. c. sub. 2), ⁴⁾ WESTERMAIER, Zur kenntn. d. osmot. Saug. d. lebenden Parenchyms. B. d. Deutsch. Bot. Ges. 1883; idem, Ueber die Wanderung d. Wassers im leb. Parench. Sitzber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1884; DIXON, Transpiration and the Ascent of Sap. Progressus Rei Botanicae, Bd. III, Heft I. 1909. ⁵⁾ A. J. EWART, The Ascent of Water in Trees, Phil. Trans. Roy. Soc. Londen, Ser. B, Vol. 198, 1905 en Ser. B, Vol. 199, 1908. ⁶⁾ ASKENASY, Ueber das Saftsteigen Verh. d. Nat. Med. Ver. zu Heidelberg. N. F. Bd. V. 1895; DIXON, l. c. sub. 4), p. 65. ⁷⁾ GODLEWSKI, l. c. sub. 2). ⁸⁾ DIXON and JOLY, On the Ascent of Sap. Proc. Roy. Soc. Lond. Vol. 57 (1894) B. p. 3, DIXON l. c. sub. 4), p. 31 en volgend. ⁹⁾ HOLTERMANN, SCHWENDENER'S, Vorles. 26 Mech. Probleme d. Botanik. Leipz. 1909, p. 80. ¹⁰⁾ DIXON, l. c. sub. 4), p. 16. ¹¹⁾ GODLEWSKI, l. c. sub. 3), ¹²⁾ HOLTERMANN, l. c. sub. 9, p. 79. ¹³⁾ DIXON, l. c. sub. 4), p. 43 -46. ¹⁴⁾ HOLTERMANN, l. c. sub. 9),

p. 80. ¹⁵⁾ DIXON, l. c. sub. 4) p. 15. ¹⁶⁾ idem, p. 60 en elders. ¹⁷⁾ HOLTERMANN, l. c. sub 9), p. 80. URSPRUNG, Die Beteiligung lebender Zellen am Saftsteigen, Pringsh. Jahrb. 1906. JANSE, Die Mitwirk der Markstrahlen bei d. Wasserbew. im Holze, Pringsh. Jahrb. 1887. ¹⁸⁾ DIXON, l. c. sub 4), pag. 19. ¹⁹⁾ idem, p. 16. ²⁰⁾ JANSE, l. c. sub 17); DIXON, l. c. s. 4) p. 16. ²¹⁾ idem p. 46, 47, 49, 50, 51, 56, en elders. ²²⁾ GODLEWSKI, l. c. sub 3, p. 605 en 598. ²³⁾ HOLTERMANN, l. c. sub 9), p. 66 en 67. ²⁴⁾ DIXON, l. c. sub 4), p. 45. ²⁵⁾ HOLTERMANN, l. c. sub 9, p. 80. ²⁶⁾ PFEFFER, geciteerd in idem, p. 78. ²⁷⁾ idem, p. 79. ²⁸⁾ URSPRUNG, die Beteiligung lebender Zellen am Saftsteigen. Pringsh. Jahrb. 1906. ²⁹⁾ DIXON, l. c. sub 4). ³⁰⁾ ZIJLSTRA, Bijdragen tot de kennis der waterbeweging in de planten, Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. Nat. Afd. Jan. 1910.

Plantenkunde. — De Heer MOLL biedt eene mededeeling aan van
Dr. K. ZIJLSTRA: „*Bijdragen tot de kennis der waterbeweging
in de planten.*”

(Mede aangeboden door den Heer F. A. F. C. WENT).

Een tijd lang heb ik mij in het Botanies Laboratorium te Groningen bezig gehouden met het vraagstuk der waterbeweging bij de planten, en daaromtrent proeven gedaan van nogal uiteenlopende aard. Door verschillende omstandigheden werd ik echter verhinderd, mij voorlopig verder in die richting te bewegen, zodat de proeven geen afgerond geheel vormen. Ik was dan ook niet van plan, ze mede te delen; maar nu ik binnen afzienbaren tijd niet weer in de gelegenheid ben, die studie voort te zetten, meen ik het door mij verzameld feitenmateriaal wel te mogen publiceren; mogelijkerwijs kan ik hiermee andere onderzoekers, die de waterbeweging in de planten tot voorwerp van studie hebben gekozen, van dienst zijn.

De proeven, waarvan hier sprake is, kunnen in 3 rubrieken worden ingedeeld, n.l.

1°. Stam of stengel van intakte planten tot ongeveer 0° C. afgekoeld.

2°. Opstijging van een kleurstofoplossing in afgesneden takken.

3°. Belemmering van de waterbeweging in een boomstam door diepe insnijdingen.

Achtereenvolgens zal ik over de aanleiding tot deze proeven en de resultaten ervan een en ander medelen, om daarna de uitvoering der proeven afzonderlijk uitvoeriger te beschrijven.

1°. *Stam of stengel van intakte planten tot ongeveer 0° C. afgekoeld.*

Zoals bekend is, zoekt GODLEWSKI (Zur Theorie der Wasserbewegung in den Pflanzen. Jahrb. f. Wiss. Bot. Bd. 15) de oorzaak der

waterbeweging in de werkzaamheid der levende mergstraal- en houtparenchymcellen; deze cellen zouden dan als het ware als zuig-pers-pompen dienst moeten doen. Door GODLEWSKI zelf zijn echter geen direkte proeven uitgevoerd, die zijn theorie zouden kunnen steunen. Alleen op grond van verschillende, elders verzamelde gegevens wordt zijn theorie plausibel gemaakt, en wordt betoogd, dat ze niet in strijd is met door andere onderzoekers aangebrachte feiten. Van verschillende zijden zijn later (JANSE, STRASBURGER, WEBER, URSPRUNG) pogingen aangewend, om deze theorie proefondervindelijk te toetsen.

De meest voor de hand liggende methode daarvoor was wel deze: om de werking der levende cellen van mergstralen en houtparenchym uit te schakelen, om dan na te gaan of de waterbeweging daardoor onmogelijk werd.

Dit buiten spel brengen van de werkzaamheid der levende cellen werd het gemakkelijkst bereikt door die cellen eenvoudig te doden door giftige stoffen of door hoge temperatuur.

Deze methode is echter zeer bedenkelijk; door die bewerking toch treft men niet alleen de elementen, die men buiten werking wil stellen; ook andere, voornamelijk de watervervoerende vaten en tracheïden, zullen zonder twijfel daardoor veranderingen ondergaan, zodat het gewaagd is, de resultaten dier proeven alleen op rekening van het opheffen van de werkzaamheid der levende cellen te schuiven.

Eene ook reeds door URSPRUNG, maar met tegengestelde uitkomst beproefde methode, die aan genoemd bezwaar tegemoet komt, is afkoeling van de stam of stengel der plant tot ongeveer 0°. Daardoor is het mogelijk, de werkzaamheid der levende cellen van het afgekoeld gedeelte tot een minimum terug te brengen, terwijl noch de levende, noch de dode elementen verder enige blijvende verandering ondergaan. Bovendien is ook dit voordeel niet te onderschatten, dat men na de proef de vroegere toestand weer herstellen kan, dus de plant weer in de normale toestand kan terugbrengen. Men kan dus de proef en de contrôleproef met dezelfde ongeschonden plant uitvoeren.

Indien men door deze behandeling gedaan kon krijgen, dat de plant verwelkte, terwijl ze na het staken van de afkoeling weer fris werd, zou de theorie van GODLEWSKI een aanmerkelijke steun gekregen hebben.

Volgens deze methode nu heb ik 3 proeven gedaan. De stam van een appelboompje, 2 stengels van *Polygonum cuspidatum* en 2 stengels van *Helianthus tuberosus* werden over een lengte van 50 cM. tot ongeveer 0° C. afgekoeld. De proeven duurden 6, 7 en 8 dagen, onder omstandigheden, die zeer gunstig waren voor een eventueel verwelken.

Toch heb ik in geen enkel geval ook maar een begin van ver-

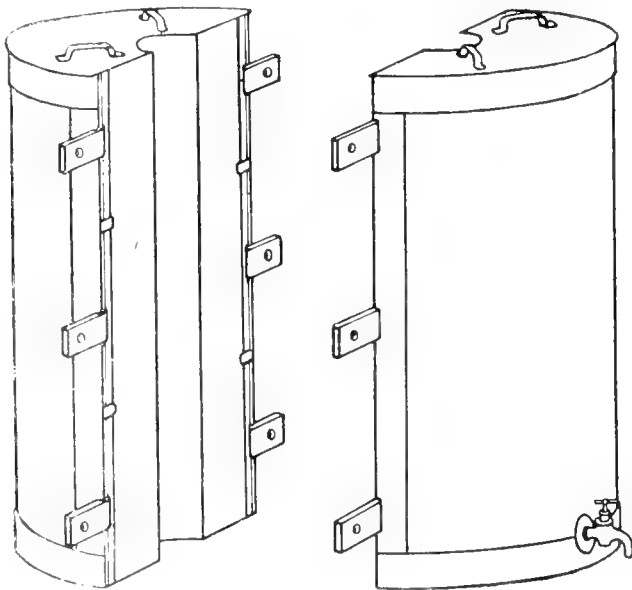
welken kunnen constateren, hoewel de verdamping uit de bladen sterk was, zoals een cobaltproef aantoonde. Afgesneden, bebladerde takken, bij de plant opgehangen, verwelkten zeer snel.

Uit het negatief resultaat dezer proeven mag echter niet geconcludeerd worden, dat de mergstraal- en houtparenchymcellen geen rol spelen bij de waterbeweging. Het is toch zeer goed mogelijk, zelfs waarschijnlijk, dat 50 cM. afkoeling niet voldoende was. Deze geringe hinderpaal werd misschien wel overwonnen door drukverschillen in de stammen aanwezig. In het geval van een positief resultaat zou de proef een steun geleverd hebben voor de theorie van GODLEWSKI. Mijn negatieve resultaten echter zijn niet in staat, aan die theorie eenige afbreuk te doen.

Niettegenstaande deze uitkomsten meen ik toch, dat het zijn nut heeft, dat anderen er kennis van kunnen nemen.

Beschrijving der proeven.

De afkoeling van stam of stengel werd tot stand gebracht door smeltend ijs, dat zich in een toestel bevond, op de volgende manier samengesteld, zooals de figuur aangeeft.



De toestel bestond uit 2 gelijke delen, n.l. uit 2 halfcylindervormige blikken reservoirs, met vaste bodem en los deksel. De beide halve cylindervormige hadden in het midden van de platte zijde een gedeelte, dat halfcylindervormig gebogen was, zodat de twee reservoirs, wan-

neer ze tot één cylinder verenigd werden, in 't midden een ruimte vrijlieten ter doorlating van de stam, die afgekoeld moest worden. De hoogte van de toestel bedroeg 50 cM., de middellijn 30 cM.; de ruimte, vrijgelaten voor de stam, had een middellijn van 10 cM. Elk reservoir was aan de buitenzijde onderaan voorzien van een kraan, waarmee overtollig water afgetapt kon worden. De cilindriese zijde van elk reservoir, als ook de bodem en deksel waren van buiten bekleed met een 15 mM. dikke viltlaag, waaroverheen nog een bekleding van 2 mM. dik, wit asbestpapier. De beide reservoirs werden bij de proef om de stam gezet en aaneengeschroefd, nadat tussen de tegen elkaar komende vlakke zijden een stuk vilt gelegd was.

De reservoirs werden met ijs gevuld. De ruimte, die tot opnemng van de stam diende, werd van onderen en boven rondom de stam gesloten met een stevige watteprop, waardoor heen een thermometer. De temperatuur in deze luchtruimte om de stam schommelde tussen 0° en $+3^{\circ}$ C.

De toestel was door het vilt en asbest voldoende beschut tegen opnemng van de warmte der omgeving. Zelfs op hete dagen behoeftde het ijs slechts tweemaal in de 24 uur aangevuld te worden.

Bij de proef rustte de toestel op eenige bakstenen, zodat hij met de bodem ongeveer 20 cM. van de grond verwijderd bleef.

PROEF I.

Appelboompje.

Om de $3\frac{1}{2}$ cM dikke stam van een appelboompje van ongeveer $2\frac{1}{4}$ M. hoogte werd op 21 Juli 1904, 's middags 12 uur, bij heet, zonnig weer, de ijstoestel bevestigd en met ijs gevuld. In de loop van de namiddag daalde de temperatuur in de ruimte om de stam tot ongeveer 1° C, zonder dat in het minst enig verwelken van de bladen te bespeuren was, ofschoon een begin van verwelken direkt moest zijn opgevallen, bij vergelijking met 2 andere appelboompjes, die naast de proefboom stonden.

Ook de volgende dagen was er geen verandering te zien. De temperatuur der luchtruimte om de stam bleef voortdurend tussen 0° en 3° .

De maximale temperatuur der omgeving op de verschillende dagen gedurende de proef schommelde tussen 23° en 29° .

Op de zesde dag, terwijl de temperatuur der omgeving 20° en die om de stam in de cylinder 0° was, werd door middel van de kobaltproef geconstateerd, dat de bladen levendig transpireerden. Op de zevende dag werd de stam, onmiddellijk boven de ijstoestel afgezaagd;

in het stamstuk, dat zich nog in de cylinder bevond, werd een gat geboord, waarin een thermometer geplaatst werd.

Ik constateerde, dat de temperatuur *in de stam* gelijk was aan die in de luchtcylinder *rondom de stam*, n.l. binnen 3 uur schommelend tussen 2° en 3°, terwijl de temperatuur der omgeving 24° à 25° bedroeg. Daarna werd de proef gestaakt.

PROEF II.

Polygonum cuspidatum.

Om 2 onmiddellik naast elkaar staande stengels van 2 M. hoogte werd op 6 Julie 1905, 12 uur 's middags, de ijstoestel bevestigd en met ijs gevuld. In de loop van de namiddag daalde de temperatuur in de luchtruimte om de stengels tot 0° C, zonder dat verwelking intrad. Tot vergelijking dienden de vele stengels, die de toestel omringden. Ook gedurende de volgende dagen trad er geen verandering in.

De temperatuur om de stengels bleef voortdurend tussen 0° en 3°. De maximale temperatuur der omgeving op de verschillende dagen gedurende de proef schommelde tussen 19° en 30°. Op de zevende dag werd de proef gestaakt.

PROEF III.

Helianthus tuberosus.

Om twee onmiddellik naast elkaar staande stengels van 1¹/₄ M. hoge planten werd op 14 Julie 1905, 12 uur 's middags, de ijstoestel bevestigd en met ijs gevuld. In de loop van de namiddag daalde de temperatuur in de luchtruimte om de stengels tot 0°. Geen verwelking te bespeuren; ter vergelijking dienden verscheidene, naast de proefplanten staande exemplaren van dezelfde soort. Afgesneden bladen, aan de planten opgehangen, waren in een paar uren totaal verwelkt. Ook de volgende dagen werd geen verwelking der proefplanten waargenomen.

De temperatuur in de luchtruimte om de stengels bleef ongeveer 0°. De maximale temperatuur der omgeving op de verschillende dagen gedurende de proef schommelde tussen 17° en 26¹/₂°.

Op de achtste dag werd de proef gestaakt.

2°. *Opstijging van een kleurstofoplossing in levende en dode afgesneden takken.*

Wanneer men afgesneden takken, van een vers sneevlak voorzien, met dat sneevlak in een kleurstofoplossing zet, zal in 't algemeen de

vloeistof een eindweegs in de takken opstijgen, wat gemakkelijk te controleren is, wanneer men deze later op verschillende hoogte doorsnijdt. Verschillende elementen van het hout blijken dan kleurstof opgenomen te hebben. Het doet weinig ter zake, of men voor deze proef levende of dode, bebladerde of ontbladerde takjes bezigt; steeds stijgt het vocht in de takken op, ook zelfs indien deze omgekeerd zijn, d.w.z. met hun van een sneevlak voorziene top in de oplossing staan. Ik heb dergelijke proeven meestal gedaan met takjes van 30 à 40 cM. lengte; soms met takstompjes, die ook van boven een sneevlak hadden. Na eenige dagen vertoonde zich de kleurstof bij de laatstgenoemde in het bovenste sneevlak.

Stijgt ook in alle takken steeds de kleurstof op, de wijze van kleur-*ring* der verschillende elementen is niet dezelfde in levende en dode takjes. Er is integendeel een scherp verschil te constateren.

Bij vergelijking van het gedrag van levende takken tegenover dode, moest natuurlijk gebruik worden gemaakt van een onschadelijke kleurstof; naar aanleiding van STRACKE, Onderzoekingen over de immuniteit van hogere planten voor haar eigen vergift (Dissertatie) viel mijn keuze op *Säureviolett* van GRÜBLER. Van deze kleurstof gebruikte ik een waterige oplossing van $\frac{1}{10}$ ‰. De takjes werden elk afzonderlijk in een klein flesje met de kleurstofoplossing gezet en de hals van het flesje met een wattepropje gesloten om de verdamping van de oplossing te beletten.

Na de proef werden de takjes in mikroskopiese doorsneden op verschillende hoogte onderzocht. Dwarse, radiale en tangentiale doorsneden werden onderzocht in *nagelolie*, een medium, waarin het Säureviolett niet oplost, zodat deze kleurstof zuiver gelocaliseerd bleef. De coupes werden zonder toevoeging van enige vloeistof gesneden en vers in de nagelolie gelegd. Het geringe watergehalte dezer preparaten was niet hinderlijk. Na zeer korte tijd drong de olie goed overal door. Bovendien had deze methode nog het voordeel, dat, na wegvegen van de meeste nagelolie, de preparaten zich zonder verdere behandeling uitstekend lieten insluiten in canadabalsem.

De vergelijking van het gedrag van de xylemelementen der levende met dat in gedode takjes bracht nu het volgende aan het licht:

levende tak	dode tak
a. <i>torus</i> van de sluitvliezen der hofstippels zeer sterk gekleurd.	a. <i>torus</i> ongekleurd of hoogstens uiterst zwak gekleurd.
b. een dun, aan het lumen grenzend laagje van de wand in de hof der stippels gekleurd.	b. wanden der vaten, vezels en parenchymcellen homogeen gekleurd.

De wand van vaten en vezels
alleen gekleurd in een zeer dun
laagje, dat onmiddellijk aan het
lumen grenst.

- c. inhoud en wand der merg- c. inhoud der cellen gekleurd.
straal- en houtparenchymcellen
ongekleurd.

De sterke kleuring der *tori* in de levende takken was vooral zeer opvallend, ook in dwarse doorsneden, temeer nog, omdat de kleuring van het aan 't lumen grenzend laagje van de vaat- en vezelwand vaak moeilijk te zien was en de levende mergstraal- en houtparenchymcellen geheel kleurloos waren.

In het hout van *Salix* en *Fagus*, waar de *tori* anders in 't geheel niet te zien waren, kwamen ze door deze kleuring in de levende takjes met grote duidelijkheid te voorschijn.

De kleuring van de *tori* door eosine in een levende tak van *Ginkgo* wordt reeds door JANSE vermeld in „Die Mitwirkung der Markstrahlen bei der Wasserbewegung im Holze” (Jahrb. f. Wiss. Bot. 1887 Bd XVIII). Ook daar was de kleurstof in de tak opgestegen: de „*primäre Wandlamelle*” der mergstraalcellen was volgens JANSE het enige, wat zich gekleurd had.

Ook bij mijn proeven met levende takken kleurden zich, evenals de *tori* der vaten en vezels, ook die van de *halve* hofstippels tussen mergstraalcellen enerzijds en de vaten en vezels anderzijds; de *inhoud* der mergstraalcellen bleef echter, zooals boven reeds vermeld is, ongekleurd.

Met deze feiten stemmen de resultaten van andere, door mij gedane proeven goed overeen. In plaats van dode takken te nemen, liet ik namelijk ook in levende een oplossing van $\frac{1}{10}$ ‰ Säureviolett in sterke alcohol, zomede een oplossing van $\frac{1}{10}$ ‰ Säureviolett in water, dat $\frac{1}{2}$ ‰ formaldehyd bevatte, opstijgen. Ter vergelijking stonden er levende takken naast in een oplossing van $\frac{1}{10}$ ‰ Säureviolett in water.

Het bleek nu, dat de levende takken in de giftige oplossingen zich nagenoeg kleurden als de dode takken in de onschadelijke oplossing; echter niet zo volledig. Het was duidelijk, dat de alcohol en het formaldehyd eerst langzamerhand hun dodelijke werking op de plant uitoefenden. De *tori* waren steeds ongekleurd; slechts enkele ternauwernood gekleurd. De wanden vertoonden meestal een gelijkmatige kleuring; de mergstraal- en parenchymcellen met donkerblauw gekleurde inhoud.

Ten slotte kan ik hier nog aan toevoegen, dat microscopische

dwarse doorsneden, door levende takjes gemaakt, en daarna 20 mm lang in een waterige Säureviolett-oplossing van $\frac{1}{100}$ ‰ gelegd, geheel homogeen donkerblauw waren, volkomen op dezelfde wijze gekleurd als die doorsneden, welke na opstijging der kleurstof in *dode* takjes werden onderzocht; slechts was de kleur wat intensiever. De dwarse doorsneden door contrôletakjes, die vooraf in levende toestand gedurende 4 dagen in dezelfde oplossing hadden gestaan, vertoonden daarentegen, gelijk te verwachten was, een kleuring geheel zooals die boven voor levende takjes beschreven is.

Beschrijving der proeven.

PROEF IV.

Fagus sylvatica.

Een levend, bebladerd takje, van onderen 4 mM. dik, stond 9 dagen in de Säureviolett-oplossing. De kleurstof steeg tot in de top en in de bladeren. Schors, cambium en merg bleven totaal ongekleurd; de kleuring alleen tot het hout beperkt, en hier alleen kleurstof tegen de binnenlaag (aan 't lumen grenzend) der wanden van de vaten en vezels; de tori der hofstippels zeer sterk gekleurd, diep blauw-violet, ook in de halve hofstippels tussen mergstraalcellen en vaten of vezels. Mergstralen en houtparenchym volkomen ongekleurd, zowel wand als inhoud.

PROEF V.

Larix decidua.

Een levend, bebladerd takje, van onderen 6 mM. dik, stond 5 dagen lang in de oplossing, waarna de kleurstof tot in de top gestegen was. De kleuring alleen tot het hout beperkt; in de oudste der 6 jaarringen echter geen kleuring.

Kleurstof alleen opgenomen door een zeer dun laagje van de wand, grenzend aan het lumen der tracheïden en der hoven van de stippels. Torus der stippels diep blauw-violet, ook bij de halve hofstippels tussen mergstralen en tracheïden. Overigens alles ongekleurd.

PROEF VI.

Salix spec.

Twee levende, onbebladerde takjes, aan beide einden van een sneevlak voorzien, beide 30 cM. lang en ruim $\frac{1}{2}$ cM. dik, stonden

2 dagen in de waterige Säureviolett-oplossing; het eene takje met het onderste, het andere met het bovenste sneevlak in de vloeistof.

De kleurstof steeg gemakkelijk op, en wel *in beide takjes gelijk*. Alleen kleurstof in een dun wandlaagje grenzend aan het lumen der vaten en vezels en der hoven van de stippels. Tori sterk blauw-violet.

PROEF VII.

Fagus sibirica. Taurus baccata.

Van elk dezer planten werden twee gelijke 3- à 5-jarige, onbebladerde takjes met het sneevlak in de waterige Säureviolett-oplossing gezet gedurende 3 dagen. Het ene takje van elke plant was levend, het andere op de volgende wijze behandeld. Het had 1½ uur lang in kokend water gestaan. Daarna was door het gekookte takje door middel van een waterstraalluchtpomp water gezogen, om mogelijke verstoppingen te verwijderen; en ten slotte was er een nieuw sneevlak aan gemaakt.

Na 3 dagen was in alie 4 takjes de kleurstof bijna tot aan de top gestegen.

In de levende takjes was tegen de wanden der vaten en tracheïden aan nauweliks een kleuring zichtbaar. De tori, ook die der halve hofstippels, zeer sterk gekleurd. Mergstraal- en parenchymcellen geheel kleurloos.

In het gekookte takje van *Fagus* de wanden der libriform-vezels en der vaten egaal lichtblauw. Tegen de wanden der vaten in het voorjaarshout een donkerder laagje. Nergens echter gekleurde tori.

De mergstralen bleken ook ongekleurd.

In het gekookte takje van *Taurus* de wanden van vele tracheïden zwak, egaal gekleurd; binnen tegen de wanden een donkerder laagje. De tori ongekleurd. De mergstralen donkerblauw.

PROEF VIII.

Taurus baccata.

Twee levende takjes werden genomen. Het ene werd met het sneevlak in een oplossing gezet van $\frac{1}{10}$ gram Säureviolett in 100 cM³ water; het andere in een oplossing van $\frac{1}{10}$ gram Säureviolett in 100 cM³ alkohol.

Beide takjes bleven er 43 uur in staan, waarna door beide op een hoogte van 7 cM. doorsneden werden gemaakt. De kleuring was als volgt:

Takje in *waterige oplossing*: Alleen kleuring in 't secundair xyleem. Een zeer dun blauw laagje tegen de wand der tracheiden, en van de hoven der hofstippels. Tori donkerblauw, ook die der halve hofstippels. Mergstralen ongekleurd.

Takje in *alkoholische oplossing*: Ook kleurstof in cambium en binnenste lagen van het schorsparenchym doorgedrongen, waar zowel wanden als inhoud donkerblauw waren. In het secundair xyleem de tracheidenwanden lichtblauw; tegen de wanden aan ook duidelijk een blauw laagje, ook in de hoven der stippels. Tori ongekleurd, Mergstralen donkerblauw, zowel wand als inhoud.

Ook in het primair xyleem de wanden gekleurd.

PROEF IX.

Taxus baccata.

Een levend takje werd met het sneevlak gezet in een oplossing van $\frac{1}{10}$ gram Säureviolett in een $\frac{4}{100}$ formaldehydoplossing (verdunde formaline).

Na 3 dagen werd het takje onderzocht; de kleurstof had de top reeds bereikt.

Kleuring alleen in het secundair xyleem. Tegen de wanden der tracheiden een dun blauw laagje, ook in de hoven der hofstippels. Tori ongekleurd. Van de mergstralen zowel wand als protoplasma donkerblauw.

PROEF X.

Salix spec.

Een levend takje met het sneevlak gezet in een oplossing van $\frac{1}{10}$ gram Säureviolett in een $\frac{4}{100}$ formaldehydoplossing. Na 3 dagen was de kleurstof tot aan de top gestegen en werd het takje onderzocht.

Kleuring alleen in het secundair xyleem. De wanden der vaten lichtblauw gekleurd met een aanduiding van een iets donkerder laagje, aan het lumen grenzend. Tori nagenoeg kleurloos. De mergstraalcellen, die tegen de vaten aanlagen, blauw gekleurd.

3°. *Belemmering van de waterbeweging in een boomstam, door diepe insnijdingen.*

PROEF XI.

Een proef met een wilgeboompje, dat in de Hortus Botanicus te Groningen stond, leerde, dat in een stam, waarin door van weers-

zijden op verschillende hoogte aangebrachte dwarse insnijdingen, de transpiratiestroom in hooge mate belemmerd of misschien zelfs afgesneden is, na verloop van tijd maatregelen worden genomen, die ten slotte tot een volledig herstel van dezen stroom voeren.

De proef werd op de volgende wijze uitgevoerd.

De 11½ cM. dikke stam van het boompje werd op vier plaatsen tot even over de helft der dikte dwars ingezaagd en wel afwisselend aan weerszijden van de stam. De insnijdingen bevonden zich op onderlinge afstanden van 22 cM., de onderste op 1.25 M. van den bodem. Zij werden verhinderd zich weer te sluiten, doordat er blikken plaatjes in gestoken werden, die er ook in 't vervolg in bleven zitten. Op deze 4 plaatsen was dus de waterstroom onherstelbaar afgebroken.

Daar de stam door deze bewerking natuurlijk zeer verzwakt was, werd de boom gesteund door vier ijzerdraden, hoog aan de stam en aan vier op enige afstand, rondom de boom, in de grond geslagen paaltjes bevestigd.

Deze proef begon op 14 Juli 1908; 's morgens te half tien waren de insnijdingen gereed en de plaatjes er in geschoven. Reeds om 10 uur waren alle bladeren slap en bleven dit ook de gehele dag.

Gedurende de vijf volgende dagen, bij koel en droog weer, herstelden zich de bladen langzamerhand. Op de 7^e dag van de proef begon echter het loof van boven af te verdorren; door de gehele kroon vertoonden zich nu ook vele gele bladen. In al deze dagen was de temperatuur niet boven 18° C. gestegen in de omgeving van de boom. De 9^e dag steeg de temperatuur 's namiddags tot ruim 26° en waarschijnlijk tengevolge hiervan nam het aantal geelgeworden bladen nu ook snel toe. Ook hingen de nog groen geblevene weer slap neer. De toppen der takjes, boven in de kroon verdorren geheel.

De 3 volgende dagen waren warm en zonnig, met temperatuurmaxima van 27° en 28°. De meeste bladen vielen nu af, terwijl in de bovenste helft der kroon het loof geheel verdorde.

Na deze tijd trad koeler weer in en herstelden zich de weinige overgeblevene groene bladen, die zich nu verder tot in de herfst goed hielden.

Dat de boom echter niet veel schadelijke gevolgen van zijn inzaagingen heeft ondervonden, bleek in de volgende zomer, daar het loof zich toen even goed ontwikkelde als vóór de proef en den geheelen zomer frisch bleef.

Wageningen, 13 Dec. 1909.

Mikrobiologie. — De Heer BEMERICK doet eene mededeeling over:
 „*Viscosaccharase, een enzym, dat uit rietsuiker slijm voortbrengt*“.

Het emulsieverschijnsel.

Vele sporenvormende bacillen en enkele weinige niet-sporenvormers, veroorzaken, wanneer zij bij tegenwoordigheid van rietsuiker of raffinose op neutrale of zwak alkalische agarplaten groeien, een zeer eigenaardige „kolloïdreaktie“, die voor de diagnose dezer bakteriën bruikbaar is. Het verschijnsel bestaat daarin, dat zich in de agar, en ook daarop, rondom de koloniën of strepen een vloeibaar „neerslag“, dat is een emulsie, vormt, die het gemakkelijkst bij doervallend licht kenbaar is, terwijl te gelijk een opzwellling van de agar plaats heeft, door de volumevermeerdering, welke door deze emulsie veroorzaakt wordt.

De emulsie bestaat uit droppels (zie plaat) van verschillende grootte, die meestal zeer klein zijn maar ook tot 0.2 mM aangroeien, zoodat zij met een loupe kunnen onderscheiden worden. Bij zwakke vergrooing meent men kleine in de agar gesuspendeerde oliedroppeltjes te zien, maar daar sterk zwavelzuur deze droppeltjes onmiddellijk oplost en zwakker zuur dit langzamer doet, kan hier van olie of vet geen sprake zijn.

Karakteristiek voor het verschijnsel is, dat het alleen in agarplaten duidelijk en slechts zeer onvolkomen in gelatine is waar te nemen. In de agar wordt het ontstaan bemoeijkt door alles wat tot zuurvorming aanleiding geeft. Zoo zijn bouillonagar, gistwateragar, en moutextraktagar met rietsuiker zeer goed bruikbaar, maar de emulsie vormt zich duidelijker in agar met stofmengsels, die de uit rietsuiker zoo gemakkelijk plaats hebbende zuurvorming tegengaan. Daarom is vooral salpeter als stikstofbron gunstig, want daaruit moet noodzakelijkerwijs bij de stikstofonttrekking een alkalisch eindprodukt ontstaan, terwijl bijv. ammoniak als stikstofbron gebruikt juist de zure reaktie zal bevorderen.

Een goede proefneming om het verschijnsel zichtbaar te maken is de volgende: Men vervaardigt een plaat van de samenstelling: leidingswater, 2% agar, 2% rietsuiker, 0.02% KNO_3 en 0.02% K_2HPO_4 . Ook kan de stikstofbron geheel worden weggelaten; agarplaten met 10% rietsuiker en bikaliumfosfaat alleen, zijn bijv. voor het zichtbaar maken van het verschijnsel bij *Azotobacter* en de straks te noemen *Bacillus emulsionis* bijzonder gunstig. De hoeveelheid rietsuiker kan afwisselen tusschen 0.1% en 50% zonder dat het verschijnsel veel verschil vertoont.

Na stolling van de agarplaat en verwijdering van het aanhangende water worden er aardbacillen op uitgezaaid, verkregen door een weinig tuinaarde in water op te schudden en enkele minuten tot 70° à 80° C. te verwarmen en dan over de plaat te gieten en het water te laten afloopen. De aanhangende kiemen, voor zoover levend, zijn slechts sporen van bacillen, die men bij 30° C. laat ontkiemen.

Na een of twee dagen worden de koloniën zichtbaar en tegelijk het emulsieverschijnsel rondom eenige daarvan; de meerderheid vormt de emulsie niet.

De rietsuiker kan vervangen worden door raffinose, die op gelijke wijze werkt; maar glukose, levulose, mannose, galaktose, laktose, maltose, trehalose, melibiose, manniet en xylose geven de emulsie niet.

Rondom de koloniën van *Bacillus mesentericus vulgatus* (zie plaat Fig. 1), *B. megatherium* en een nog niet beschreven, zeer algemeen, ook in de rietsuiker zelve voorkomende aardbacil, kenbaar aan de kleine terminale sporen, *Bacillus emulsionis* n. sp., waarvan de glasachtig doorschijnende kolonie eveneens op de plaat is afgebeeld (Fig. 2), is de emulsie duidelijk, maar zij ontbreekt bij *B. subtilis*, *B. mycoides*, *B. polymyxa*, *B. nitroæus*, *B. sphaerosporus*, *B. luteus*, alsmede bij de anaëroben *Granulobacter butylicum*, *Gr. saccharobutyricum* en *Gr. pectinovorum*.

De schimmels, de verschillende gistsoorten, de azijnbakteriën, zelfs de rietsuiker sterk inverteerende, alsmede alle soorten van *Streptothrix*, en de meeste niet-sporen-vormende bakteriën, geven de reactie niet.

Een uitzondering op dezen laatsten regel maakt de niet-sporenvormer *Azotobacter chroococcum*, die op platen van de samenstelling: 2% agar, 2 à 10% rietsuiker en 0.02% K_2HPO_4 in leidingswater, een krachtige emulsie geeft, die zich tot op bijzonder grooten afstand rondom de koloniën uitstrekt en later in de nabijheid daarvan, wellicht onder den invloed van een specifiek enzym, verdwijnt, terwijl nabij de koloniën der aardbacillen de emulsie overal blijvend is. Behalve *B. chroococcum* blijken de overige vormen van *Azotobacter* het verschijnsel niet te geven. Uit ruwkulturen van *Azotobacter*, ingericht voor stikstofbinding, kan men ook een met *B. radiobacter* verwante soort verkrijgen, die geen sporenvormer is en toch sterk emulsioneert.

Een emulsieverschijnsel, dat uit een physisch oogpunt analoog is aan het hier beschrevene, maar daarvan geheel afwijkt door de wijze van het ontstaan, heb ik vroeger beschreven¹⁾. Het wordt waargenomen indien men een 10% oplossing van gelatine in water kookt met een 10% oplossing van oplosbaar zetmeel, of met een 2%

¹⁾ Centralbl. f. Bacteriologie 2^{te} Abt, Bd. 2, pag. 627, 1896.

oplossing van agar. Zelfs in kokend vloeibaren toestand mengen de beide waterige oplossingen zich niet, wat natuurlijk na het stollen niet verandert. Blijkbaar berust dit op het feit, dat hier twee kolloidale oplossingen worden samengebracht, die niet in elkander kunnen diffundeeren, en wier droppels in emulsietoestand steeds een positieve oppervlaktespanning ten opzichte van elkander bezitten. Dezelfde verklaring moet geldig zijn voor de emulsie door de viscosaccharase gevormd ten opzichte van de agar.

Het emulsierverschijnsel ontstaat door een enzym.

Snijdt men uit het emulsienveld rondom een kolonie een stukje agar zonder daarbij de kolonie aan te raken, en plaatst men dit stukje op een andere rietsuikeragarplaat, dan blijkt de emulsie zelve daaruit niet weg te diffundeeren, maar wel gaat er in de plaat een stof over, die daarin het verschijnsel op nieuw geeft en, naar mate van de hoeveelheden, die hier in aanmerking komen, bijzonder krachtig. Er is derhalve zeker een uit de kolonie naar buiten gediffundeerd enzym aanwezig, waardoor de emulsie wordt te voorschijn geroepen. Dit is ook geheel in overeenstemming met de wijze van het ontstaan der emulsie rondom de koloniën, want een in de agarplaat blijkbaar onoplosbare stof kan alleen ter plaatse van de afzetting ontstaan zijn. Daar de stof de natuur van een plantenslijm bezit kan het enzym *viscosaccharase* genoemd worden.

Het enzym laat zich bereiden door een kultuur van *B. mesentericus vulgatus* af te filtereeren en het filtraat met alcohol te precipiteeren, waarbij natuurlijk ook de andere door *B. mesentericus* gevormde enzymen, zooals diastase, trypsine en pectosinase neerslaan. Of daarbij ook invertase behoort, die gewoonlijk als een afscheidingsprodukt van *B. mesentericus* wordt beschouwd, is door de ontdekking van de viscosaccharase, bij de werking waarvan, zooals beneden nader blijken zal, naast het slijm de aanwezigheid van een reduceerende stof wordt waargenomen, twijfelachtig geworden.

Zelfs bij tegenwoordigheid van chloroform ontstaat op rietsuikeragarplaten, door het uit de *mesentericus*kulturen bereide enzym, de emulsiereactie, zonder dat daarbij iets te bemerken is van de ontwikkeling der kiemen van *B. mesentericus* zelve, die na het filtereeren en precipiteeren in het preparaat kunnen gebleven zijn.

Het is niet moeilijk om platen van willekeurige grootte te vervaardigen, die overal de emulsie bevatten en geschikt zijn voor proeven bestemd om aan te toonen door welke invloeden de emulsie tot verdwijnen kan worden gebracht en wat dan daaruit ontstaat.

Hiertoe wordt de kultuuragar van geschikte samenstelling, vóór het stollen met een niet te groot aantal kiemen bijv. van *B. emulsionis* gemengd, en na het stollen een of twee dagen in de broedstoof geplaatst. Is de plaat dan geheel troebel geworden door de emulsie, dan wordt de suiker er uit gewasschen en is zij gereed voor de proefneming.

Bij de werking van de viscosaccharase ontstaat behalve het slijm een reduceerende stof.

Brengt men stukjes agar, waarin de emulsie voorkomt in een reageerbuis en verwarmt men voorzichtig met een weinig FEHLING's koperproefvocht, dan ziet men een sterke reductie, die niet ontstaat met dezelfde rietsuikeragar indien de emulsie ontbreekt.

De vraag rees of die reactie aan het slijm zelf moet worden toegeschreven of dat daarnaast door de viscosaccharase of op andere wijze een andere reduceerende stof gevormd wordt. Om daarop antwoord te geven werden stukjes van de emulsihoudende ágar met water uitgeloozd, waarbij het slijm, dat niet uit de agar in het water kan diffundeeren, achterblijft. Het blijkt nu dat het reduceerend vermogen der agarstukjes daarbij verloren gaat, terwijl het water, dat voor het uitloogen dienst deed sterk reduceerend werkt. Het is dus zeker, dat bij de emulsiereactie, naast het niet reduceerende slijm, een gemakkelijk diffundeerende stof wordt gevormd (waarschijnlijk een suiker) die wel reduceerend werkt. De scheikundige samenstelling dezer stof is nog onbekend, evenals die van het slijm zelve.

De mogelijkheid bestaat, dat de reduceerende stof invertsuiker is, voortgebracht door invertase, die dan altijd naast de viscosaccharase zou moeten voorkomen. Beslissende proeven zijn dienaangaande in gang.

Viscosaccharase is een synthetisch werkend enzym.

Wat de natuur van het slijm betreft moet aangenomen worden, dat de molekulen daarvan veel grooter zijn dan die van rietsuiker, omdat het anders niet is in te zien waarom dit slijm niet door de agar diffundeeren kan, hetgeen de rietsuiker met groote gemakkelijkhed doet. De viscosaccharase is derhalve een synthetisch werkend enzym. Deze omstandigheid doet denken, dat het slijm met dextran¹⁾ verwant of identiek moet zijn. Dit is evenwel een *wandstof* van de betrokken mikroben, die zich wel in water laat verdeelen en

¹⁾ G. SCHEIBLER, Zeitschr. d. Vereins für Rübenzuckerindustrie, Bd. 24, pag. 309, 1874. L. MAQUENNE. Les sucres et leurs principaux dérivés, pag. 745, 1900.

M. W. BEIJERINCK. Viscosaccharase, een enzym, dat uit rietsuiker slijm voortbrengt.

Fig. 1. Bacillus mesentericus.

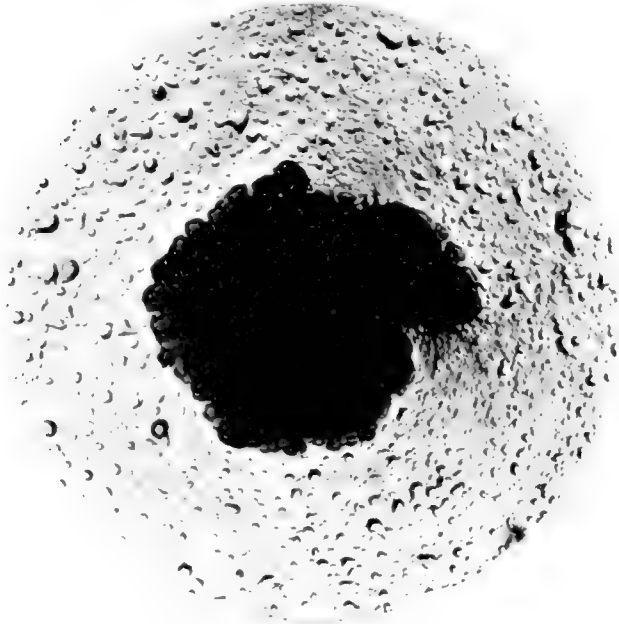
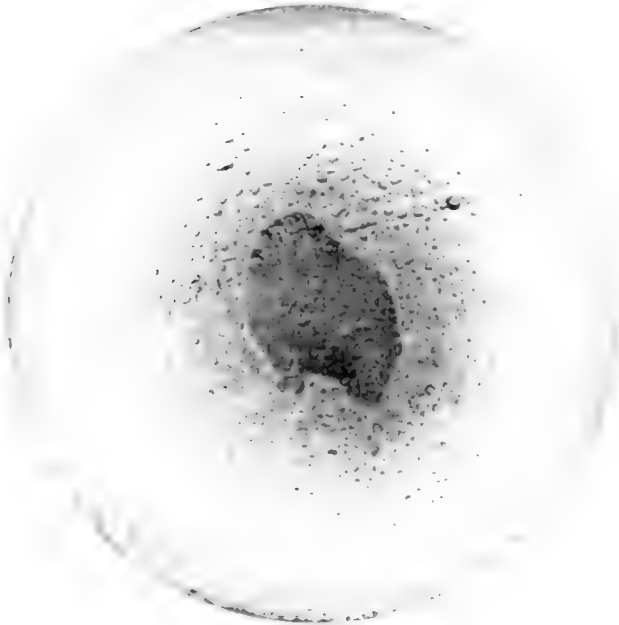


Fig 2. Bacillus emulsionis.



Het emulsierverschijnfel.



zelfs in agarplaten eenigszins diffundeert, maar niet het produkt is van een exo-enzym, dat het mikrobenlichaam verlaten en daarbuiten werken kan zooals de viscosaccharase. Daarmede in verband kan het niet bevreemden, dat dextran zeer goed uit glukose en eenige andere suikers kan ontstaan, waarmede het emulsieverschijnsel niet kan worden voortgebracht.

Zeer opmerkelijk is het feit, dat alle tot nu toe onderzochte bacteriën, die het emulsieverschijnsel vertoonen, bij bepaalde cultuurvoorwaarden, waarbij de emulsie *niet* ontstaat, niet-diffundeerend dextran kunnen vormen, waardoor hun koloniën dan als groote doorschijnende druppels op de cultuurplaten zichtbaar worden, hetgeen derhalve op een nauwe betrekking tusschen beide verschijnselen wijst, en eveneens tot de gevolgtrekking voert, dat het slijm identiek met dextran wezen moet.

Wellicht zullen bij nader onderzoek modifikaties van de viscosaccharase blijken te bestaan, die ook op glukose en andere suikers werken en daaruit dextran vormen, maar die het lichaam, of juister gezegd, den celwand der mikroben niet kunnen verlaten en dus als endoënzymen moeten worden opgevat, wier produkt, dat zelve niet diffundeert, ook niet buiten de grens der mikrobenkolonie kan komen.

Blijkt, zooals ik verwacht, het emulsieverschijnsel werkelijk door dextran te worden veroorzaakt, dan zal er licht opgaan over de vorming van de wandstoffen der plantencellen in het algemeen, want er is niet aan te twijfelen, dat dextran een modifikatie van de celstof is, en de nog altijd onverklaarde secundaire veranderingen, die in zooveel celwanden worden waargenomen, zullen dan ongedwongen teruggebracht kunnen worden tot de werking van specifieke enzymen, die met de viscosaccharase verwant zijn.

Waarom het emulsieverschijnsel zoo duidelijk in agar en minder gemakkelijk in gelatineplaten wordt waargenomen, zal wel daardoor verklaard moeten worden, dat de molekulen van de viscosaccharase zóó groot zijn, dat zij zonder veel weerstand in de betrekkelijk-wijde „kanalen” van de agar, maar in die van de zooveel dichtere gelatine moeilijker indringen.

Vele proeven voor dit onderzoek heb ik te danken aan den heer D. C. J. MIXKMAN, assistent bij mijn laboratorium.

VERKLARING DER PLAAT.

Fig. 1. Kolonie van *Bacillus mesentericus vulgatus* op: leidingswater, 2% agar, 1% rietsuiker, 0.02% KNO_3 en 0.02% K_2HPO_4 , met emulsie rondom kolonie. Vergrooting 8 maal.

Fig. 2. Kolonie van *Bacillus emulsionis* op: leidingswater, 2% agar, 0.1% rietsuiker, 0.02% GNH_3 , 0.02% K_2HPO_4 met emulsie rondom kolonie. Vergrooting 9 maal.

Mikrobiologie. — De Heer BEIJERINCK doet eene mededeeling over:
 „Variabiliteit bij *Bacillus prodigiosus*”.

Bij een vroegere gelegenheid ¹⁾ werd op de gemakkelijker gezezen, waarmede nieuwe constante varianten van *Bacillus prodigiosus* en andere mikroben kunnen verkregen worden. Hier volgen eenige verdere waarnemingen, met medewerking van den heer H. C. JACOBSEN, assistent bij mijn laboratorium gedaan.

Het standvastig-houden der kulturen.

Het beginsel waarop het standvastig houden van *prodigiosus* berust is het verhinderen van het alkalisch worden der kulturen door eigen aktiviteit. Zoo blijft bij zeer snel overenten, bijv. elke 24 uur in vleeschbouillon, of op vleeschagar, bij 30 C., iedere stam van *Bacillus prodigiosus*, hetzij de natuur- of normaalvorm, hetzij een daaruit verkregen variant, naar het schijnt onbegrensd lang onveranderd. Voor het overenten moet slechts zeer weinig materiaal gebruikt worden en een groote hoeveelheid voedsel.

Wordt aan de kultuurvloeistof eenig melkzuur toegevoegd, bijv. 0,5 à 1,5 cM³ normaal per 100 cM³ vleeschbouillon, dan blijft de kultuur bij langdurig voortgezet overenten eveneens geheel onveranderd indien dit overenten steeds geschiedt vóór het zuur door het uit de bouillon gevormde alkali is geneutraliseerd ²⁾.

Toevoeging van 1 à 2 pCt. glukose aan bouillon werkt op overeenkomstige wijze als vrij zuur, omdat *B. prodigiosus* daaruit zuur voortbrengt. Dit zuurgehalte kan bij toevoeging van genoeg glukose stijgen tot 3 à 4 cM³ normaal per 100 cM³ bouillon. Daar de alkalititer uit bouillon alleen, ongeveer 2,5 cM³ N per 100 cM³ bouillon kan worden, en uit 1 pCt. glukose niet meer dan 1,5 à 2 cM³ N zuur ontstaat, is toevoeging van 1 pCt. glukose, wel bij zeer snel maar niet bij langzaam overenten geschikt om de variabiliteit tegen te gaan, want bij langzaam overenten kan dan nog meer alkali uit de bouillon dan zuur uit de glukose gevormd zijn,

Voegt men aan den bouillon zooveel ammoniumcarbonaat of natriumcarbonaat toe, dat de alkalititer omstreeks 3 cM³ N per 100 cM³ kultuurvloeistof bedraagt, dan blijft *B. prodigiosus* eveneens bij herhaald overenten bij 30^o C. constant, terwijl de controle kultuur zonder carbonaat, onder overigens gelijke omstandigheden sterk varieert. Het-

¹⁾ Kon. Akad. v. Wetenschappen 21 Nov. 1900.

²⁾ Bij 4 cM³ N zuur per 100 cM³ kultuurvloeistof is de groei van *B. prodigiosus* verlangzaamd, bij 9 cM³ geheel opgeheven.

zelfde kan bereikt worden met magnesiumhydrofosfaat ($\text{MgHPO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$) in overmaat, dat echter snel bezinkt en om werkzaam te zijn in een bouillonagarplaat of in een dunne vloeistoflaag moet worden gebruikt. In gewone vleeschbouillonagarplaten verandert 1 pCt. van dit zout geheel en al in kristallen van ammonium-magnesiumfosfaat ($\text{MgNH}_4\text{PO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$) en blijft geheel doorschijnend; een plaat met 3 à 4 pCt. daarentegen blijft daarbij wit en troebel.

Ofschoon het aannemelijk is, dat door deze verschillende middelen de vorming van afscheidingsprodukten door de bacteriën, op wier prikkelwerking de variabiliteit waarschijnlijk berust, wordt tegengegaan, is de wijze, waarop deze vermindering plaats heeft nog niet duidelijk. Blijkbaar moet hier gedacht worden aan stoffen die, éénmaal ontstaan, het bakteriënlichaam niet of moeilijk kunnen verlaten.

Van de genoemde middelen is het vroegtijdig overenten het eenvoudigste om steeds standvastige stammen voor de proefnemingen beschikbaar te hebben.

Het ontstaan der varianten in het algemeen.

Bij het verouderen van onder gunstige voedingsvoorwaarden zich bevindende, maar overigens zonder verdere voorzorgen gemaakte kulturen aan de lucht, heeft daarin, tussehen 10° en 30° C., van zelve variabiliteit plaats, waarbij op de vroeger beschreven wijze (l. c.) varianten afgeworpen worden, terwijl daarnaast de stamvorm onveranderd terug wordt gevonden. Daar bij snel overenten (en bij standvastige en goede levensvoorwaarden) gedurende duizendtallen van celdeelingen geen verandering tot stand komt, kan deze niet berusten op een noodzakelijken, door inwendige oorzaken alleen beheerschten invloed, maar is daarvoor een bijzonder agens noodig, dat wel binnen in de cellen kan zetelen, maar toch door uitwendige omstandigheden moet worden beheerscht.

Ofschoon de veranderlijkheid zich reeds kan uiten indien een gewone goed ingerichte kultuur, bijv. in bouillon of moutextrakt, enkele weken aan zichzelf wordt overgelaten, kan dit proces belangrijk versneld worden door herhaald overenten *niet* na zeer korten, maar na *iets langeren tijd*, bijv. door overenten van bij 30° C. gehouden kulturen, telkens na 2 dagen, en waarbij een niet al te geringe hoeveelheid materiaal, zooals twee oesen, voor de overenting gebruikt wordt. Na drie of vier overentingen, dus na omstreeks een week, kan dan de variatie reeds in vollen gang zijn, terwijl de aan zich zelf overgelaten eerste kultuur dan nog geen merkbare verandering heeft ondergaan.

Blijkbaar berust dit op de volgende omstandigheid. De invloed, die bij het verouderen de variabiliteit veroorzaakt, is in de gekozen omstandigheden reeds na twee dagen actief; wordt nu overgeënt in een nieuwe kultuurvloei-stof, dan kunnen de kiemen, die door dien invloed zijn aangetast zich even goed vermeerderen als de normaal geblevene, terwijl bij het niet overenten, dus in de eerste kulturen, de niet aangetaste kiemen verreweg de overhand behouden, omdat in deze kulturen het celdeelingsproces na den 2^{den} dag langzamer gaat verlopen wegens de voedselvermindering. Bij overenting na twee dagen ontstaan dus telkens nieuwe gewijzigde kiemen en worden de reeds gewijzigde in de gelegenheid gesteld zich te vermeerderen zonder hun wijziging te verliezen. Bij deze verklaring moet aangenomen worden, dat in het overenten na twee dagen geen oorzaak tot atavisme is gelegen, want ware dit wel het geval dan zoude het omgekeerde moeten geschieden van wat wordt waargenomen: de eerste kultuur zou na een week te hebben gegroeid meer moeten gevarieerd zijn dan de herhaald overgeënte, hetgeen niet het geval is. Men ziet uit dit voorbeeld met hoeveel zorg de variatieproever genomen moeten worden om niet onduidelijk te worden.

Vooraf geldt dit ten aanzien der kulturen op vasten kultuurgrond. Zijn deze zonder verdere voorzorg eenige dagen of weken bewaard, dan kan zelfs met loupe of mikroskoop in vele gevallen niets van variatie worden waargenomen, hoewel deze toch feitelijk in gang is, gewoonlijk naar „rose” en naar „wit”.

Koloniënkultuur leert dan, dat hier en daar toch gevarieerde kiemen of groepjes van zulke kiemen moeten ontstaan zijn, want men verkrijgt uit het schijnbaar homogeen materiaal witte of rose varianten in groot aantal, die bij verdere uitzaaiing even standvastig blijken te zijn als de normaalvorm zelve. Daarnaast liggen evenwel onveranderde koloniën, die den reinen stam vertegenwoordigen en voor de verdere proeven weer even goed materiaal geven als de oorspronkelijke stamkultuur.

Ervaringen bij andere bakteriën opgedaan schijnen te bewijzen, dat de zeer veelvuldige herhaling van het zodoende mogelijk geworden selectieproces ten aanzien van het uitgangsmateriaal, een stam oplevert, die veel moeilijker varieert dan de oorspronkelijke stam. Maar bij dit belangrijke feit kan hier niet worden stilgestaan.

Alle koloniënkulturen van *B. prodigiosus* worden het best uitgevoerd op bouillonagarplaten, welke na het gieten en stollen voorzichtig eenigszins opgedroogd zijn door plaatsing bijv. op een thermostaat van 40°, waarbij water tegen den glasdeksel neerslaat,

het oppervlak van de agar en de koloniën loopen door elkander. Thans ga ik over tot een korte bespreking van de belangrijkste varianten.

Overzicht van de verkregen varianten.

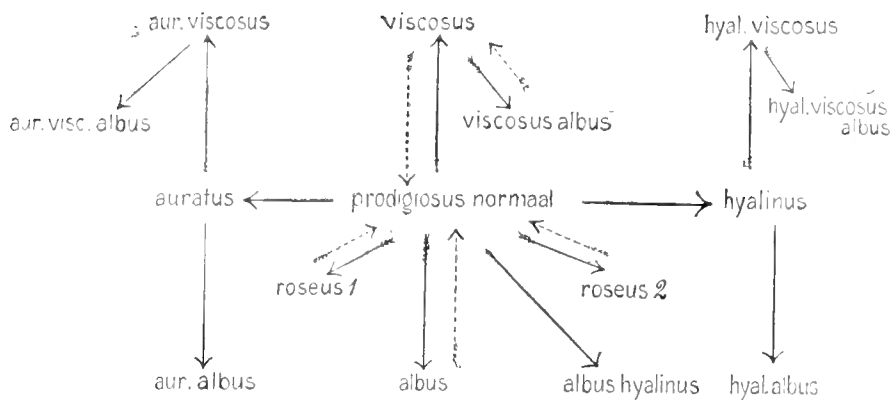
De bij *B. prodigiosus* verkregen varianten kunnen als plus- of winstvarianten, minus- of verliesvarianten en kwalitatieve varianten worden opgevat. Dit is aangegeven in den onderstaanden experimenteelen stamboom, waaruit men den oorsprong der verkregen vormen zien kan; daarin zijn de kwalitatieve varianten (*auratus* en *hyalinus*) op dezelfde horizontale lijn met den normaalvorm geplaatst, de plusvarianten daarboven en de minusvarianten er onder. De pijltjes be- teekenen dus niet alleen de afkomst, maar tevens of de variabiliteit op winst of verlies van kenmerken berust, of kwalitatief is. Gestip- pelde pijltjes geven aan, dat ook met zekerheid atavisme gezien is. Door de namen zijn de hoofdeigenschappen, die voor de varianten kenmerkend zijn, aangeduid.

Hier volgt nu eerst een overzicht zonder op de afkomst te letten en dan de stamboom, die natuurlijk niet zooals bij gewone stam- boomen op onderstelling berust, maar eenvoudig de resultaten der proeven teruggeeft.

De verkregen varianten zijn:

1. *Bacillus prodigiosus*. Normaalvorm geïsoleerd uit natuur.
2. „ „ „ *roseus* 1.
3. „ „ „ „ 2.
4. „ „ „ *albus*.
5. „ „ „ „ *hyalinus*.
6. „ „ „ „ *viscosus*.
7. „ „ „ „ *albus*.
8. „ „ „ „ *auratus*.
9. „ „ „ „ „ *viscosus*.
10. „ „ „ „ „ *albus* (= 7?)
11. „ „ „ „ „ *albus* (= 4?).
12. „ „ „ „ „ *hyalinus*.
13. „ „ „ „ „ *viscosus*.
14. „ „ „ „ „ *albus*.
15. „ „ „ „ „ *albus* (= 5?)

De samenhang en de oorsprong dezer varianten is teruggegeven in den stamboom, die hier volgt.



Experimenteele stamboom. De pijlen duiden door opwaartsche richting winstvariatie, door horizontale kwalitatieve, door neerwaartsche verliesvariatie aan. Gestippelde pijlen beteekenen, dat atavisme is waargenomen.

De beide kwalitatieve kleur-varianten *auratus* die oranje en *hyalinus* die diep wijnrood gekleurd is, varieeren op geheel overeenkomstige wijze als de normaalvorm en werpen onder dezelfde omstandigheden slijmvarianten en witte varianten af als de laatste. Ook kan de normaalvorm weder door atavisme zoowel uit *auratus* en *hyalinus* zelve als uit de daaruit afgeleide varianten terug ontstaan. In den stamboom is atavisme door gestippelde pijltjes aangegeven voor enkele van de gevallen, waarbij dit verschijnsel met zekerheid is vastgesteld. Maar er is niet aan te twijfelen, dat alle varianten in nog meerdere richtingen kunnen ataveeren, dan hier is aangegeven.

Opgemerkt moet nog worden, dat de *auratus*-variant nadert tot de natuurvarieteit *Bacillus Kieliensis*, maar daarvan o.a. verschilt, doordat de laatste een sterker gistingvermogen bezit, d.i. uit moutextract met druivensuiker meer gistingsgas ($\text{CO}_2 + \text{H}_2$) voortbrengt dan de eerste.

Overigens werd *B. Kieliensis* zelf, die op geheel analoge wijze varieert als de verschillende hier nader beschouwde *prodigiosus*-stammen nog met als variant uit laatstgenoemde verkregen.

Als nieuw kenmerk, dat zich bij de reeds bestaande kan voegen, behoort de slijmvorming beschouwd te worden, dat is de voortbrenging van een groote hoeveelheid slijmige wandstof door de cellen, welk slijm zich in de vloeistoffen verdeelen kan en in de koloniën de individuen tot een taai geheel doet samenhangen. Uit *B. Kieliensis* werd zelfs een variant verkregen, waarvan de koloniën als een vaste, droge, samenhangende zoëgloea op de agarplaten voorkomen. Maar de daarmede analoge variant ontstond tot nu toe niet uit den normalen *prodigiosus*-stam, de daaruit zich vormende *viscosus* (6), is een gewone roode slijmbakterie.

Deze roodgekleurde taai-slijmige *B. prodigiosus viscosus* is zonder twijfel een plusvariant. Het ontstaan daarvan is onder de meest verschillende voedingsvoorwaarden en tusschen de temperaturen van 10° (in een kelder) en 30° C. waargenomen, maar steeds en uitsluitend in de vloeistofkulturen, op vasten kultuurbodem nooit, hetgeen wel de reden zal wezen, dat de vele onderzoekers, die zich met *B. prodigiosus* hebben bezig gehouden, dezen variant niet hebben gezien. Wel heeft SCHEERLEN opgemerkt, dat oude *prodigiosus*-kulturen somtijds slijmig worden, maar hij schrijft dit toe¹⁾, aan het alkalisch worden en heeft niet bemerkt, dat hierbij een nieuwe constante vorm ontstaat.

De eenige duidelijke voorwaarde, welke in de vloeibare kulturen een geheel andere is dan in de vaste, is de zuurstoftoetreding. Deze toch zal in de diepte der vloeistoffen lange tijden achtereen zeer onvolkomen kunnen zijn, of zelfs geheel ontbreken, omdat de met bakteriën rijk-bedeelde bovenlagen der kulturen alle zuurstof terughouden. Het gevolg daarvan zal zijn, dat in de diepte anaërobie mogelijk wordt, hetgeen in vrij liggende kulturen op vasten bodem niet het geval is, en juist in deze gedeeltelijke anaërobie moet naar het schijnt, de prikkel gezocht worden, welke de vorming van een slijmvariant induceert. Dat hier een vrij ingewikkelde invloed, en niet een direkte werking aan de gedeeltelijke zuurstofonttrekking moet worden toegeschreven, volgt uit het feit, dat de kultuur van *B. prodigiosus* bij geheele luchtafsluiting, zooals die in een gesloten fleschje kan plaats vinden, zelfs bij herhaald overenten, niet tot het ontstaan van den slijmvariant aanleiding geeft. Bij temperaturen van omstreeks 35° ontstaat de slijmvariant niet meer, terwijl de groei dan nog zeer krachtig is: deze wordt eerst bij 37° vertraagd of onmogelijk, al naar het voedsel.

In de volgende voedingsvloeistoffen is, zoowel bij herhaald overenten als bij langdurig bewaren, het ontstaan van den slijmvariant met zekerheid waargenomen: In vleeschbouillon, in vleeschbouillon met 1 pCt. glukose, in moutextrakt, in leidingswater met 5 pCt. zuivere gelatine en 0.02 pCt. K_2HPO_4 , en in leidingwater met 2 pCt. glukose, 0.5 pCt. asparagine, 0.02 pCt. K_2HPO_4 , bij 30° C. gekultiveerd, en bij herhaald overenten na twee dagen of langer. Men ziet uit dit overzicht, dat de direkte invloed van de bestanddeelen van het voedsel op het ontstaan van den variant als uitgesloten moet worden beschouwd.

De *auratus*- en *hyalinus*-varianten zijn ook alleen in vloeibare kulturen ontstaan n.l. in bouillon en de glukose-asparagine-oplossing. Bovendien wordt *hyalinus*, die donker wijnrood is, ook gemakkelijk verkregen uit een oplossing van 5 pCt. zuivere gelatine in leidingswater.

¹⁾ Archiv. für Hygiene. Bd. 26 pag. 1.

water met 0.02 pCt. K_2HPO_4 , door herhaald overenten bij 30° waarbij tevens *hyalinus viscosus* ontstaat.

De kleurlooze of witte varianten, die van hun stamvorm alleen verschillen doordat zij volstrekt geen kleurstof voortbrengen, moeten zeker als minusvarianten worden beschouwd. Zij ontstaan nog gemakkelijker dan de slijmvarianten en zijn, ten minste wat N° 4 betreft, ook reeds door andere schrijvers opgemerkt ¹⁾.

Behalve bij de bovengenoemde voorwaarden, geschikt voor het constant houden, varieeren alle kulturen zoowel in vloeistoffen als op vasten kultuurbodem vroeger of later naar wit. Wel blijft de stamvorm daarbij bewaard maar er wordt een kleurlooze variant afgeworpen. Deze kleurlooze vorm is nog standvastiger dan de hoofdvorm.

Niet altijd ontstaat hierbij een en dezelfde variant: twee ongekleurde standvastige vormen, N° 4 en 5, kunnen gemakkelijk onderscheiden worden, indien zij gelijktijdig ontstaan en hun koloniën op de agarplaat naast elkander liggen en vergeleken kunnen worden. Dit geschiedt het best met een loupe bij doorvallend licht: de eene koloniënvorm, *albus hyalinus*, is dan meer blauwachtig doorzichtig de andere, *albus*, meer troebel wit; onder het mikroskoop blijkt de eerste uit kleinere cellen te bestaan dan de tweede.

De oorzaak voor het ontstaan van de witte varianten is niet gelegen in de meer of minder rijke zuurstoftoetreding, maar waarschijnlijk in een prikkelwerking, uitgeoefend door sekretieprodukten, welke in de cellen ingesloten blijven.

Ofschoon de aanwezigheid van ammoniumcarbonaat in den kultuurgrond (vleeschbouillonagar), alsmede het kultiveeren bij temperaturen hooger dan 30° C., bijv. bij 33° C., de kleurstofvorming verhindert, ontstaat door deze invloeden volstrekt geen erfelijke variatie. Worden de aldus behandelde en kleurloos geworden kulturen overgeënt bij 20° à 25° , dan verkrijgt men daaruit geen witte varianten, maar vindt den normaalvorm onveranderd terug, indien men ten minste de vroeger genoemde voorzorgen voor het constant houden niet verwaarloost.

Kultiveert men de witte varianten van den normaalvorm bij 30° C. in bouillon of in moutextrakt, dan ziet men na enkele overentingen de kulturen op overeenkomstige wijze slijmig worden als die van den rooden normaalvorm zelve. De koloniënkultuur op vleeschbouillonagar leert, dat witte slijmvarianten afgeworpen zijn, juist zooals bij den normaalvorm de roode slijmvariant afgeworpen wordt, zoodat

¹⁾ In LEHMANN en NIEUMANN'S Atlas 4e Ed. 1907 Taf. 30, Fig. 3, komt zelfs een gekleurde afbeelding voor „van een reinkultuur” van *prodigijsus* bestaande uit roode en witte koloniën.

naast den slijmvariant de witte vorm ongewijzigd blijft voortbestaan. De witte slijmvarianten (N^o. 7 ? en 14) beantwoorden, door den aard hunner koloniën, aan de twee witte vormen, boven beschouwd, *albus* (4) en *albus hyalinus* (5).

Er is nog een andere wijze om den kleurloozen slijmvariant te verkrijgen, nl. uit den rooden slijmvariant. Wordt deze gekultiveerd bij 30° in moutextract of in bouillon, dan vindt men na een of twee overentingen, telkens na twee dagen, bij uitzaaiing op vleeschagar vele witte slijmkoloniën naast de onveranderde roode, tevens is daarbij een belangrijk aantal geheel normale (dus niet slijmige roode N^o. 1) te vinden, hetgeen als atavisme is op te vatten, maar een atavisme, dat op het verlies van een kenmerk, het vermogen om slijm af te scheiden, berust. De aldus door minusvariatie verkregen witte slijmvariant, als N^o. 7 in de tabel opgenomen, schijnt identiek te zijn met de, door plusvariatie, uit den niet slijmigen witten gevormden, welke laatste daarom niet afzonderlijk vermeld is.

Reeds in mijn vroegere mededeeling heb ik gewaagd van rose varianten, die dus als het ware het midden houden tusschen normaalvorm en witten variant. Zij kunnen op verschillende wijzen verkregen worden, bijv. door het kultiveeren van den normaalvorm op platen van zuivere gelatine opgelost in gedistilleerd water (dus H₂O, 10 pCt. gelatine) bij kamertemperatuur, waarop snelle groei en sterke smelting plaats vinden. Bij dagelijksch afstrijken op een bouillonagarplaat van één en dezelfde kolonie op zulk een zuivere gelatine verkregen, vindt men, indien de temperatuur tusschen 14° en 17° C. wordt gehouden, den vijften of zesden dag de eerste rose varianten, al of niet gelijktijdig met witte, die onder deze omstandigheden meestal later ontstaan. Twee rose varianten (tabel N^o. 2 en 3) zijn daarbij gemakkelijk te onderscheiden, maar het is niet onmogelijk, dat er vele ontstaan tot wier onderscheiding ons waarnemingsvermogen niet toereikend is. In elk geval staat het vast, dat het kenmerk „vermogen om pigment te vormen” op verschillende wijzen deelbaar is. De erfelijke standvastigheid van ten minste een dezer rose varianten, bleek niet te verschillen van die van den normaalvorm.

Een andere wijze ter verkrijging van rose varianten werd gevonden in het kultiveeren van den normaalvorm in vleeschbouillon, welke door indamping op het waterbad tot drievoudige concentratie was gebracht. Reeds na een enkele overenting waren naast normaalvormen een zeer groot getal rose varianten (3) ontstaan, welke door veel lichtere kleur dan de eerst genoemde vorm een toenadering vertoonden tot den geheel kleurloozen vorm (4). De veranderlijkheid van de verschillende rose varianten is niet dezelfde, daar de door de

concentratieproef verkregen vorm (3) gemakkelijker dan de rose varianten (2) zoowel roode normaalvormen (1) als geheel witte varianten afwerpt (4). Overigens is het gebleken, dat ook deze meer veranderlijke variant bij vroegtijdig overenten constant blijft.

Verschijselen van atavisme worden bij deze proefnemingen veelvuldig waargenomen. Zoo is bijv. het ontstaan van den normaalvorm uit *viscosus* (6) gemakkelijk te zien indien de laatstgenoemde variant langdurig, bijv. 14 dagen zonder overenten voortgroeit op een vleeschbouillonagarplaat, waarbij aan den rand van de entstreepen hier en daar een enkele normale kolonie (1) zichtbaar wordt.

De *albus*-varianten hebben eveneens neiging om enkele roode normaalvormen af te werpen, maar zij doen dit eerst na weken of maanden lang op vleeschagar verouderd te zijn; aanvankelijk zijn zij zeer standvastig.

Uit de tot zekere hoogte volkomen regelmatige vorming telkens van dezelfde varianten bij *Bacillus prodigiösus*, moet besloten worden tot het bestaan van een bepaald gerichte variabiliteit, van orthogenes, zooals EIMER het uitdrukt.

Daar onder verschillende voedingsvoorwaarden dezelfde variant kan ontstaan, kan het voedsel zelve niet de prikkel zijn, die dat ontstaan beheerscht; dit moet, zooals boven reeds is opgemerkt, door een andere in de bacteriën werkzame oorzaak geschieden, die, in het geval van *B. prodigiösus*, alleen in een alkalische omgeving actief schijnt te wezen.

Intusschen moet tegenover dit feit nadruk worden gelegd op de omstandigheid, dat het aangeboden voedsel in ruimeren zin toch ook wel degelijk van beslissenden invloed op de variabiliteit is, al is het ook op indirekte wijze. Zoo leerden wij reeds de overwegende betekenis kennen, die de alkalische reactie van het voedingsmedium verkrijgen kan, indien het alkali door de mikroben zelve wordt voortgebracht. Een ander voorbeeld is het volgende. Zoowel in moutextrakt als in vleeschbouillon vormt zich regelmatig de *viscosus*-variant; maar uit moutextrakt werd de *auratus*-variant, die zoo gemakkelijk in vleeschbouillon ontstaat, niet verkregen. Ja, elke cultuurvoorwaarde levert een eigenaardig, telkens terugkeerend variantenmengsel, dat afwijkt van het variantenmengsel, zoowel kwantitatief als kwalitatief, dat bij andere cultuurvoorwaarden gevonden wordt. Maar de ware factoren, die hierbij in het spel zijn konden nog niet worden vastgesteld.

Uit het voorafgaande kunnen de volgende uitkomsten worden afgeleid.

1°. *Bacillus prodigiosus* werpt zoowel kwalitatieve als winst- en verliesvarianten af, die door bepaalde proeven met zekerheid worden verkregen; de hoofdvorm wordt naast de varianten steeds onveranderd in de zelfde kultuur teruggevonden.

Alle varianten zijn bij hun ontstaan onmiddellijk even standvastig als de hoofdvorm.

De eigenlijke factoren, die bij deze proeven de variabiliteit beheerschen zijn nog onbekend.

2°. Hoofdvorm en varianten kunnen door snel overenten, en op andere wijzen, naar het schijnt onbegrensd lang standvastig gehouden worden.

3°. Alle varianten varieeren zelve op analoge wijze als de hoofdvorm, zoo geeft de *auratus*-variant een *auratus*-slijmvariant, die als winst-, een *albus*-variant, die als verliesvariant moet worden beschouwd.

De natuurvariëteit *B. Kielensis*, die tot den *auratus*-variant nadert, varieert eveneens op analoge wijze. De variatie is bepaald gericht of orthogenetisch.

4°. Winstatavisme bij verliesvarianten, en verliesatavisme bij winstvarianten zijn door bepaalde proeven met zekerheid te verkrijgen. Ook kwalitatieve varianten kunnen ataveeren.

5°. De experimenteele varianten van *B. prodigiosus* zijn nog niet in de natuur gevonden. Bij een andere bacteriensoort, *Bacillus herbicola*, verkreeg ik een variant, dien ik vroeger reeds herhaaldelijk uit de natuur geïsoleerd en voor een geheel andere soort gehouden had.

6°. In het voorafgaande ligt het bewijs, dat de varianten van *prodigiosus*, en voor vele andere mikroben geldt dit evenzoo, van elkander en van hun stamvormen op dezelfde wijze verschillen als naverwante natuurlijke soorten of variëteiten dit onderling doen. Alleen in de neiging tot atavisme bestaat onderscheid.

7°. De subvarianten, bijv. de rosevarianten van verschillende kleurintensiteit, ontstaan op overeenkomstige wijze als de hoofdvarianten en bezitten denzelfden graad van standvastigheid.

Scheikunde. — D. Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van den heer F. M. JAEGER: *Studiën over het Tellurium*: I. „Over het wederzijdsch gedrag der elementen zwavel en tellurium.”

(Mede aangeboden door den Heer FRANCHIMONT).

§ 1. Terwijl men over de betrekking van het seleen tot de zwavel, althans in hoofdzaken, goed is ingelicht, — loopen de meeningen omtrent het wederkeerig gedrag der elementen telluur en zwavel nog niteen. Reeds KLAPROTH¹⁾ heeft zich met die vraag bezig gehouden. Hij bericht daaromtrent, dat zich bij het samensmelten van telluur en zwavel loodkleurige, straligkristalliseerende massa's vormen, die bij verhitting zwavel afgeven, en daarbij in eene poreuze, metallisch uitzieende massa overgaan, welke hij voor telluursulfide houdt. BERZELIUS²⁾ bracht dertig jaren later de vraag opnieuw te berde; hij vond, dat door samensmelten geen verbindingen te isoleeren waren, doch meent verbindingen TeS_2 en TeS_3 te moeten aannemen in de bruinzwarte neerslagen, die door H_2S worden teweeggebracht in oplossingen van tellurieten en telluraten. Tot die opvatting geraakte hij wegens de oplosbaarheid der genoemde neerslagen in kali- en natronloog, evenals zulks voor TeO_2 en TeO_3 het geval is.

BECKER³⁾ was de eerste, die de genoemde precipitaten analyseerde, en tot de slotsom geraakte, dat hunne samenstelling met TeS_2 en TeS_3 werkelijk overeenstemt. Echter bewees hij, hoe men bijna alle zwavel met zwavelkoolstof aan deze lichamen kan onttrekken: bij 't TeS_3 vond hij in 't residu 6.14 % S in plaats van 42.85 %; bij 't TeS_2 slechts 3.69 % in plaats van 33.4 %. Hij komt tot 't besluit, dat de zwarte neerslagen slechts mengsels zijn, wier samenstelling bijna met die van de veronderstelde verbindingen overeenkomt. Zij ontstaan dan ook volgens hem primair als ephemere verbindingen, die door 't oplosmiddel terstond ontleed worden. BERZELIUS⁴⁾ en OPPENHEIM⁵⁾ verkregen dubbelsulfiden, aan welke zij de formules: $3\text{K}_2\text{S} + \text{TeS}_2$, enz. toeschreven. In later tijd hielden BRAUNER⁶⁾ en GUTBIER⁷⁾ weer meer over naar de meening, dat men hier met mengsels der elementen te doen heeft.

¹⁾ KLAPROTH, Crelle's Ann. (1798). 191.

²⁾ BERZELIUS, Gilb.—Pogg. Ann. 8. (1826). 413.

³⁾ BECKER, Lieb. Ann. d. Chem. 180. (1876). 257.

⁴⁾ BERZELIUS, Traité de Chimie. (1830).

⁵⁾ OPPENHEIM, Journ. f. prakt. Chem. 71. (1857). 270.

⁶⁾ BRAUNER, Journ. Chem. Soc. 67. (1895). 527.

⁷⁾ GUTBIER, Berl. Ber. 34. 2114. (1901).

§ 2. Sedert DUMAS het tellurium in de zuurstofgroep plaatste als eerstvolgend homolog van het selenium, en daardoor voor het latere periodieke systeem de welbekende moeilijkheid betreffende de plaats van het telluur ten opzichte van 't jodium was in 't leven geroepen, — is de vraag naar de betrekkingen tusschen het tellurium eenerzijds, en de zwavel en het seleen anderzijds, weder van grooter aktueel belang geworden. Want 't is toch thans wel zéker, dat 't atoomgewicht van het telluur 127,6 is en dus *grooter* is dan dat van 't jodium. Anderzijds zijn de verschillen tusschen het telluur en de beide andere elementen zóo sterk uitgesproken, dat RETGERS op grond der isomorfie tusschen telluraten en osmiaten, meende het telluur beter onder te kunnen brengen in de groep der platina-metalen. Telluraten zijn nl. niet isomorf met sulfaten, selenaten, manganaten, ferraten, enz. Daarentegen toonde PELLINI eene isodimorfie aan bij $(C_6H_5)_2SeBr_2$ en $(C_6H_5)_2TeBr_2$, terwijl NORRIS en MOMMERS eene direkte isomorfie konstateerden tusschen de seleen- en telluurdubbelechloriden-, en -bromiden van het dimethylamine. In tegenstelling hiermede zijn er echter vele bezwaren geopperd tegen de aan het telluur toegewezene plaats: zoo o. a. de afwijkende konstitutie van het telluurzuur, dat waarschijnlijk als H_6TeO_6 moet opgevat worden, en de totaal uiteenloopende hydratatie der telluraten in vergelijk met sulfaten en selenaten. Hoe 't ook zij, — alles maakt 't wenschelijk, meerdere gegevens omtrent de plaats van het telluur onder de andere elementen te verkrijgen, en zoo kwam dan de betrekking tot de zwavel weer in de eerste plaats in aanmerking.

§ 3. Het telluur werd verkregen uit $1\frac{1}{2}$ kilo ruw telluur, waarschijnlijk uit Amerikaansche ertsen afkomstig. Het bleek de volgende elementen te bevatten: telluur, seleen, zwavel, lood, koper, bismuth, ijzer, silicium en sporen van antimoon, zink en enkele andere metalen.

De eerste zuivering geschiedde door oxydeeren met koningswater, droogdampen der gefiltreerde oplossing, herhaaldelijk opnemen in sterk zoutzuur en neerslaan van de kokende, gefiltreerde oplossing door SO_2 , waarbij de eerste seleenrijke portie's telkens werden ter zijde gelaten. Deze bewerking werd driemaal herhaald. Het amorfe telluur werd in twee deelen verdeeld; het éene deel werd op de door NORRIS, FAY en EDGERLEY¹⁾ aangegeven wijze in 't basische telluurnitrat: $Te_2O_5(OH)(NO_3)$ omgezet, en door vijfmaal herhalen der, overigens wekenlang durende, bewerkingen, tenslotte geheel zuiver in den vorm van genoemd zout verkregen; hieruit werd dan zuiverst TeO_2 door voorzichtig verhitten bereid, en dit, in zuiver zoutzuur opgelost,

¹⁾ NORRIS, FAY en EDGERLEY, Americ. Chem. Journ. **23**. 105.

met SO_2 neergeslagen. Het andere deel werd volgens STAUDENMAYER's methode, met de wijzigingen van (GUTBIER¹⁾) door middel van CrO_3 omgezet in telluurzuur; dit door twaalfmaal precipiteeren met sterk HNO_3 gereinigd, en vervolgens twee malen uit water omgekristalliseerd. Het is noodig, om 't aanhangende CrO_3 de eerste maal met alcohol te reduceeren: de kristallen van 't telluurzuur behouden anders een gele kleur, welke door in vasten toestand bijgemengd CrO_3 veroorzaakt wordt: op deze kwestie hoop ik nog nader terug te komen.

Het zuivere telluurzuur werd daarop met hydrazine-hydraat volkomen gereduceerd.

Van 't basische nitraat is tot dusverre de kristalvorm niet beschreven geworden. De gegevens, gewonnen aan de uit HNO_3 gekristalliseerde stof, mogen hier medegedeeld zijn:

Kleurlooze sterk glanzende, tot 5 mm. lange naalden, die meestal volgens $\{010\}$ afgeplat zijn. Vooral in de vertikaalzone vertoonen zij vele vicinaalvlakken en ook komen bij verschillende kristalindividuen grootere hoekverschillen voor. De metingen kunnen dus slechts als benaderingen gelden.

Rhombisch-bipyramidiaal.

$$a : b : c = 0.590 : 1 : 0.607.$$

Vormen: $m = \{110\}$, $b = \{010\}$ en $p = \{120\}$, zeer glanzend; vooral de vorm b , die tevens splijtvlak is, bezit hoogen glans. Daarentegen zijn $q = \{011\}$ en $s = \{021\}$ dof, de vorm $\{021\}$ ontbreekt meestal. De kristallen vertoonen eene uitgesproken toenadering tot tetragonale symmetrie.

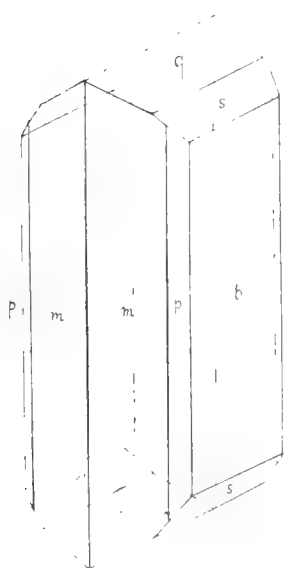


Fig. 1.

Kristalvorm van het basische telluurnitraat.

Hoekwaarden :	Gemeten :	Berekend :
$m : m = (110) : (\bar{1}\bar{1}0) = 61^\circ 5'$		—
$b : q = (010) : (011) = 58^\circ 44\frac{1}{2}'$		
$m : p = (110) : (120) = 19^\circ 25'$		$19^\circ 18\frac{1}{2}'$
$p : b = (120) : (010) = 39^\circ 59'$		$40^\circ 2\frac{1}{2}'$
$q : q = (011) : (0\bar{1}\bar{1}) = 62^\circ 50'$		$62^\circ 31'$
$m : q = (110) : (011) = 74^\circ 54'$		$74^\circ 43'$
$m : b = (110) : (010) = 59^\circ 27\frac{1}{2}'$		$59^\circ 27\frac{1}{2}'$
$b : s = (010) : (021) = 39^\circ 46'$		$39^\circ 29'$
$s : q = (021) : (011) = 19^\circ 0'$		$19^\circ 16'$

Volkomen splijtbaar naar $\{010\}$.

¹⁾ GUTBIER, Z. f. anorg. Chem. 29. 22. (1901); 32. 96. (1902).

't Optisch assenvlak is $\{001\}$, met de a -as als eerste middellijn. Sterke rhombische dispersie, met $\rho < \epsilon$; de schijnbare assenhoek in ceder-olie (1.51) bedroeg ongeveer 63° .

Tenslotte moge opgemerkt zijn, dat het uit telluurzuur door hydrazine-hydraat verkregen telluur, van het uit zoutzure oplossing door SO_2 geprecipiteerde, evenzeer amorf telluur, zich door een merkbaar donkerder kleur onderscheidt. Of hier alleen eene andere verdeelingsgraad de oorzaak is, of wel, dat hier eene ware allotropie der amorf modifikatie voorhanden is, moet later onderzoek nog beslissen.

§ 4. Vervolgens werden beide massa's telluur, gemengd met de vijf- à zesvoudige hoeveelheid fijngepoederd, versch cyaankalium, in groote Rose'sche kroezen gedurende eenige uren gesmolten gehouden, en wel in een lichtgas-atmosfeer, met behulp van een grooten Perrot'schen oven. In enkele maanden werden aldus eirka vijf kilo dezer smelten verkregen: voorzichtig fijngestooten, lossen de donkerkleurige smelten in goed uitgekookt, heet water tot prachtig purper gekleurde oplossingen op, die koud door zuivere lucht geoxydeerd, uit het K_2Te alle telluur in schitterende naalden doen neerslaan. Bij 't smelten der massa's werd de giftige invloed der in geringe hoeveelheden gevormde telluurwaterstof maar al te zeer ondervonden, evenals de onaangename gevolgen van 't inademen van zeer kleine hoeveelheden TeCl_2 , bij 't oxydeeren met koningswater: men ademt gedurende weken lang, het sterk naar fosfine riekende $(\text{CH}_3)_2\text{Te}$ uit, — eene stof, voor welke 't reukorgaan der omstanders ongeloofelijk gevoelig is¹⁾.

Het aldus gewonnen, kristallijne, en reeds zeer zuivere tellurium, is vrij van seleen, gelijk door de uiterst gevoelige joodkaliumreactie van NORRIS e. s., en door de nitblijvende reductie van 't TeO_2 in sterk zoutzure oplossing met behulp van hydroxylamine, werd bewezen. Alle seleen is als KCNSe verwijderd, terwijl 't telluur geheel in K_2Te overgegaan was, en daaruit door de, van H_2S beroofde lucht, weer was vrijgemaakt.

1) Over de fysiologische werkingen van het telluur zijn de meeningen nog zeer verdeeld. Terwijl het seleen een element is, dat in giftigheid voor het arsenikum nauwelijks schijnt onder te doen, wordt het telluur door CZAPEK EN WEILL (Chem. G. Bl. 2. 1098 (1893)), wegens de veel snellere reductie der telluurverbindingen, en de daardoor veroorzakte lokalisatie in 't organisme, als vrij onschuldig gekwalificeerd. De ervaringen aan mijn laboratorium bewijzen het onjuiste dezer meening.

Het telluur is ongetwijfeld vergiftig; maar de individueele gevoeligheid voor kleine sporen varieert bij verschillende personen binnen zeer wijde grenzen. Vooral het Tell_2 is een hevig, hoofdpijn en braken opwekkend vergif; andere telluurverbindingen, zooals b.v. TeCl_2 , schijnen meer hinderlijk te zijn door hunnen overgang in kwalijk-riekende stoffen, hoewel ook daár de gift-werking buiten allen twijfel is.

Daarop werd nu het gezuiverde element in lange buizen van hardglas, door asbestproppen heen in vakuo gedistilleerd, en wel bij cirka 600° à 700° C., in een TELLUR-oven. Deze bewerking werd een keer of zeven herhaald, telkens met een gram of tien tegelijkertijd. Het aldus verkregene, zuivere telluur was zilverwit en grofkristallijn, uiterlijk veel op gekristalliseerd antimonium gelijkende.

De hier verrichte bepalingen zijn gedaan met het uit telluurzuur gewonnen produkt. De zwavel was tweemaal uit kokenden toluol omgekristalliseerd, en bij 90° in een droogstoof gedurende eenige uren verwarmd.

§ 5. De inrichting van 't smeltapparaat is uit fig. 2 gemakkelijk te erkennen. De hardglazen smeltbuizen, steeds met tien gram van 't afgewogen en goed gemengde complex der beide elementen gevuld, stonden in ijzeren cylinders, die met fijn zand gevuld waren. Buis en cylinder waren door asbest afgedekt; door een hardglazen gasaanvoerbuisje werd de noodige N_2 -atmosfeer onderhouden; de stikstof was uit NH_4Cl en KNO_3 bereid, met alkalische pyrogallol-, en $Na_2S_2O_4$ -oplossing van O_2 ontleaan, en door H_2SO_4 gedroogd. De oven bestond uit

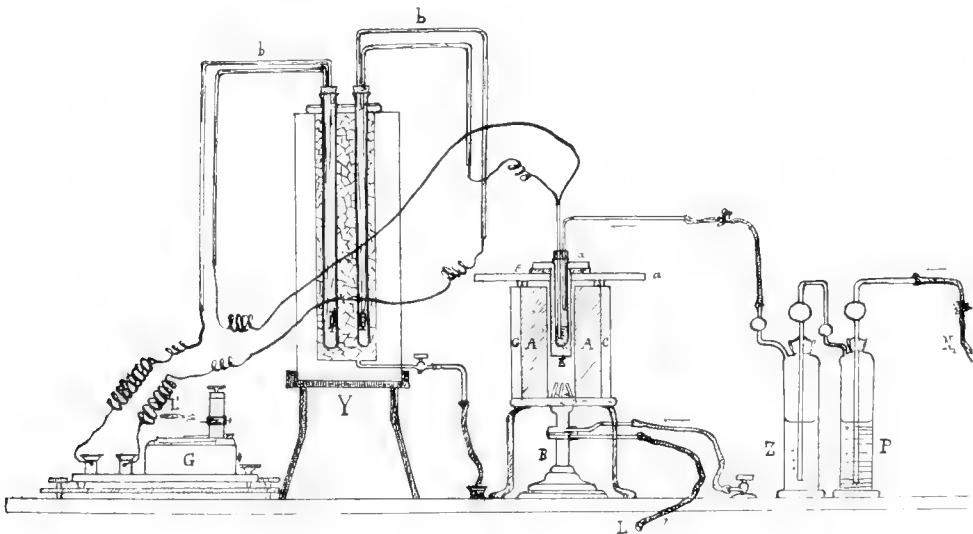


Fig 2.

chamotte-steen, waarin eene asbestvulling en een centrale cylinder van onverglaasd aardewerk aangebracht waren; hij werd door een asbestplaat afgedekt, rustende op drie, al of niet uitneembare chamotte-blokjes, ter regeling der afkoelingssnelheid. De ijsketel voor de koude soldeerplaats van 't platina-platinarhodium thermoëlement (3 mM.), is dubbelwandig en veroorlooft gedurende een uur of zes met dezelfde

SMELTDIAGRAM VAN ZWAVEL-TELLUURKOMPLEXEN.				
Mol Proc. Zwavel	Gew. Proc. Zwavel:	Beginstolpunt: C°	Eindstolpunt: C°	Stollingsduur in sek.
0	0	452		—
5	1.3	440	437	—
10	2.7	435	430	—
15	4.2	431	423	—
20	5.9	426		—
25	7.7	421		0
30	9.7	413	403	30
35	11.9	401	402	50
40	14.4	394	406	80
45	17.1	389	404	—
50	20	387	405	100
55	23.5	385	405	—
60	27.4	374	409	—
65	31.7	368	401	145
66-67	33.4	366	405	160
70	36.9	361	405	—
75	43	348	408	180
80	50	339	409	180
85	58.7		410	210
90	69.3	288	408	230
95	82.7		409	260
98	92.4	—	410	—
100	100	415	—	—

hoeveelheid ijs te werken; alle geleidraden waren door glasbuizen geïsoleerd.

De galvanometer van SIEMENS en HALSKE werd geijkt door bepaling der smeltpunten van tin, lood, bismuth, kadmium, zink, antimoon en zilver, en onder gebruikmaking der met den gastermometer vergeleken waarden van DAY en HOLBORN en van DAY en CLEMENT; de

aflezing geschiedde door eene lens, de tijdtelling door een uurwerk, dat elke 10" een signaal gaf.

§ 6. Bij de bepaling werden groote moeilijkheden ondervonden; eensteels bij de véél telluurhoudende mengsels, daar alle omzichtigheid moest worden aangewend, om 't uitkoken der zwavel te vermijden; anderdeels bij de véél zwavel houdende complexen, wegens de groote taaiheid der smelten en de zéér langzame kristallisatie der gesmolten massa's; vooral bij een zwavelgehalte van meer dan 80% worden de bepalingen vaak zeer onscherp: enkele dezer laatste mengsels vertoonden alleen een scherp eindstolpunt. Toch was 't meestal mogelijk, om bij herhaling der proeven, dezelfde waarden terug te vinden.

De hier voorgaande tabel geeft de uitkomsten der beste proefnemingen weder.

§ 7. Deze gegevens, in fig. 3 op de gewone wijze grafisch voorgesteld, leeren derhalve, dat de elementen zwavel en telluur saamgesmolten, stollen tot twee reeksen van mengkristallen, van verschillende kristalvorm. Het toestandsdiagram is dat, hetwelk men bij isodimorfe stoffen meermalen heeft waargenomen; er is een zeer uitgebreide hiaat, gaande van bijna zuivere zwavel tot cirka 27% zwavel

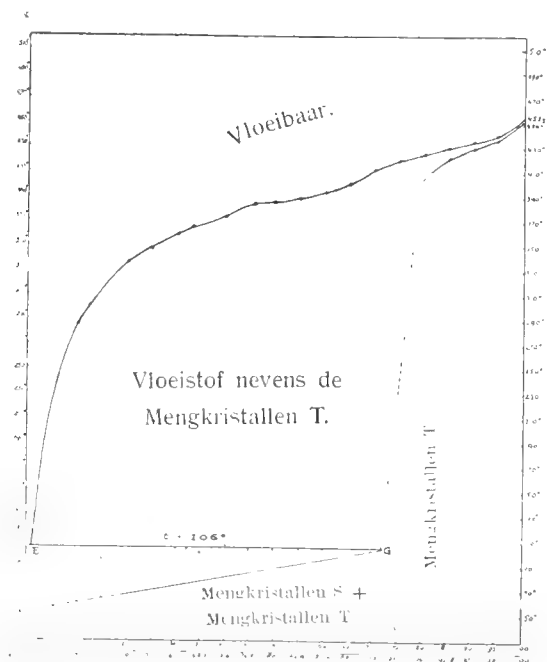


Fig. 3.

aan de zijde der trigonale mengkristallen; de temperatuur van het eutektische punt *E* is 106° ; de stollingsduur neemt, voorzoover dit was na te gaan, met stijgend zwavelgehalte, tot vlak bij de zuivere zwavel voortdurend toe. De zwavelrijke grensmengkristallen zijn licht rossig van kleur; daar zeer kleine hoeveelheden telluur de zwavel reeds intensief rood kleuren, moet hunne concentratie aan telluur inderdaad uiterst gering zijn. Zij vertoonen den dunnen naaldvorm der monokliene zwavel. De omzetting bij 106° is in de diverse smelten, zoowel bij afkoelen als bij 't verwarmen, met het oog zeer schoon waar te nemen. De monokliene S-rijke mengkristallen schijnen bij lager temperatuur in den rhombischen vorm over te gaan.

Van verbindingen tusschen telluur en zwavel is in deze omstandigheden volstrekt niets te merken; ook bij lagere temperaturen werden geen warmte-effecten meer gekonstateerd.

De smelten der telluurrijke mengsels zijn donker zwartbruin, en in dunne lagen geelbruin gekleurd; in tegenstelling met de zwavelrijke smelten, zijn zij tot bij hun stolpunt dun-vloeibaar.

§ 8. Vatten wij al hetgeen thans omtrent 't gedrag der elementen zwavel, seleen en telluur bij 't samensmelten bekend is, samen, dan kan men zeggen, dat in dit opzicht voorzeker aan het telluur geheel de plaats toekomt, die daaraan door DUMAS is toegewezen. Zwavel en seleen vormen volgens RINGER¹⁾ een trimorfe mengkristalreeks, seleen en telluur volgens PELLINI en Vio²⁾ een ononderbroken reeks van trigonale mengkristallen; doch er ontstaan geen verbindingen, gelijk men, behoudens de uitzonderingen bij zulke triaden van homologe elementen, — althans in de middelste groepen van 't periodiek systeem, — op grond der voorhanden ervaringen zal mogen verwachten. Bij zwavel en seleen is de zaak dan zelfs nog iets ingewikkelder, doordat daar drie, in stede van twee heteromorfe mengkristalsoorten optreden. Plaatst men zich op RITGERS' standpunt, volgens wien aan elk dezer vormen, een labielere, in vrijen toestand meestal niet bekende vorm van elk der componenten zou beantwoorden, dan is de isotrimorfie in 't geval van seleen en zwavel zeker moeilijker te verklaren, dan de dimorfie van zwavel en telluur. Want van de twee monokliene reeksen bij 't systeem: zwavel-seleen, is er eene volgens MUTHMANN analoog aan den vorm der γ -zwavel, terwijl de trigonale reeks den vorm van 't metallieke selenium zou bezitten. Nu is echter geen der beide bekende monokliene modifikatie's van het seleen, isomorf met eenige monokliene modifikatie van den

¹⁾ RINGER, Z. f. anorg. Chem. **32**, 183. (1902).

²⁾ PELLINI en Vio, Gazz. Chim. It. (1906), **II**, 476.

zwavel¹⁾, terwijl ook de trigonale, zoogenaamde ϵ -vorm van dit element verschilt van den trigonalen vorm van 't seleen. Van RETGERS standpunt uit bezien, zou men dus, nevens alle reeds bekende allotrope vormen, aan elk der beide elementen ieder minstens nóg eens twee onbekende, labielere modifikatie's moeten toekennen. In de trigonale reeks van 't systeem: zwavel-telluur heeft men blijkbaar met denzelfden labielere trigonalen vorm der zwavel te doen als bij RINGER's onderzoek, terwijl ook de aanname van een onstabielen, monoklienen vorm van het tellurium, gezien 't feit, dat deze symmetrie zoowel bij 't seleen als bij de zwavel méérmalen voorkomt, niets gekunstelds kan hebben. Ook het onderzoek van PELLINI en VIO brengt hierin geene meerdere komplikaties; de twee elementen zijn daar in alle mengverhoudingen tot ééne trigonale reeks vereenigd, terwijl 't dus alleen de *zwavel*-houdende complexen van 't seleen en van 't telluur zijn, welke de hiaten bij de menging in den vasten toestand vertoonen.

Een en ander laat wel het besluit toe, dat inderdaad de elementen zwavel, seleen en telluur eene natuurlijke triade van volkomen homologe elementen vormen, die dichter bij elkaar staan, dan hun groepgenoot, de zuurstof, tot elk hunner zulks doet. Van ware, bij smelting bestaانبare „verbindingen” is eerst sprake bij de combinatie van een der drie elementen met de zuurstof²⁾.

§ 9. De vraag rest nu nog, wat men te denken heeft van de telluur-zwavelcomplexen, die bij kamertemperatuur door middel van H_2S uit de oplossingen van telluurverbindingen, als tellurieten en telluraten, ontstaan, en in welken zin de door OPPENHEIM en BERZELIUS verkregene, zoogenaamde dubbelsulfiden, zijn op te vatten.

Vooreerst gelukte het spoedig, om aan te toonen, dat het element tellurium zelve, en 't best de amorfe modifikatie daarvan, in eene oplossing van alkali- of ammoniumsulfide, bij verhitting zonder residu oplosbaar is; dat voorts die oplosbaarheid met stijgende concentratie van 't sulfide toeneemt, en dat tenslotte die oplosbaarheid ook grooter wordt, indien men kaliumhydroxyde aan de sulfide-oplossing toevoegt, en aldus hare hydrolyse terugd ingt. Daarbij ontstaan heldere, bij koking wat rossiger wordende gele oplossingen, die aan de lucht spoedig oxydeeren onder vrijmaking van een zwart neerslag, sterk alkalisch reageeren, en met zoutzuur onder H_2S -ontwikkeling, een

¹⁾ GROTH, Chemische Krystallographie, Bd. I. (1906). p. 23—35.

²⁾ Trouwens is 't ook bekend, hoe b.v. O en S elkaar in organische verbindingen nooit isomorf vervangen; daarentegen S, Se en Te dit wel doen, gelijk uit 't onderzoek van PELLINI, NORRIS, TUTTON, e. a. gebleken is.

zwaar zwart precipitaat geven, dat zoowel telluur als zwavel blijkt te bevatten, en oplosbaar is in alkali hydroxyde.

De analyse dèzer zwarte precipitaten leverde geen konstante waarden; 't telluurgehalte is sterk afhankelijk van de wijze van ontstaan, en slingerde tusschen 46.9 % en 80.9 %.

Vervolgens werd de inwerking van H_2S op verschillende telluurverbindingen onderzocht: op 't basische nitraat, op in absoluten alkohol gesuspenderd, fijnverdeeld dioxyde, op 't dioxyde in zoutzure oplossing, op telluurzuur in water, en op de uit TeO_2 of telluurzuur verkregene telluriet- en telluraatoplossingen. Een fraai, eenigszins kristallijn uitzierend produkt werd uit de alkoholische suspensie van TeO_2 verkregen; de analyse van 't blauwzwarte lichaam leverde 80.1 %, een andermaal 80.9 % telluur; voor TeS wordt berekend 79.9 %, voor TeS_2 66.6 %, voor TeS_3 57 %, zoodat de samenstelling nog het meest tot die voor TeS nadert, maar met een te veel aan tellurium.

Het telluurzuur werd in de koude niet gereduceerd; het in zoutzuur opgeloste TeO_2 leverde een zwart neerslag, met 71.2 % telluur, dus ook weer gelegen tusschen TeS en TeS_2 .

Het basische nitraat wordt door H_2S snel, doch slechts aan zijn oppervlakte aangegrepen; daarentegen loste het geheel op in kokend zwavelammonium, welke oplossing, na koncentreeren in vakuo bij 40°, en kristallisatie in een vakuum-exsikkator boven kalk, harde lichtgele naalden leverde eener verbinding, die zich ontleed in vakuo laat omkristalliseeren. De kleur der naalden is groenachtig geel; ze lossen in water helder op tot eene gele, sterk alkalisch reageerende oplossing, die aan de lucht snel oxydeert; ook de kristallen worden aan de lucht spoedig zwart. De analyse gaf een wisselend telluurgehalte, al naar de bereiding; zoo werd b.v. eens gevonden: 20.1 % $(NH_4)_6Te_2S_7$ ¹⁾, 42 % Te en 37.9 % S, wat sluit op eene formule $(NH_4)_6Te_2S_7$ ¹⁾.

¹⁾ De analyse dezer complexen is eene zeer tijdroovende bezigheid. Als men telluur alleen, en daarnevens *geen* zwavel te bepalen heeft, dan verdient m. i. de reductie-methode met SO_2 of $NaHSO_3$ nog immer de voorkeur boven andere. Hier moest steeds eerst alle Te, in sterk ammoniakale oplossing, door hydrazinehydraat bij kookhitte worden neergeslagen; eene reductie, die zeer langzaam en daarbij onvolledig plaats heeft, en veelal een keer of zes moest worden herhaald. De laatste sporen nog opgelost telluur verraden zich bij verwarming steeds door de fraaie staalblauwe kleur van het in kolloïdaal-toestand zich bevindende telluur; door zuurmaken der vloeistof wordt dit dan meestal geheel uitgeslagen, waarop men in sterk ammoniakale oplossing vervolgens nog eens de hydrazine-reductie kan toepassen ter kontrôle. Het telluur werd op een bij 100° gedroogd filter als zoodanig gewogen; het SO_2 als $BaSO_4$ bepaald; 't K als KCl of als $KClO_4$; de NH_3 als NH_4Cl . Vooral de analyse van 't barietzout is, om licht te begrijpen redenen, eene zaak van langen duur.

Op analoge wijze, werden de kaliumverbindingen bereid, uit het telluriet en telluraat met H_2S , oplossen van 't neerslag in de met H_2S verzadigde oplossing, of in KOH en daarna weder doorleiden van H_2S ; de oplossingen werden in vakuo ingedampt, en dan boven kalk te kristalliseeren gezet. Oogenschijnlijk ontstaan in al deze gevallen dezelfde gele verbindingen, die in rosetvormige aggregaten van harde, fijne naalden aanschietsen, in vochtigen toestand sterk naar H_2S rieken, en heldere, zeer oxydeerbare oplossingen leveren. Ook de vaste zouten zelve oxydeeren zeer snel, waarbij ze groengeel en ten slotte geheel zwart worden. Bij nauwkeurig onderzoek blijkt de kleur in fijne nuances nog al eens te verschillen, zelfs bij zoo uiterlijk dezelfde bereidingswijze. Het is niet gelukt, voor deze zouten eene konstante samenstelling te vinden; achtereenvolgens werd deze gevonden: 35.4% Te (berekend voor $K_6Te_2S_7$ 35.7%); 33.5% Te, 33.4% S en 33.1% K, wat sluit op eene formule $K_{10}Te_3S_{12}$; een ander maal (bij een uit K_2TeO_4 bereid produkt): 44.7% Te, 31.47% S en 23.7% K, wat beantwoorden zou aan $K_{12}S_{20}Te_7$; weer een ander maal, bij wat hooger temperatuur: 37.5% Te, 34.3% S en 28.1% K, wat tot eene formule $K_{12}Te_3S_{19}$ voert.

Het gedrag is in groote trekken analoog aan wat men bij de polysulfiden der alkaliën tegenover de zwavel vindt, waar, volgens KÜSTER's¹⁾ onderzoekingen aan zeer ingewikkelde evenwichten tusschen verschillende polysulfiden en hunne dissociatieprodukten in de oplossing te denken is; en aan dat van het seleen tegenover sulfideoplossingen, waar, gelijk MESSINGER²⁾ vond, een deel van de zwavel der hier aanwezige komplexe zwavel-zwavelwaterstofzuren, door seleen kan vervangen worden tot verbindingen als Na_2SSe_2 , enz., die dus 't type van een trisulfide hebben. Ook 't gedrag van 't amorphe telluur tegenover sulfideoplossingen, gelijk vroeger beschreven, stemt met de opvatting, dat men hier met zouten van komplexe telluur-zwavelwaterstofzuren te doen heeft, die in zulke oplossingen met elkaar in dissociatie-evenwichten staan, en bovendien sterk hydrolytisch gesplitst zijn. Vooral het type der trisulfiden blijkt hierbij dan van belang te zijn, nevens dat der disulfiden: $K_{10}S_{12}Te_3$ is van K_2S_3 af te leiden, door isomorfe vervanging van $\frac{1}{3}$ der S door Te: $K_6Te_2S_7$ en $(NH_4)_6Te_2S_7$, evenzoo van K_2S_3 , resp. $(NH_4)_2S_3$; daarentegen heeft b.v. $K_{12}Te_3S_{19}$ weer 't type van K_2S_2 , enz., enz.

§ 10. Terwijl nu deze verbindingen over 't algemeen in niet-meetbaren vorm optreden (het K-zout werd eenige malen als fraaie

¹⁾ KÜSTER, Z. f. anorg. Chem. **44**, 431.

²⁾ MESSINGER, Berl. Ber. **30** 805 (1897).

rhombische parallelpipeda, met zwakke dubbelbreking en zonder merkbaar dichroïsme verkregen), — gelukte het mij, om door oplossen van het uit kaliumtelluriet met H_2S verkregen zwarte neerslag in BaS -oplossing, ten slotte zeer groote gele, vlakkenrijke kristallen van een bariumzout te verkrijgen, welks analyse weliswaar niet altijd precies dezelfde waarden leverde, maar wier samenstelling toch heel dicht om $Ba_3S_7Te_2$ heenslingerde; eenmaal werd zelfs de normale samenstelling: 45,8% Ba; 25% S en 29,1% Te gevonden. Deze kristallen werden nauwkeurig onderzocht, en bleken daarbij zóó goed gebouwd te zijn, dat ze in hun habitus volstrekt niet aan iets als mengkristallen herinnerden, maar integendeel levendig den indruk maakten van aan eene werkelijke chemische verbinding toe te behooren. Hier volgen de daarbij gevondene data:

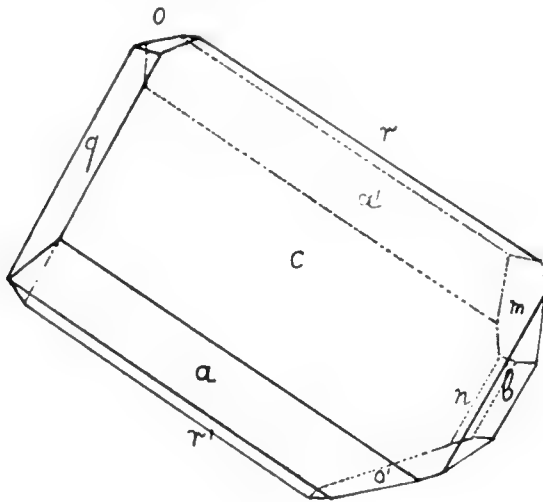


Fig. 4.

Groote gele, doorschijnende kristallen, welke aan de lucht vrij stabiel zijn, doch na langeren tijd grauwwachtig van kleur worden. Ze zijn goed gebouwd, leveren konstante hoekwaarden, en hebben kristallonomisch geheel 't aanzien van eene goedgedefinieerde verbinding met konstante samenstelling. De verbinding riekt, in vochtige lucht, sterk naar zwavelwaterstof, en wordt in water ontleed, onder afscheiding eener zwarte stof, die telluur en zwavel bevat.

Triklieen-pinaköüdaal.

$$a : b : c = 1.6835 : 1 : 1.5515$$

$$\begin{array}{ll} A = 109^{\circ} 43' & \alpha = 113^{\circ} 7\frac{1}{2}' \\ B = 122^{\circ} 10\frac{1}{2}' & \beta = 124^{\circ} 13' \\ C = 90^{\circ} 32' & \gamma = 77^{\circ} 39' \end{array}$$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, sterk voorheerschend; $a = \{100\}$ en $b = \{010\}$, ongeveer even goed ontwikkeld, en goed glanzend; $q = \{0\bar{1}1\}$ en $r = \{\bar{1}01\}$, even sterk ontwikkeld als a en b , en scherpe reflexen leverend; $o = \{11\bar{2}\}$, glanzend en vrij groot; $n = \{01\bar{2}\}$, klein doch glanzend; $v = \{11\bar{1}\}$, klein en ondergeschikt, meest met slechts een vlak aanwezig; $m = \{\bar{1}10\}$, goed ontwikkeld en glanzend; mist eveneens het parallele tegenvlak.

De habitus is diktafelig naar $\{001\}$, met geringe strekking in de richting der b -as.

Eene volkomene of duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden. Gemeten werden de volgende hoekwaarden:

	Gemeten:	Berekend:
$a : b = (100) : (010) =$	$*89^{\circ} 281$	—
$b : c = (010) : (001) =$	$*70 \quad 17$	—
$c : a = (001) : (100) =$	$*57 \quad 49^{1/2}$	—
$c : r = (001) : (\bar{1}01) =$	$*53 \quad 46^{1/2}$	—
$c : q = (001) : (0\bar{1}1) =$	$*65 \quad 45$	—
$o : b = (11\bar{2}) : (010) =$	$67 \quad 32$	$67^{\circ} \quad 36'$
$r : b = (\bar{1}01) : (010) =$	$68 \quad 47$	$68 \quad 47^{1/2}$
$a : q = (100) : (0\bar{1}1) =$	$67 \quad 29$	$67 \quad 26$
$c : o = (001) : (\bar{1}\bar{1}\bar{2}) =$	$50 \quad 5$	$49 \quad 49$
$a : r = (\bar{1}00) : (\bar{1}01) =$	$68 \quad 24$	$68 \quad 24$
$c : n = (00\bar{1}) : (01\bar{2}) =$	$38 \quad 17$	$38 \quad 27$
$n : q = (01\bar{2}) : (0\bar{1}\bar{1}) =$	$27 \quad 24$	$27 \quad 18$
$q : b = (01\bar{1}) : (010) =$	$43 \quad 56$	$43 \quad 58$
$r : o = (10\bar{1}) : (11\bar{2}) =$	$52 \quad 35$	$52 \quad 47$
$o : q = (11\bar{2}) : (01\bar{1}) =$	$32 \quad 21$	$32 \quad 19$
$m : b = (\bar{1}10) : (010) =$	$33 \quad 51$	$33 \quad 37$
$m : a = (\bar{1}10) : (\bar{1}00) =$	$56 \quad 41$	$56 \quad 55$
$m : r = (\bar{1}10) : (\bar{1}01) =$	$59 \quad 37$	$59 \quad 32^{1/2}$
$m : q = (\bar{1}10) : (01\bar{1}) =$	$35 \quad 10$	$35 \quad 21^{1/2}$
$\omega : b = (11\bar{1}) : (010) =$	$40 \quad 55$	$40 \quad 47$
$\omega : c = (11\bar{1}) : (00\bar{1}) =$	$85 \quad 46^{1/2}$	$85 \quad 48^{1/3}$
$\omega : a = (11\bar{1}) : (100) =$	$74 \quad 28$	$74 \quad 30^{1/2}$
$\omega : q = (11\bar{1}) : (01\bar{1}) =$	$38 \quad 5$	$38 \quad 3^{1/2}$

De overeenstemming tusschen waarneming en berekening is voortreffelijk.

Etstiguren werden niet verkregen: het kan dus zijn, -- gezien de acentrische habitus en vlakkenontwikkeling van enkele vormen, dat de symmetrie triklien-*pediaal* is. De ligging van het optische assenvlak kon niet bepaald worden. Die der optische hoofdrichtingen was zóódanig, dat de uitdoovingshoek op $\{001\}$ met de ribbe (001) : $(\bar{1}01)$, ongeveer 15° , daarentegen op $\{\bar{1}01\}$ met diezelfde ribbe, ongeveer 12° bedroeg, en wel met eene helling, die op $\{001\}$ van links-voren naar rechts-achteren verloopt, en op $\{\bar{1}01\}$ van rechts-boven naar links-beneden.

Ook hiër zou men dus met eene polysulfide-type BaS_3 te doen hebben, waarin $\frac{2}{3}$ van de zwavel door 't telluur vervangen is.

Pogingen, om deze laatste verbinding, bereid uit BaS en S , in meetbaren vorm te verkrijgen, en aldus de eventueele isomorfie tusschen beide stofsoorten als argument ter staving der genoemde opvatting te kunnen aanvoeren, bleven tot dusverre zonder resultaat.

§ 11. Bij elektrolyse van eene verdunde oplossing van 't kaliumzout, waarbij de platinaschaal als kathode, en eene schijfvormige platina-elektrode als anode fungeerden, scheen het, alsof er telluur aan beide elektroden werd neergeslagen. Echter is 't vrijkomen der zwarte stof aan de anode niet anders dan een oxydatie-verschijnsel.

De spanning aan de elektroden was 2.6 Volt, de stroomsterkte 0.05 Ampère: de zuurstof, die zich aan de anode vormt, oxydeert de voor zuurstof zoo gevoelige oplossing, onder afscheiding van telluurzwavelcomplexen, die gedeeltelijk aan de anode hangen blijven, gedeeltelijk boven haar, aan 't oppervlak der vloeistof zich verzamelen; bij langer doorleiden van den stroom lost het neerslag hier weer op, en wordt de anode blank. Ik heb mij er van overtuigd, dat 't aanhangende praecipitaat zoowel telluur als zwavel bevatte.

Daarentegen heeft de afzetting eener zwarte stof aan de kathode voortdurend plaats, en wel zeer langzaam: na twaalf uren was nog maar een klein gedeelte van 't zout, cirka anderhalve gram in 50 cm^3 gedistilleerd water, door den stroom ontleed. Dit zwarte neerslag is nu gebleken zuiver telluur te zijn, en deze waarneming zou dus oogenschijnlijk pleiten tegen de opvatting, als maakte het telluur een bestanddeel van het anion uit. Echter kan deze proef *niet* als een bewijs tegen die meening worden geldend gemaakt, sedert men een analoog geval kent bij de elektrolyse van het natriumsulfoantimoniaat ¹⁾, waarbij het antimoon zich eveneens schijnbaar naar de kathode begeeft, ofschoon het in 't zout als bestanddeel van het anion fungeert.

¹⁾ OST und KLAPPROTH, Zeits. f. angew. Chemie (1900), p. 827.

Het is bij deze proeven verder gebleken, at het metaal aan de elektriciteitsgeleiding wel heelemaal niet deelneemt; maar dat bij de elektrolyse het natriumsulfide der oplossing ontleed wordt, en òf het aan de kathode vrijkomende natrium zèlve, òf de daar ontwikkelde waterstof, alle antimoon sekundair precipiteert. Alleen bij héél weinig alkali-sulfide in de oplossing, bleek zich naar de anode ook 't anion SbS_4 te bewegen. Blijkbaar is de verklaring in ons geval dezelfde: ook hier ontstaat het telluur sekundair aan de kathode, terwijl zich, evenals bij de geciteerde proeven, aan de anode vrij ingewikkelde en niet in hun geheel te overziene oxydatie-verschijnselen voordoen. In èlk geval bewijst dus deze schijnbare tegenstrijdigheid volstrekt niet de onjuistheid der opvatting, als zouden de genoemde zouten als derivaten van komplexe telluurzwavelwaterstofzuren te beschouwen zijn. Het onderzoek in deze uiterst gekompliceerde kwestie wordt in de genoemde richting voortgezet.

§ 12. Resumeerende, wat bij deze onderzoekingen reeds thans gevonden werd, meen ik te mogen zeggen:

1. Dat de elementen telluur en zwavel met elkaar geene verbindingen, maar mengkristallen vormen.

2. Dat de elementen telluur, seleen en zwavel zich tegenover de sulfiden der alkali-metalen en der aardalkali-metalen geheel analoog gedragen, en aanleiding geven tot de vorming van zouten van komplexe sulfo-, seleno- of telluro-zwavelwaterstofzuren van verschillend type, en dat het volstrekt onmoedig is, om daarbij de intermediaire vorming van seleenzwavel- of telluurzwavel-verbindingen te veronderstellen.

3. Dat de plaatsing welke DUMAS aan het tellurium in de zwavelgroep heeft gegeven, als eerstvolgend homoloog van het selenium, volkomen gerechtvaardigd is, voor zooverre het wederzijdsch gedrag dezer elementen aangaat; en dat zwavel, selenium en tellurium eene natuurlijke triade van elementen vormen, die dichter bij elkaar staan, dan èlk humer bij de zuurstof staat.

Groningen, Anorg. Chem. Lab. der Rijks-Universiteit.

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN biedt eene mededeeling aan mede namens den Heer B. WINAWER: „*De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnerekken.*” (Eerste mededeeling).

1. Aan de magnetische splitsing der emissielijnen beantwoordt, wegens het innige verband dat tusschen emissie en absorptie bestaat, een geheel overeenkomstige verandering van de absorptielijnen. De donkere lijnen die men in een continu spectrum waarneemt, indien een bundel wit licht een absorbeerende vlam doorloopt, worden door een magnetisch veld gesplitst en gepolariseerd op dezelfde wijze als dit voor de emissielijnen is aangetoond. Reeds bij de eerste proeven van een onzer werd deze correspondentie tusschen emissie en absorptielijnen onder den invloed van magnetische krachten vastgesteld. Terwijl sedert onze kennis over de emissiespectra in een magnetisch veld belangrijk uitgebreid werd, is de studie van het omgekeerde effect, d. i. van de magnetische splitsing der absorptielijnen minder ver gevorderd.

Na de eerste proeven van den eerstgenoemde van ons beiden, is de verandering der absorptielijnen in een magnetisch veld bestudeerd door KÖNIG ¹⁾ en COTTON ²⁾, terwijl aan RIGHI ³⁾ eene uitvoerige studie te danken is, waarop wij naderhand gelegenheid hebben terug te komen. RIGHI's verhandeling bevat toch het eenige experimenteële onderzoek over het magnetisch effect bij waarneming schuin t. o. v. het magnetisch veld. In nauw verband met ons onderwerp staan eindelijk enkele waarnemingen die door LODGE ⁴⁾ en DAVIES zijn verricht, over den invloed van het veld op vlammen, die zelf „omgekeerde” lijnen geven.

De beschouwing van het omgekeerde effect vormt den grondslag van VOIGT's magneto-optische theoriën ⁵⁾; terwijl het onderzoek van LORENTZ ⁶⁾ over de magnetische splitsing voor het geval dat de waarnemingsrichting een willekeurigen hoek met de magnetische krachtlijnen maakt eveneens dit effect behandelt. De theorie wijst

¹⁾ KÖNIG, Ann. d. Phys. Bd. 62. 240, 1897.

²⁾ COTTON, Éclairage Electrique, 5 et 26 mars, 1898.

³⁾ RIGHI, Sul fenomeno di ZEEMAN nel caso generale d'un raggio luminosa comunque inclinato sulla direzione della forza magnetica. Mem. di. Bologna, 17 Dicembre 1899.

⁴⁾ LODGE and DAVIES, Proc. R. Soc. 61 413, 1897.

⁵⁾ W. VOIGT, Magneto- und Elektrooptik. Hoofdstuk IV en de daar genoemde verhandelingen.

⁶⁾ H. A. LORENTZ, Deze Verslagen, Dl. 18, 1909/10, p. 126.

op verschillende punten, die aan het experiment getoetst kunnen worden. Voor de natuurkunde van de zon is het omgekeerde effect van bijzonder belang geworden, sedert HALE¹⁾ ontdekte dat de donkere lijnen in het spectrum der zonnevlekken de karakteristieke verschijnselen der magnetische splitsing vertoonen.

In deze mededeeling zullen wij resultaten vermelden, welke betrekking hebben op de splitsing der beide Na-lijnen. Enkele van onze uitkomsten komen reeds bij bovengenoemde onderzoekers voor. Voor den samenhang is het noodzakelijk ze op te nemen.

De nu gevonden feiten en vroeger gegeven uitkomsten, bieden aanknoopingspunten ter verklaring van bijzonderheden in het spectrum der zonnevlekken. Hier en daar zullen wij daarop wijzen.

2. Het type en de relatieve grootte der splitsing van de emissielijnen van natrium, gewoonlijk door D_1 en D_2 aangeduid, is in de figuur gegeven.

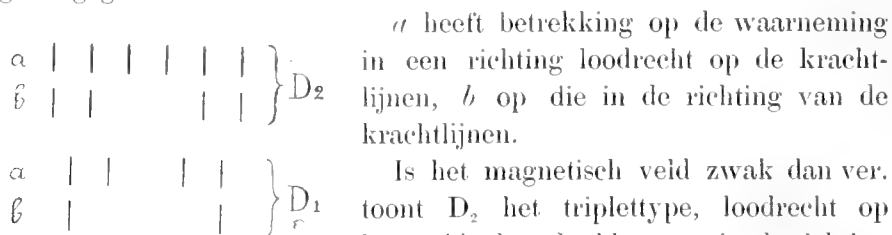


Fig. 1.

velden in beide hoofdrichtingen doubletten te geven.

De lijnen van FRAUNHOFER, die in de zonnevlekken door HALE zijn onderzocht, zijn verbreed, of veranderd in doubletten (dikwijls niet volkomen opgeloste quartetten), of in tripletten. Natriumdamp geeft dus juist die typen te zien, welke voor de astrophysica van bijzonder belang zijn; om deze reden en wegens de gemakkelijheid waarmede de genoemde damp in het magnetische veld kan worden gebracht, beginnen wij daarmede ons onderzoek.

3. De verklaring van het omgekeerde effect wordt geleverd door de welbekende wet van het meetrillen. Indien in een vlam onder den invloed van een magnetisch veld drie perioden van vrije trillingen mogelijk zijn, dan worden uit invallend wit licht trillingen van diezelfde drie perioden weggenomen. De absorptie is dus eene selectieve, die nog dit bijzondere heeft dat ze niet alleen op de periode maar ook op de trillingsrichting betrekking heeft. De middelste component van een triplet bijv. wordt in het emissiespectrum

¹⁾ G. E. HALE. On the probable existence of a magnetic field in sun-spots. Contributions from the Mount Wilson Solar Observatory Nr. 30. 1908

door trillingen evenwijdig aan de krachtlijnen teweégebracht. Uit invallend wit licht zullen alleen de trillingen, die met de periode en de trillingsrichting van de middelste component overeenkomen, worden geabsorbeerd. Trillingen, die loodrecht staan op de krachtlijnen en de periode der ongewijzigde lijn hebben, gaan ongehinderd door. Daarentegen wordt uit wit licht van de perioden der buitenste componenten juist het aandeel weggenomen dat loodrecht op de krachtlijnen trilt.

Uit deze zeer eenvoudige overweging, is nu duidelijk, wat men bij de gebezigde opstelling der proef moet waarnemen, indien met natuurlijk licht wordt gewerkt. Deze opstelling was de volgende: Het witte licht van de gloeiende positieve kool van een booglamp werd door een natriumvlam gezonden, die zich tusschen de polen van een *Dr Bois*-halfring electromagneet bevond. Dit licht viel op een stigmatischen spectroscop met een groot tralie van ROWLAND, terwijl de waarneming geschiedde in het spectrum der 1^{ste} orde.

Neemt men nu in een richting loodrecht op de krachtlijnen waar, dan ziet men met den spectroscop, als het veld sterk genoeg is en de damp de juiste dichtheid heeft, op het continue heldere spectrum, 4 donkere componenten bij D_1 , 6 donkere componenten bij D_2 , zooals ze onder *a* in Fig. 1 voor beide lijnen zijn afgebeeld.

In de richting van het veld worden de met *b* aangeduide groepen van lijnen waargenomen.

Al deze componenten worden dikwijls slechts diffuus en niet donker gezien. Immers, zooals na het boven opgemerkte dadelijk duidelijk zal zijn, wordt door elk der componenten slechts *de helft* van het invallend natuurlijk licht weggenomen. Is de dampdichtheid zeer gering dan ziet men zelfs geen of maar zeer zwakke sporen van absorptie.

4. Geheel anders wordt de zaak indien een Nicol voor of achter het magnetisch veld in den lichtbundel is geplaatst is. Men kan dan (wij onderstellen dat loodrecht op het veld wordt waargenomen), de absorptie lijnen zeer scherp en zwart waarnemen.

Is het magnetisch veld zooals gewoonlijk horizontaal, dan ziet men bij D_1 twee, bij D_2 vier buitenste componenten, indien de Nicol zoo geplaatst is, dat alleen de verticale trillingen doorgaan.

Draait men den Nicol over een hoek van 90° dan ziet men zoowel bij D_2 als bij D_1 alleen de beide horizontale componenten.

Laat een bundel natuurlijk wit licht langs de as van een electromagneet met doorboorde kernen loopen, terwijl de gemagnetiseerde damp zich in het veld bevindt. Met behulp van de combinatie van een kwartgolfplaatje en een Nicol kan men dan of de rechts

of wel de links circulair gepolariseerde componenten uitblussen.

Wij noemen eene combinatie van kwartgolfplaatje en nicol waardoor rechts circulair gepolariseerd licht wordt doorgelaten een rechts circulaire analysator en omgekeerd. Bezigt men in ons geval een rechts circulaire analysator dan wordt de absorptielijn, welke aan een rechts circulair gepolariseerde emissielijn beantwoordt duidelijk en donker gezien.

Deze eenvoudige zaak vermelden wij hier omdat er wel eens vergissingen over begaan zijn.

5. Ten einde gelijktijdig een overzicht over het gedrag der verticale en horizontale trillingen te krijgen kan men naar het voorbeeld van CORST en KÖNIG met behulp van een kalkspath rhomboëder twee beelden ontwerpen van een horizontale spleet van geschikt gekozen breedte, welke zich dicht bij het magnetisch veld bevindt.

Evenzoo kan men links en rechts circulaire trillingen gescheiden krijgen door tusschen de spleet en den rhomboëder een parallelipedum van FRESNEL te plaatsen.

Het is echter van bijzondere beteekenis behalve het gedrag der lijnen in het gepolariseerde licht ook dat in natuurlijk licht te kennen. Men kan daartoe nog een afzonderlijke opname maken nadat de rhomboëder of de rhomboëder met het FRESNELprisma is weggenomen. Men moet dan zorgen dat de dampdichtheid bij beide proeven dezelfde is. Dit is zeer moeielijk te verwezenlijken.

Veel eenvoudiger en zekerder, en met de halve moeite, bereikt men het gewenschte doel door de spleet bij het magnetisch veld zoo wijd te nemen en den rhomboëder zoo te kiezen dat de beide beelden door den rhomboëder gevormd gedeeltelijk over elkaar vallen. Men krijgt dan drie strooken, waarvan de middelste de verschijnselen vertoont zooals die zonder polarisatieapparaat worden waargenomen. (Zie fig. 2).

De bovenste en benedenste strooken laten den invloed van het gepolariseerde licht op het absorptieverschijnsel zien.



Fig. 2.

De waarnemingen waarover in deze verhandeling wordt gesproken zijn met behulp van de beschreven methode verricht. Alle bijzonderheden van het verschijnsel kan men daardoor gelijktijdig overzien;

ook photographisch konden wij ze, ten minste in hoofdtrekken, vastleggen, zooals door de platen, die wij aan ons werk toevoegen, wordt bewezen.

6. Zijn de emissielijnen niet fijn of is het magnetische veld zwak, dan zullen de componenten eener magnetisch gesplitste lijn elkaar

gedeeltelijk overdekken. Deze gedeeltelijke overdekking geeft aanleiding tot bijzonderheden, die vooral in het absorptieverschijnsel op den voorgrond komen en die zich ook moeten voordoen in het spectrum der zonnevlekken.

Het best wordt de aard dezer bijzonderheden opgehelderd door een paar voorbeelden, waartoe wij het geval van het triplet en het doublet zullen bespreken.

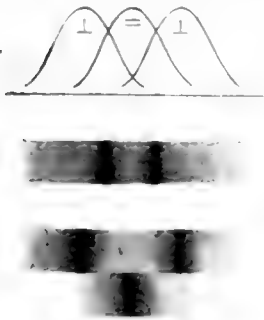


Fig. 3.

Laten de kromme lijnen in figuur 3, de intensiteiten van de 3 componenten van een triplet aangeven, dat in een richting loodrecht op de krachtlijnen wordt waargenomen.

In het absorptiespectrum zal men, indien natuurlijk licht de aan magnetische krachten onderworpen lichtbron doorstraalt, 2 zwarte banden waarnemen, beantwoordende aan de golflengten waarvoor zoowel verticaal als horizontaal trillend licht wordt geabsorbeerd. Omgrensd worden deze zwarte lijnen door minder donkere deelen, waarin slechts een der hoofdtrillingen wordt geabsorbeerd, terwijl de andere ongehinderd doorgaat. (vg. §§ 3 en 4).

Wordt thans een Nicol in den lichtbundel geplaatst zoodat alleen de verticale trillingen worden doorgelaten dan krijgt men twee donkere lijnen te zien. Het donkerste deel dezer componenten beantwoordt aan de hoogste punten der krommen, die op de verticale trillingen betrekking hebben.

De afstand der componenten kan grooter zijn dan die der eerst beschreven donkere lijnen.

7. In de richting der krachtlijnen zal men bij een gedeeltelijke overdekking der componenten in het absorptiespectrum eene zwarte lijn waarnemen, omgrensd door twee minder donkere deelen. Schematisch is dit geval in fig. 4 weergegeven. Een circulaire analysator zal beide componenten kunnen scheiden.

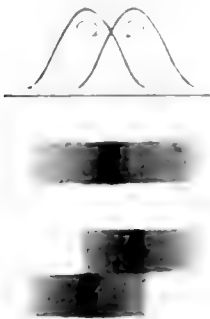


Fig. 4.

Past men deze beschouwingen toe op de magnetische splitsing in het spectrum der zonnevlekken dan komt men tot de gevolgtrekking dat in het algemeen eene splitsing van lijnen in het vlekken-spectrum, duidelijker en grooter zal worden door het gebruik van analysatoren.

Ook kunnen eerst onzichtbare lijnen na inschakeling van een Nicol in den lichtbundel duidelijk voor den dag komen.

Verschillende eigenaardigheden die men in de lichtverdeling der vlekkenlijnen waarneemt, herinneren sterk aan de nu beschouwde superpositie-verschijnselen ¹⁾: zie verder § 19.

8. Bedekken elkaar lijnen, waarin de trillingsrichting dezelfde is, dan behoeven natuurlijk geen zwarte lijnen te ontstaan als de lichtbron, die het continue spectrum geeft, ongepolariseerd licht uitzendt.

Deze opmerking kan van dienst zijn, indien men op meer samengestelde splitsingen de beschouwingen der vorige paragrafen toepast. De superpositie van de beide buitenste componenten van het sextet, type D_2 , geven geen, die van een der binnenste componenten met de naastbij gelegen buitenste daarentegen wel, aanleiding tot zwarte lijnen in het absorptie spectrum.

Ook bij het quartet, type D_1 , ziet men gemakkelijk in, dat zwarte lijnen kunnen ontstaan. De meest donkere deelen zullen iets dichtër bij het centrum der volledige splitsingsfiguur liggen dan de uiterste componenten van het quartet.

Het is wel niet noodig dit door figuren op te helderen. Voorbeelden der bedoelde werkingen komen zoo aanstonds ter sprake.

9. Onze waarnemingen en spectrogrammen hebben behalve op beide hoofdrichtingen (loodrecht op en parallel aan de krachtlijnen), ook op richtingen schuin ten opzichte van het veld betrekking.

In deze eerste mededeeling worden waarnemingen besproken die op 5 waarden van den scherpen hoek tusschen het veld en de richting van voortplanting van den lichtbundel (φ bij VOIGT, ϑ bij LORENTZ) betrekking hebben.

Deze waarden zijn: 90° , 0° , 60° , 45° , $36^\circ - 39^\circ$. Het waarnemingsmateriaal bij deze hoeken bestaat uit omstreeks 100 opnamen, over ongeveer 50 platen verdeeld.

10. *Waarnemingen loodrecht op de krachtlijnen.*

In het bovenste van de drie strooken, welke bij de in § 5 beschreven waarnemingsmethode aanwezig zijn, trilt het licht verticaal; in de onderste horizontaal, terwijl met natuurlijk, ongepolariseerd licht in het midden wordt waargenomen.

Onder den invloed van het magnetische veld ziet men dus in de bovenste strook de verticaal trillende componenten als scherpe zwarte lijnen; in de onderste strook de horizontaal trillende binnenste componenten. Het quartet van de lijn D_1 , het sextet van de lijn D_2 ,

¹⁾ Een figuur equivalent aan de hier gegeven over den invloed van het over elkaar vallen der magnetisch gesplitste componenten is voor *emissie*-lijnen reeds gegeven in ZEEMAN, Doublets and Triplets in the Spectrum produced by external magnetic forces. Phil. Mag. July 1897 § 7.

kan men op deze wijze goed waarnemen. Eene kleine storing wordt teweeggebracht door de fijne absorptielijntjes welke van den electrischen lichtboog zelf afkomstig zijn. Het hangt van toevallige omstandigheden af of deze lijnen meer of minder sterk zijn, soms zijn ze niet, in andere gevallen duidelijk zichtbaar. Op sommige onzer spectrogrammen zal men ze aantreffen, ze storen niet, indien men eenmaal weet dat ze met het onderwerp, dat ons bezig houdt, niets hebben uit te staan.

Wat nu de middelste strook aangaat moge aan de reeds tevoren gemaakte opmerking worden herinnerd dat het beeld der splitsing wegens de slechts partieele absorptie hier veel zwakker en flauwer uit moet vallen. (§ 3).

De gedeeltelijke overdekking van componenten geeft, althans bij dunnen damp, de meest in het oog vallende lijnen (§ 6 en 7).

Bij het quartet bijv. zal men inplaats van 4 componenten er soms slechts twee waarnemen die tusschen de buitenste en binnenste inliggen.

Wij hebben proeven genomen met verschillende dichtheid van den damp en brengen de waargenomen verschijnselen tot drie fasen terug:

1o. De damp is *zeer dun*. De componenten zijn in het bovenste en benedenste veld duidelijk zichtbaar. In de middelste strook is de absorptie nauw merkbaar (Plaat I, fig. 1) of men ziet de componenten bij het quartet en sextet geheel gescheiden, maar flauw (Plaat I, fig. 2). Merkwaardig is bij deze phase van het verschijnsel het contrast in intensiteit tusschen de lijnen in de middelste en uiterste strooken. Dit contrast treedt bij waarneming met het oog nog duidelijker op. Om de werking te photographieren is de dichtheid gebracht boven de waarde, die ons oog de eerste sporen van absorptie doet vermoeden.

2o. Damp van gemiddelde dichtheid.

Terwijl in de bovenste en benedenste strook de componenten niet meer afzonderlijk zichtbaar zijn of alleen bij het quartet, vindt in de middelste strook eene superpositie plaats van den in § 6 beschreven aard. Men krijgt in plaats van het quartet een schijnbaar doublet, waarvan de componenten tusschen de buitenste en binnenste van het quartet liggen. Op Plaat I, fig. 3 is dit zeer goed zichtbaar.

Wat het sextet (bijv. D_2) aangaat, zoo is het verschijnsel dikwijls gecompliceerd.

Soms neemt men bij deze dampdichtheid de over elkaar vallende componenten als gelijkmatige, breede schaduwen waar.

Soms is het superpositie verschijnsel waar te nemen. De lijn D_2 , op fig. 3, Plaat I is dicht bij het laatstgenoemde stadium.

3o. Is de damp nog *dichter*, dan worden de componenten zeer breed en men kan nog maar juist zien dat er eene magnetische

verandering is. Men kan nu de *polarisatie aan de randen* der breede lijn waarnemen. Dit is op Plaat I, Fig. 4 zichtbaar, en beantwoordt aan de eerste, met breede lijnen en in zwakke velden waargenomen, magnetische splitsingen der emissie-lijnen.

Bij nog grootere absorptie is geen invloed van het veld meer te constateeren.

Al deze fasen treden met groote regelmatigheid op. Kent men op een of andere wijze de veldsterkte dan zou men ook omgekeerd, bij een gegeven oplossend vermogen van den spectroscop uit den aard van het verschijnsel een besluit over de dichtheid van den damp kunnen trekken.

In het spectrum der zonnevlekken schijnen de tot dusver waargenomen splitsingen onder de fasen, die boven als 2^{de} en 3^{de} zijn aangeduid te vallen. HALE leidt uit het gemeten bedrag van het magnetisch effect in de vlekken, vergeleken met bepalingen in het laboratorium, eene veldsterkte in de zonnevlekken af van de orde van 4000 Gauss. Men zou geneigd zijn hieruit af te leiden dat de dichtheid van den damp in de lagen die het absorptie spectrum der zonnevlekken teweeg brengen slechts gering kan zijn. Hierbij komt nog dat reeds de ongelijkmatige verdeeling van de veldsterkten in zonnevlekken aanleiding moet geven tot mindere scherpte der lijnen, zoodat deze waarschijnlijk onscherper schijnen dan zij zijn. Intusschen geven hier de opmerkingen van KAYSER ¹⁾ over onze kennis van den invloed van druk en temperatuur op spectra aanleiding tot groote voorzichtigheid.

11. *Waarnemingen evenwijdig aan de krachtlijnen.*

De absorbeerende damp bevindt zich bij deze waarnemingen tusschen de doorboorde kernen. ·

In het continue spectrum neemt men, na aanzetten van het magnetisch veld, 2 donkere lijnen bij de lijn D₁, 4 bij de lijn D₂ waar, overeenkomstig de schematische figuur 1. Ook nu kan de absorptie slechts onvolledig zijn, daar van bepaalde golflengten wel rechts, maar geen links circulair gepolariseerd licht wordt geabsorbeerd of omgekeerd. Om de splitsing en den polarisatietoestand goed waar te nemen wordt een parallelipipedum van FRESNEL met zijn hoofdvlakken onder 45° met den horizont opgesteld terwijl een horizontale spleet in eene der doorboorde kernen wordt gebracht. Het prisma van FRESNEL polariseert het circulaire licht lineair. Met een kalkspaaht-rhomboëder krijgt men ook nu weder drie velden. Het eerste stadium (zeer dunne damp) is op plaat I in fig. 5 afgebeeld.

¹⁾ KAYSER, Handbuch, Kapitel V, Bd. II.

Bij damp van gemiddelde dichtheid (2e phase) treden de in §§ 7 en 8 genoemde, in fig. 2 schematisch voorgestelde, overdekkingsverschijnselen op. Men neemt dan in de middelste strook één lijn waar, op de oorspronkelijke plaats, schijnbaar ongesplitst en aan beide kanten omgeven door een gebied van zwakke absorptie. Dit komt zoowel bij het doublet als bij het quartet voor en is op Plaat I fig. 6 vooral bij D_2 duidelijk zichtbaar.

12. *Waarnemingen schuin t.o.v. de krachtlijnen.*

Volgens de elementaire theorie der magnetische splitsing van LORENTZ zal men in een richting, die een hoek ϑ met de krachtlijnen maakt, in het algemeen een triplet waarnemen, waarvan de buitenste componenten elliptisch gepolariseerd zijn¹⁾.

De trillingsellips, die den polarisatietoestand van den eenen component, met de periode $T_0 + v$ karakteriseert, kan beschouwd worden als de projectie op het golffront van den cirkel, waarin het electron met de periode $T_0 + v$ rondloopt, en die in een vlak loodrecht op de krachtlijnen staat. v is eene kleine grootheid. De bewegingsrichting van het rondgaande electron leert ook die in de trillingsellips kennen. De verhouding der assen wordt als 1 tot $\cos \vartheta$. Voor de andere uiterste component, met de periode $T_0 - v$ geldt met de noodige wijziging hetzelfde.

Wat de lijn met de periode T_0 aangaat, deze blijft lineair gepolariseerd. De trillingen van de middelste component liggen in het door den straal en de krachtlijn gaande vlak en de amplitudo is evenredig met $\sin \vartheta$.

Wordt $\vartheta = 0$, d.w.z. neemt men het longitudinale effect waar, dan houdt men alleen de cirkelbewegingen over.

Dit alles geldt voor zeer fijne spectraallijnen in een sterk veld, wanneer dus de onderlinge afstand der componenten veel grooter is dan hunne breedte.

Volgens VOIGT en LORENTZ moeten zoodra dit niet meer het geval is andere bijzonderheden zich voordoen. Wij komen daarop later terug.

In het algemeen worden de overwegingen der elementaire theorie bevestigd. De buitenste componenten worden ook bij het quartet en sextet ellipsen, gelijk reeds RICH²⁾ heeft waargenomen.

Eene afwijking van de elementaire theorie, die men hier echter strikt genomen niet mag toepassen, doet zich vooral daarin gevoelen

¹⁾ Vg. RICH l. c.

²⁾ RICH's waarnemingen l. c. hebben alle betrekking op een hoek van omstreeks 54° , waarbij volgens de elementaire theorie de drie componenten van een triplet gelijke intensiteit moeten hebben.

dat de middelste component van het quartet tot een hoek $\vartheta = 45^\circ$ nauwelijks zwakker wordt.

13. Waarnemingen bij $\vartheta = 60^\circ$.

Indien met den kalkspaat-rhomboëder wordt waargenomen, blijft het beeld zooals het bij het transversale effect het geval was. Toch zou men bij aanwezigheid van eene elliptische polarisatie in de onderste strook lijnen, die aan de buitenste componenten beantwoorden, verwachten.

Met zeer dunnen damp en met dien van gemiddelde dichtheid, ziet men echter ongeveer niets daarvan.

Plaat II geeft in Fig. 7 met dunnen damp de eerste phase, met dichteren damp (Fig. 8) de tweede phase. Alléén bij het sextet kan men sporen van absorptie waarnemen, die op een elliptischen vorm der trillingen wijzen.

Ontwijfelbaar wordt de ellipticiteit vastgesteld door het prisma van FRESNEL te gebruiken, dat met zijn hoofdvlak onder een hoek van 45° met den horizont is geplaatst. Men krijgt dan het door Fig. 9 geïllustreerde beeld.

Bij het quartet zijn nu de uiterste componenten naar rood of naar violet, afhankelijk van de strook waar de waarneming geschiedt, belangrijk verzwakt; bij het sextet zijn ze zelfs geheel verdwenen. Dit alles bewijst dat de uiterste componenten elliptisch gepolariseerd zijn. Want waren ze lineair, zooals men uit de waarnemingen met het kalkspaat kristal misschien zou willen besluiten, dan zouden uit het parallelipedum zoowel de componenten in het bovenste als in het benedenste veld circulair gepolariseerd uittreden, terwijl geen onderscheid tusschen de componenten naar rood en naar violet zou mogen bestaan. Hiertegen pleit een opname als Fig. 9.

14. Een punt moet nog worden opgehelderd. Waaraan is het toe te schrijven dat met een kalkspaat rhomboëder niet is vast te stellen dat er ellipticiteit is, terwijl deze met het prisma van FRESNEL zoo duidelijk voor den dag komt?

Laat eene elliptische trilling waarvan de verticale as b , de horizontale as a is, op het parallelipedum vallen, waarvan het hoofdvlak onder een azimuth van 45° staat.

Men bewijst gemakkelijk dat dan uit het prisma van FRESNEL eene elliptische beweging komt met dezelfde assenrichting als de oorspronkelijke en met de assenverhouding $\frac{a_1}{b_1} = \frac{b-a}{b+a}$, terwijl de oorspronkelijke verhouding $\frac{a}{b}$ was.

Is a klein in verhouding tot b (een smalle ellips) dan komt eene

meer cirkelvormige trilling uit het prisma van FRESNEL, die beter kan worden waargenomen.

Al naar de grootte van a , kan $\frac{a}{b}$ *groter* of *kleiner* zijn, dan $\frac{b-a}{b+a}$.

Hierbij kunnen zich de volgende gevallen voordoen.

1°. bij *zeer kleine* a is $\frac{b-a}{b+a} > \frac{a}{b}$.

2°. bij $a = 0,414 b$, is $\frac{b-a}{b+a} = \frac{a}{b}$.

3°. bij $a > 0,414 b$, is $\frac{b-a}{b+a} < \frac{a}{b}$.

Wij kunnen dit op de door ons gekozen opstelling van de proef toepassen.

Naar gelang van de grootte van a kunnen zich twee gevallen voordoen. Of men kan de beide assen van de ellips met de combinatie FRESNEL-prisma en rhomboëder zien (*dit is het geval bij het quartet*) (D₁, Fig. 9), terwijl zonder FRESNEL-prisma de kleine as onzichtbaar blijft, of wel men kan met een kalkspath rhomboëder de kleine as zien, terwijl ze met het prisma van FRESNEL onzichtbaar blijft, omdat $\frac{b-a}{b+a}$ een te kleine waarde heeft. *Dit is het geval bij het sextet*, (D₂, Fig. 9).

In dikken damp komen inderdaad bij het sextet, indien men met den rhomboëder waarneemt, de componenten in de benedenste strook voor den dag (Zie Fig. 8, D₂). De theoretische beteekenis dezer uitkomst zal later worden toegelicht.

Na inschakeling van het prisma van FRESNEL blijft de componente links van de middelste lijn (kleine as der ellips) onzichtbaar. (Fig. 9, D₂, onderste strook).

Wij mogen besluiten dat bij den nu onderzochten hoek de ellipticiteit der buitenste componenten bij het *sextet* (de verhouding $\frac{a}{b}$) groter is dan bij het *quartet* (en ook groter dan 0,414).

15. Waarnemingen bij $\vartheta = 45^\circ$.

De opnamen met den rhomboëder alleen, laten duidelijk de ellipticiteit zien der buitenste componenten.

Ook bij gemiddelde dichtheid van den damp is het verschijnsel bij D₂ reeds zeer goed zichtbaar (Plaat II Fig 10). Merkwaardig is de geringe verandering welke de intensiteit van de middelste componenten van het *quartet* heeft ondergaan. Volgens de elementaire

theorie zou *bij een triplet* de intensiteit reeds beneden *de helft* hebben moeten zinken.

16. Een FRESNEL-prisma gecombineerd met een kalkspaat-rhomboëder in den lichtbundel gebracht, laat thans de component aan eene zijde ook bij het quartet geheel verdwijnen, wat bij een hoek van 60° alleen bij het sextet het geval was.

17. Waarnemingen bij $\vartheta = 39^\circ$.

De elliptische polarisatie is goed waarneembaar met behulp van den rhomboëder. (Plaat II, Fig. 12, Plaat III, Fig. 13) ook in dunnen damp.

De middelste componenten van het quartet zijn nu toch zwakker geworden, dan de buitenste componenten.

Plaat III, Fig. 13 in het bijzonder doet zien dat de componenten van D_1 in het onderste veld werkelijk zwakker zijn. Immers ze zijn duidelijk dunner dan die in het bovenste veld.

18. Naarmate de hoek tusschen lichtbundel en veld afneemt, moet de gebezigde veldsterkte ook afnemen. Dit hangt daarmede samen dat de poolstukken met steeds kleineren tophoek en dus steeds ongunstiger voor de veldsterkte, moesten worden genomen om de lichtstralen onder den gewenschten hoek met de krachtlijnen ongehinderd door het veld te zenden.

Onze foto's toonen het verminderen der splitsing zeer duidelijk.

In een volgende mededeeling zullen proëven bij nog kleineren hoek ϑ en in het bijzonder ook de verschijnselen, die de theorie voorziet bij het meer en meer naderen der componenten, worden besproken. Tevens zullen wij dan gelegenheid hebben om de uitkomsten van metingen over de gedaante der trillingsellipsen mede te deelen. Wij hebben ons thans beperkt tot een algemeen overzicht van het gebied van het omgekeerde effect en wilden dit aan een paar bijzondere gevallen toelichten.

19. Typen van splitsingen in zonnevlekken en laboratorium:

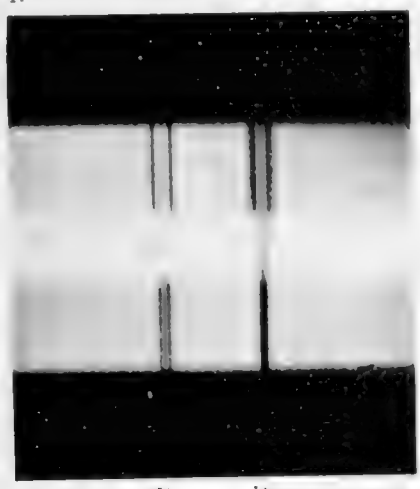
In één richting willen we nog iets verder gaan.

De splitsing van lijnen in een *niet homogeen* veld werd in eene vroegere verhandeling besproken ¹⁾. De toen verkregen uitkomsten en de waarnemingen opgenomen in deze mededeeling kunnen ons helpen bij het beter begrijpen van enkele der door HALE waargenomen

¹⁾ ZEEMAN. Deze Verslagen. April 1906, November 1907.

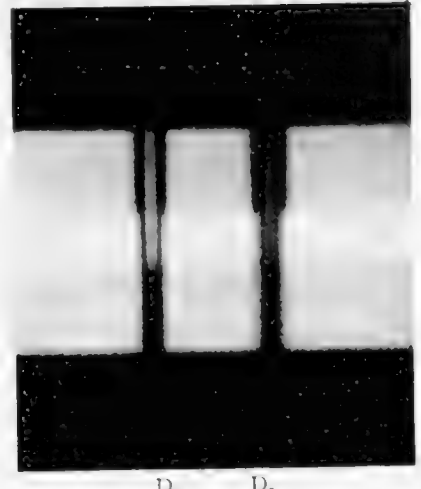
P. Zeeman en B. Winawer. Magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken.

1.



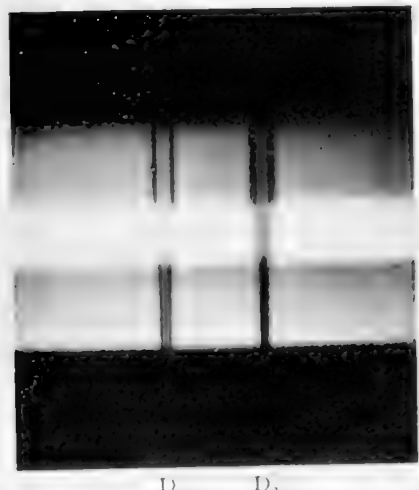
D₁ D₂

3.



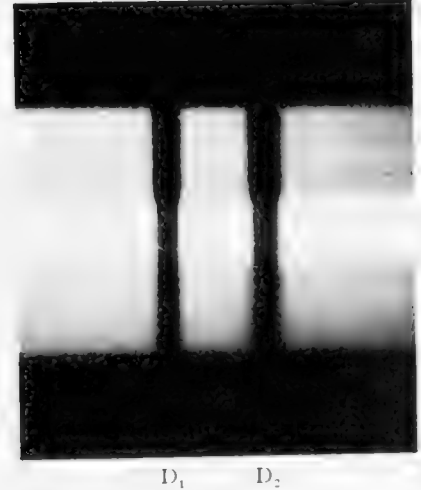
D₁ D₂

2.



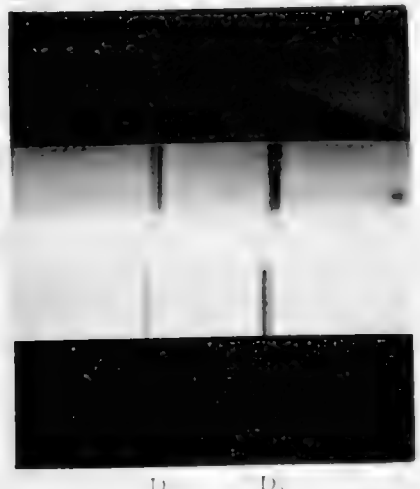
D₁ D₂

4.



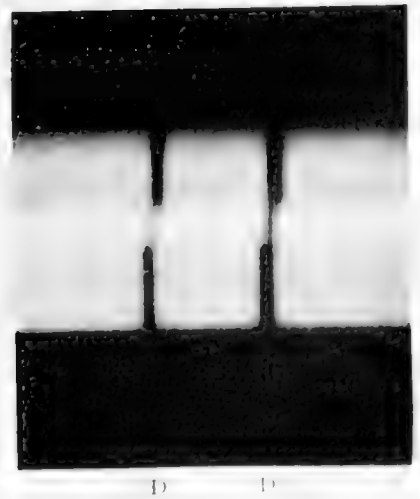
D₁ D₂

5.

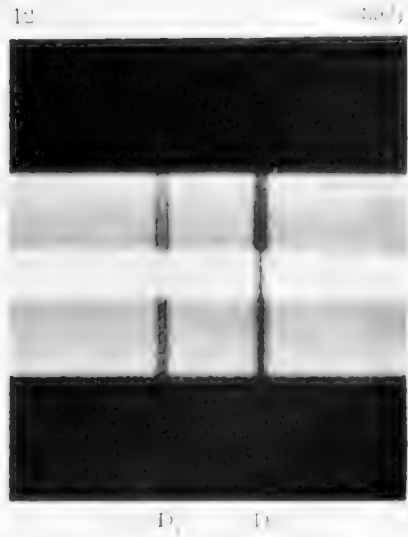
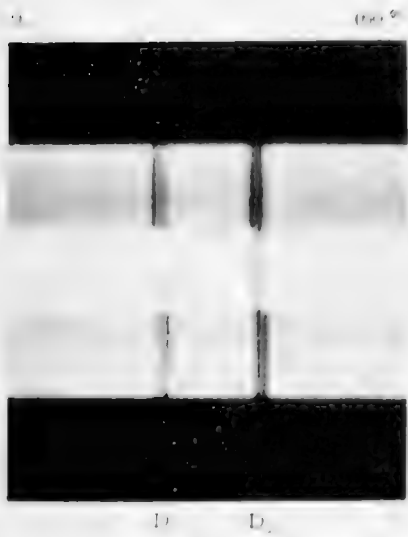
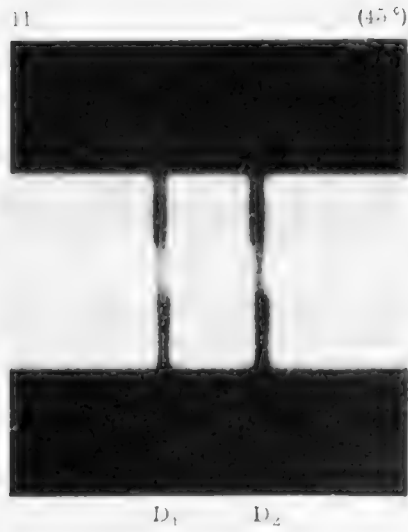
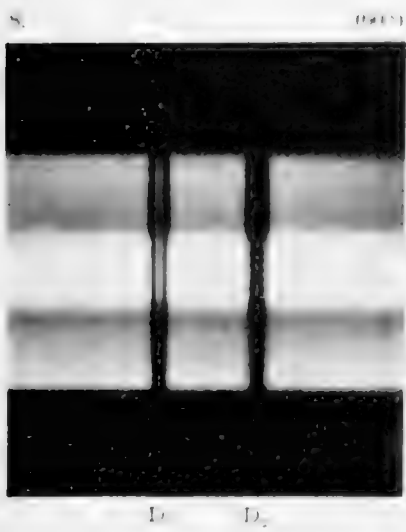
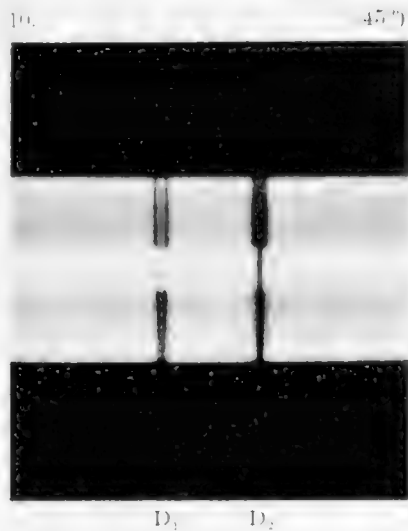
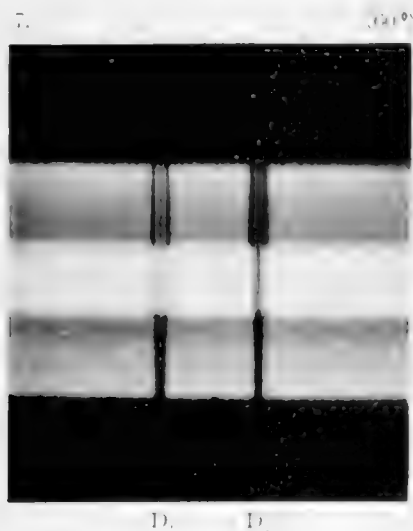


D₁ D₂

6.

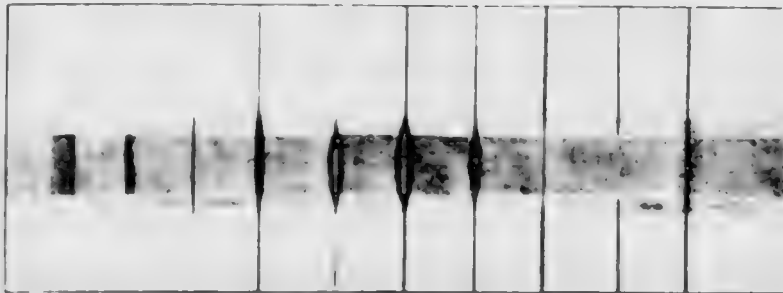


D₁ D₂



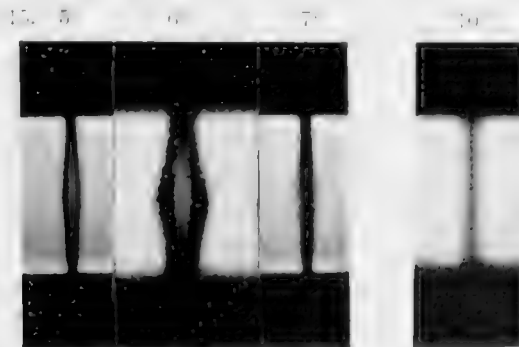


13. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



Typen van lijnen in zonnevlekken. (Mitchell).

1. en 2. verbreedde lijnen met helder middendeel. 3. verbreedde en verzwakte lijn. 4. gevleugelde „winged“ lijn. 5. gevleugelde „winged“ lijn met helder middendeel. 6. gevleugelde „winged“ lijn met zwakke lijnen. 7. verbreedde en verzwakte lijn. 8. gevleugelde „winged“ lijn met zwakke lijnen. 9. gevleugelde „winged“ lijn met zwakke lijnen. 10. gevleugelde „winged“ lijn met zwakke lijnen.



15. 1-7. Typen van splitsing in het Lorentz-magnetische veld. 8-10. Splitsing van magnetisch componenten.

verschijnselen. Wij komen daarop in het vervolg terug. Voor het oogenblik schijnt het interessant vast te knoopen aan MITCHELL's beschrijvingen van verschillende typen van zonnevlekken spectra, in den vorm die daaraan door de International Solar Union is gegeven. Aan het 2^{de} deel der verhandelingen¹⁾ van deze vereeniging is fig. 14, Plaat III ontleend. Het meest karakteristiek zijn de typen 5, 6, 7 en 10 der figuur. Het type 9 valt misschien onder de in onze § 7 genoemde zonder Nicol onzichtbare lijnen. In fig. 15 zijn opgenomen splitsingen, zooals zij, zonder een Nicol of anderen analysator te bezigen, zich voordoen. 5', 6', 7' zijn opgenomen in niet homogene velden. 5' is het quartet van D_1 loodrecht op het veld waargenomen; 6' het sextet van D_2 bij het longitudinaal effect in een, in het midden zeer sterk, niet homogeen veld; 7' eveneens D_2 in een veld met zwakker maximum, bij waarneming loodrecht op het veld. Het type 10' heeft betrekking op D_2 bij waarneming evenwijdig aan het veld. Het veld is homogeen. De splitsing is een voorbeeld van het superpositie verschijnsel behandeld in § 7. Treffend is de analogie met het onder 10 fig. 14 afgebeelde type der gevleugelde („winged") lijn. Zonder waarnemingen over den polarisatietoestand moet men natuurlijk zeer voorzichtig zijn om typen als corresponderende te beschouwen.

VERKLARING DER PLATEN I—III.

De figuren 1—13 op de platen zijn omstreëks 12-malige vergrootingen van de door het tralie geleverde beelden van de absorptielijnen D_1 en D_2 in een magnetisch veld.

Van de drie strooken van deze figuren hebben de buitenste betrekking op (verschillend) gepolariseerd licht, terwijl in het midden het verschijnsel, zooals het in natuurlijk licht zich voordoet, is afgebeeld.

PLAAT I. 1, 2, 3, 4. waarneming \perp krachtlijnen bij toenemende dampdichtheid.
5, 6. waarneming // krachtlijnen bij verschillende dampdichtheid.

PLAAT II. 7, 8. waarneming bij $\mathcal{S} = 60^\circ$ met kalkspaaht rhomboëder alleen.
9, $\mathcal{S} = 60^\circ$, kalkspaaht rhomboëder en FRESNEL-prisma.
10, 11, $\mathcal{S} = 45^\circ$.
12, $\mathcal{S} = 39^\circ$.

PLAAT III. 13, $\mathcal{S} = 39^\circ$.
14, Typen van lijnen in zonnevlekken volgens MITCHELL.
15, 5', 6' 7', splitsingen in niet homogene velden. 10' overdekkingsverschijnsel § 7.

¹⁾ Transactions Intern. Union Solar Research, p. 199 en vgl. 1908.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer H. BETH: „*De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen.*” (Eerste gedeelte).

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE)

Inleiding.

§ 1. In zijne verhandeling: „Over zekere trillingen van hooger orde van abnormale intensiteit (relatietrillingen) bij mechanismen met meerdere graden van vrijheid” (Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Deel V, No. 8, 1897; Archives Néerlandaises T. I, série II, p. 229—260) heeft prof. KORTEWEG de reeksontwikkelingen neergeschreven voor de principale coördinaten van een willekeurig mechanisme met meerdere graden van vrijheid, dat om een stabielen evenwichtsstand kleine slingeringen uitvoert. Uit deze reeksontwikkelingen kon worden afgeleid dat het in een bepaald geval mogelijk was, dat sommige trillingen van hooger orde, die in het algemeen ten opzichte van de principale trillingen een geringe intensiteit hebben, een abnormaal groote intensiteit verkrijgen; dit is het geval wanneer tusschen de trillingsgetallen n_x, n_y enz. der principale trillingen een relatie bestaat van den vorm

$$pn_x^2 + qn_y^2 + \dots = \varrho;$$

waarin p, q enz. positieve of negatieve geheele getallen zijn, en ϱ ten opzichte van n_x, n_y enz. een kleine grootheid is, die relatierest genoemd wordt.

Verder bleek echter dat wanneer $S \leq 4$ (S is de som van de volstrekte waarden van p, q enz.) en tevens $\varrho = 0$ de bovenbedoelde reeksontwikkelingen hare geldigheid verliezen, zoodat langs een anderen weg moet worden onderzocht wat in het genoemde geval van de beweging wordt.

In het volgende nu zal dit worden onderzocht voor een mechanisme met twee graden van vrijheid. Als grondslag voor het onderzoek wordt een zeer eenvoudig mechanisme gekozen, n.l. een materieel punt, dat zich zonder wrijving, doch onder de werking der zwaartekracht, over een gegeven oppervlak beweegt in de buurt van het laagste punt. Telkens als een der gevallen $S \leq 4$ is besproken, zal tot een willekeurig mechanisme met twee graden van vrijheid worden overgegaan.

Beweging op den bodem van een oppervlak.

§ 2. We beginnen derhalve met de behandeling van het eenvoudige mechanisme, dat we tot grondslag voor ons onderzoek gekozen hebben. Wanneer het oppervlak in den omtrek van het laagste punt O positief gekromd is, vlak XY raakvlak is in O , de XZ - en YZ -vlakken de hoofddoorsneden van het oppervlak in dat punt zijn, terwijl de Z -as naar boven positief gerekend wordt, dan neemt de vergelijking van het oppervlak in de buurt van O de gedaante aan :

$$z = \frac{1}{g} (c_1 x^2 + c_2 y^2 + d_1 x^3 + d_2 x^2 y + d_3 x y^2 + d_4 y^3 + \dots); \quad (1)$$

waarin c_1 en c_2 positief zijn.

De bewegingsvergelijkingen van het stoffelijk punt luiden alsdan :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\partial z}{\partial x} (g + \ddot{z}) &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{\partial z}{\partial y} (g + \ddot{z}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Van (1) gebruik makende om \ddot{z} te elimineeren, worden ze :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\partial z}{\partial x} (g + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \ddot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{\partial z}{\partial y} (g + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \ddot{y}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Zij h de kleine grootheid (klein b.v. ten opzichte van de hoofdkromtestralen R_1 en R_2 van het oppervlak in O), die de orde van hoegrootheid bepaalt van x en y , dan worden de vergelijkingen (2) met weglating van de termen van orde h^2 en hooger :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2c_1 x &= 0, \\ \ddot{y} + 2c_2 y &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Deze vergelijkingen zijn in het algemeene geval voldoende om tot de oplossing bij eerste benadering te komen. Deze luidt dan:

$$\left. \begin{aligned} x &= Ah \cos (n_1 t + \lambda), \\ y &= Bh \cos (n_2 t + \mu); \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

waarin $n_1 = \sqrt{2c_1}$, $n_2 = \sqrt{2c_2}$.

Ah , Bh , λ en μ zijn integratiekonstanten; van A en B onderstellen we dat het getallen van matige grootte zijn.

Bij eerste benadering beschrijft dus de horizontale projectie van het bewegende punt een Lissajous'sche kromme. Deze is gesloten als

$pm_1 = qn_2$, waarin p en q geheel. Is $pm_1 = qn_2 + \varrho$, dan is de beschreven kromme niet gesloten, maar zij bestaat uit een aaneenschakeling van trekken, die ieder op zichzelf weinig van een gesloten kromme afwijken. Deze laatste gesloten krommen hebben echter verschillende gedaanten, die beantwoorden aan verschillende waarden van het phaseverschil. Zij zijn alle beschreven in den rechtehoek met $2Ah$ en $2 Bh$ als zijden.

§ 3. Wanneer we de termen van hooger orde willen in aanmerking nemen, die in (2) voorkomen, dan hebben we in het algemeen slechts kleine wijzigingen aan de eerste benadering aan te brengen. Deze wijzigingen zijn echter niet klein in het geval dat de betrekking bestaat:

$$pm_1 = qn_2 + \varrho;$$

waarin $S \equiv p + q \leq 4$ en $\frac{\varrho}{n_1}$ zeer klein is (wat hier de uitdrukking „zeer klein” beteekent, zal later blijken).

Wanneer we beproeven door toepassing van de methode van de opvolgende benaderingen, uitgaande van (4) als eerste benadering, reeksontwikkelingen voor x en y te vinden, dan zullen we, wanneer $\frac{\varrho}{n_1}$ klein is, bij substitutie der uitdrukkingen (4) in de termen van hooger orde van (2), en ontwikkeling der produkten en machten der cosinussen, periodieke termen vinden, die nagenoeg dezelfde periode hebben als de principale trilling, waarop de vergelijking, in welke de bedoelde term voorkomt, meer in het bijzonder betrekking heeft. Zulke termen nu in de bewegingsvergelijkingen veroorzaken in de reeksontwikkelingen voor x en y termen met abnormaal groote amplitude. Deze amplituden kunnen de orde h bereiken, en zelfs nog grooter schijnen te zijn.

Dit bewijst dat voor het onderstelde geval onze eerste benadering niet juist geweest is. Er blijken in de bewegingsvergelijkingen termen aanwezig te zijn van hooger orde, die reeds op de eerste benadering invloed hebben. We zullen dus in de vergelijkingen (2) moeten zoeken, welke termen aanleiding geven tot de mislukking van de toepassing der methode van de opvolgende benaderingen. Deze termen zullen we moeten opnemen in de verkorte vergelijkingen, die dienen om de eerste benadering te bepalen.

We bespreken in volgorde de gevallen:

$$S = 3 (2n_1 = n_2 + \varrho), \quad S = 4 (3n_1 = n_2 + \varrho), \quad S = 2 (n_1 = n_2 + \varrho).$$

$S = 3$) *Zuivere relatie.*

§ 4. We denken $q = 0$, dus

$$n_2 = 2n_1.$$

In de bewegingsvergelijkingen komen voor het eerst onder de termen van de orde h^2 termen voor, die volgens het in § 3 gezegde in de verkorte vergelijkingen moeten worden opgenomen. Het zijn: in de eerste vergelijking $2d_2xy$, in de tweede d_2x^2 . Dit zijn onder de bedoelde termen de belangrijkste. De overige termen van hooger orde weglatende hebben we dus te beschouwen:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + n_1^2 x + 2d_2 xy &= 0, \\ \ddot{y} + 4n_1^2 y + d_2 x^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

We kunnen dit stelsel ook schrijven als volgt:

$$\left. \begin{aligned} x + n_1^2 x - \frac{\partial R}{\partial x} &= 0, \\ \ddot{y} + 4n_1^2 y - \frac{\partial R}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \right\}$$

waarin dan

$$R = -d_2 x^2 y.$$

Hierop passen we toe de methode van de variatie der kanonieke konstanten. Dit beteekent, zooals men weet, dat eerst worden opgelost de vergelijkingen, die ontstaan, als men in (5) de termen $\frac{\partial R}{\partial x}$ en $\frac{\partial R}{\partial y}$ weg laat, in welke oplossing 4 willekeurige konstanten voorkomen; vervolgens wordt nagegaan welke functiën van den tijd de zooeven als konstanten beschouwde grootheden moeten zijn, opdat de aldus opgevatte uitdrukkingen voor x en y de oplossing voorstellen van de volledige vergelijkingen met $\frac{\partial R}{\partial x}$ en $\frac{\partial R}{\partial y}$. De vergelijkingen, waarin $\frac{\partial R}{\partial x}$ en $\frac{\partial R}{\partial y}$ ontbreken, worden opgelost volgens de methode van HAMILTON-JACOBI, opdat de konstanten, die we krijgen, een kanoniek stelsel zullen vormen.

Zijn $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ en β_2 de kanonieke konstanten, dan zal bij substitutie van de gevonden uitdrukkingen voor x en y in R , deze R een functie worden van $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ en t . De veranderlijkheid der α 's en β 's met den tijd wordt dan gegeven door:

1) In het tweede gedeelte van dit opstel hopen we de gevallen $S = 2$ en $S = 4$ te behandelen.

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \dots (6)$$

Voor het geval dat R een functie is van de α 's en de β 's alleen, dus t niet expliciet bevat, heeft het stelsel als integraal

$$R = \text{konstant.} \quad \dots \dots \dots (7)$$

§ 5. Wanneer we nu de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + n_1^2 x &= 0, \\ \ddot{y} + 4n_1^2 y &= 0, \end{aligned} \right\}$$

die uit (5) ontstaan door weglating van de termen $\frac{\partial R}{\partial x}$ en $\frac{\partial R}{\partial y}$, volgens de methode HAMILTON-JACOBI oplossen, dan kunnen we komen tot:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{\alpha_1}}{n_1} \cos(n_1 t + 2n_1 \beta_1), \\ y &= \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2n_1} \cos(2n_1 t + 4n_1 \beta_2); \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

waarin $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ en β_2 een kanoniek stelsel konstanten vormen. We moeten ons α_1 en α_2 van de orde h^2 denken, aangezien de amplitudines der x - en y -trillingen van de orde h moeten zijn.

Substitutie van (8) in $R = -d_2 x^2 y$ levert 3 termen op

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2}}{4n_1^3} \cos(2n_1 t + 4n_1 \beta_2), \quad \frac{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2}}{8n_1^3} \cos\{4n_1 t + 4n_1 (\beta_1 + \beta_2)\} \text{ en} \\ &\frac{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2}}{8n_1^3} \cos 4n_1 (\beta_1 - \beta_2), \end{aligned}$$

iedere term vermenigvuldigd met $-d_2$.

De eerste twee termen bevatten t expliciet; afziende van de veranderlijkheid der α 's en β 's kunnen we zeggen dat die termen periodiek zijn, terwijl de periode vergelijkbaar is met die der principale trillingen. De laatste term echter bevat t niet expliciet. Van belang voor de eerste benadering is nu alleen deze laatste term, de eerste twee laten we weg (hierop komen we in § 6 terug).

We nemen dus:

$$R = -\frac{d_2}{8n_1^3} \alpha_1 \sqrt{\alpha_2} \cos 4n_1 (\beta_1 - \beta_2).$$

Hierdoor krijgt stelsel (6) de gedaante:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt} &= 2 N m_1 \alpha_1 \alpha_2^{\frac{1}{2}} \sin \varphi, \\
\frac{d\alpha_2}{dt} &= -2 N m_1 \alpha_1 \alpha_2^{\frac{1}{2}} \sin \varphi, \\
\frac{d\beta_1}{dt} &= m_1 \alpha_2^{\frac{1}{2}} \cos \varphi, \\
\frac{d\beta_2}{dt} &= \frac{1}{2} m_1 \alpha_1 \alpha_2^{-\frac{1}{2}} \cos \varphi;
\end{aligned}
\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

waarin N is geschreven voor $n_2 = 2n_1$; voorts is:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{d_2}{N^3}, \\
\varphi &= 2 N (\beta_1 - \beta_2).
\end{aligned}$$

Daar t in R niet expliciet optreedt, hebben we volgens het slot van § 4 als integraal:

$$\alpha_1 \sqrt{\alpha_2} \cos \varphi = \text{konstant} \dots \dots \dots (10)$$

Verder lezen we uit (9) onmiddellijk dat

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt} = 0.$$

Dus is:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \text{konstant} \dots \dots \dots (11)$$

een andere integraal.

Dit laatste geeft ons aanleiding een nieuwe veranderlijke ξ in te voeren, zóó dat:

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} R_0^2 N^2 h^2 \xi \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{4} R_0^2 N^2 h^2 (1 - \xi).$$

ξ is dan steeds gelegen tusschen 0 en 1, R_0 is een matig getal.

Daardoor krijgt (10) de gedaante:

$$\xi \sqrt{1 - \xi} \cos \varphi = K; \dots \dots \dots (12)$$

waarin K een konstante voorstelt.

De eerste vergelijking van (9) wordt:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d_2 R_0}{N} \xi \sqrt{1 - \xi} \sin \varphi \cdot h \dots \dots \dots (13)$$

Door eliminatie van φ tusschen (12) en (13) komen we tot:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 (1 - \xi) - K^2}} = \pm \frac{d_2 R_0}{N} h \cdot dt.$$

Zij nu:

$$j(\xi) = \xi^2 (1 - \xi) - K^2,$$

dan is voor de initiaalwaarde van ξ , $f(\xi) > 0$. Voor $\xi = 0$ en $\xi = 1$ is $f(\xi) < 0$. Dus heeft de vergelijking $f(\xi) = 0$ twee wortels tusschen 0 en 1.

K^2 kan dus niet alle waarden hebben; de mogelijke waarden van K^2 liggen tusschen twee grenzen; hierop en op de bijzondere gevallen, die aan de grenswaarden van K^2 beantwoorden, komen we in § 9 terug.

De wortels, die in het algemeene geval de vergelijking

$$\xi^2(1-\xi) - K^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (14)$$

tusschen 0 en 1 heeft, noemen we ξ_1 en ξ_2 , waarbij we onderstellen: $\xi_2 > \xi_1$. De derde wortel is negatief; we noemen hem $-\lambda$.

De differentiaalbetrekking tusschen ξ en t kan dus geschreven worden:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1)(\xi + \lambda)}} = \pm \frac{d_2 R_0 h}{N} dt. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ξ kan dus met behulp van elliptische functiën in den tijd worden uitgedrukt. Zij verandert periodiek tusschen de grenzen ξ_1 en ξ_2 .

Nu is met behulp van (12) ook φ als functie van den tijd te berekenen. En evenzoo β_1 en β_2 , daar de laatste 2 vergelijkingen van (9) kunnen geschreven worden:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{dt} &= \frac{d_2 R_0 K}{2 N^2} \frac{h}{\xi}, \\ \frac{d\beta_2}{dt} &= \frac{d_2 R_0 K}{4 N^2} \frac{h}{1-\xi} \end{aligned}$$

Dus zijn nu ook x en y als functien van den tijd bekend ¹⁾.

In fig. 1 is de betrekking (12) tusschen ξ en φ op poolcoördinaten voorgesteld, φ is genomen als poolhoek, $\sqrt{1-\xi}$ als voerstraal. De geteekende cirkel heeft de eenheid tot straal. De krommen veranderen met de waarde van K . Voor $K > 0$ liggen de krommen rechts van de rechte $\varphi = \frac{\pi}{2}$, voor $K < 0$ links ervan. $K = 0$ geeft degeneratie tot de rechte $\varphi = \frac{\pi}{2}$ en den cirkel $\xi = 0$. Voor de maximale positieve en negatieve waarde van K ($K = \pm \frac{2}{9} \sqrt{3}$) heeft de kromme zich tot een geïsoleerd punt samengetrokken. De bijzondere gevallen der beweging, die behooren bij $K = 0$ en bij $K = \pm \frac{2}{9} \sqrt{3}$ worden in § 9 besproken.

¹⁾ Deze berekeningen vindt men uitgevoerd in mijn proefschrift, dat eerstdaags verschijnen zal.

§ 6. Wanneer de astronomen in de Theorie der storingen van de beweging der planeten door toepassing van de methode van LAGRANGE reeksontwikkelingen voor de coördinaten der planeten of de elementen hunner banen zoeken, dan kunnen termen te voorschijn komen met abnormaal groote coëfficiënten tengevolge van kleine deelen, die door de integratie ontstaan. Dat gebeurt als tusschen de omgekeerde waarden van de omloopstijden van eenige planeten een lineaire relatie met geheele coëfficiënten nagenoeg is vervuld. Behalve naar eenige andere eigenschappen onderscheidt men dan de termen ook naar hunne klasse, waaronder men verstaat

$$a - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2};$$

waarin a de exponent van u (een klein getal dat de orde van hoegrootheid der storingsfunctie aangeeft), m de exponent van t , m' de exponent van den kleinen deeler voorstelt, zooals ze in de coëfficiënt van den bedoelden term voorkomen. De termen van de laagste klasse zijn het nu, waarmede men vooral rekening moet houden als men de reeksontwikkelingen voor een lang tijdsverloop wil doen geldig zijn. Door DELAUNAY is een methode aangegeven om deze termen van de laagste klasse te bepalen. Zij bestaat in hoofdzaak daarin dat men in de storingsfunctie alle termen van korte periode (periode vergelijkbaar met de omloopstijden der planeten) weglaat en van de overige de belangrijkste behoudt. (verg. b.v. II. POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, pag. 341).

Het vraagstuk dat wij nu bespreken heeft met het genoemde uit de storingstheorie veel overeenkomst. In de vorige § is dan ook bij het weglaten van sommige termen in R gehandeld in navolging van hetgeen men in de theorie der storingen doet.

Dat de weggelaten termen inderdaad geen invloed hebben op de eerste benadering blijkt gemakkelijk als men nagaat welke termen b.v. in α_1 door opneming van zulk een term te voorschijn komen.

Osculeerende krommen.

§ 7. In § 5 hebben we gevonden dat de beweging van de horizontale projectie van het materiële punt kon worden voorgesteld door:

$$x = \frac{\sqrt{a_1}}{n_1} \cos(n_1 t + 2n_1 \beta_1),$$

$$y = \frac{\sqrt{a_2}}{2n_1} \cos(2n_1 t + 4n_1 \beta_2);$$

waarin α_1 , α_2 , β_1 en β_2 langzaam veranderlijk zijn; immers zijn

$\frac{d\alpha_1}{dt}$ en $\frac{d\alpha_2}{dt}$ van de orde h^3 , $\frac{d\beta_1}{dt}$ en $\frac{d\beta_2}{dt}$ van de orde h (verg. (9)).

Voor ieder willekeurig oogenblik hebben de α 's en β 's een bepaalde waarde. Aan deze waarden beantwoordt een zekere Lissajous'sche kromme. Deze kromme zullen we de osculeerende kromme voor het bedoelde oogenblik noemen, welke naam in de theorie der storingen gebruikelijk is. (Men zie b.v. H. POINCARÉ, *Leçons de mécanique céleste*. T. I pag. 90). De osculeerende krommen zijn dus in ons vraagstuk de welbekende Lissajous'sche figuren voor twee octaven.

Door verandering van den oorsprong van tijd kunnen we de vergelijkingen eener osculeerende kromme schrijven:

$$x = R_0 h \sqrt{\zeta} \cos n_1 t$$

$$y = \frac{1}{2} R_0 h \sqrt{1-\zeta} \cos (2n_1 t - \varphi)$$

waarin evenals in § 5 ζ is ingevoerd in plaats van α_1 en α_2 ; φ beteekent ook hier $4n_1(\beta_1 - \beta_2)$.

We zien nu dat φ de waarde van het phaseverschil is, waaraan de osculeerende kromme beantwoordt, wanneer de phase geteld wordt van af het oogenblik der grootste uitwijking naar rechts.

Daar de amplitudines der x - en y -trillingen resp. $R_0 h \sqrt{\zeta}$ en $\frac{1}{2} R_0 h \sqrt{1-\zeta}$ zijn, liggen de boekpunten van de rechthoeken, waarin de osculeerende krommen beschreven worden, op den omtrek eener ellips, met groote as volgens de x -as en $2 R_0 h$ lang, en kleine as volgens de y -as en $R_0 h$ lang.

ζ verandert tusschen de waarden ζ_1 en ζ_2 , dus de rechthoeken, waarin osculeerende krommen beschreven worden, liggen ook tusschen twee uitersten.

Daar verder volgens (12) bij iedere waarde van ζ een waarde van $\cos \varphi$ behoort, zijn alle osculeerende krommen nu te construeeren.

Uit (13) volgt dat voor de uiterste waarden van ζ , $\sin \varphi = 0$; in de uiterste rechthoeken worden dus parabolen beschreven.

De hoogte boven het punt O van het dubbelpunt eener willekeurige osculeerende kromme is $-\frac{R_0 h K}{2\zeta}$, waaruit blijkt dat de dubbelpunten, en ook de toppen der parabolen, alle aan eenzelfde zijde van O liggen, en wel voor positieve waarden van K beneden O (zie fig. 2).

Omhullende der osculeerende krommen.

§ 8. Voeren we de eliminatie van t en φ uit tusschen:

$$x = R_0 h \sqrt{\zeta} \cos n_1 t, \quad y = \frac{1}{2} R_0 h \sqrt{1-\zeta} \cos (2n_1 t - \varphi) \text{ en}$$

$$\xi \sqrt{1 - \xi \cos \varphi} = K;$$

dan vinden we voor de vergelijking der osculeerende krommen met ξ als parameter:

$$\xi^2 (X^2 + Y^2) + \xi (KY - X^2 - X^4) + \left(\frac{1}{4} K^2 - 2KX^2 Y + X^4 \right) = 0;$$

waar ter wille eener vereenvoudigde schrijfwijze gesteld is:

$$X \text{ voor } \frac{x}{R_0 h}, \quad Y \text{ voor } \frac{y}{R_0 h}.$$

De omhullende heeft dus tot vergelijking:

$$4(X^2 + Y^2) \left(\frac{1}{4} K^2 - 2KX^2 Y + X^4 \right) - (KY - X^2 - X^4)^2 = 0.$$

Na herleiding en deeling door X^2 (de Y -as is de meetkundige plaats der dubbelpunten) kan zij geschreven worden:

$$(K - 4Y^2 - 3X^2 Y + Y^2)^2 = (X^2 + 4Y^2 - 1)^2 (X^2 + Y^2),$$

of, als we K oplossen:

$$K = - (Y \pm \sqrt{X^2 + Y^2}) \cdot (Y \pm \sqrt{X^2 + Y^2})^2.$$

Stellende

$$Y \pm \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{K}{U},$$

gaat zij over in

$$K = - \frac{K}{U} + \frac{K^3}{U^3},$$

$$U^3 (1 - U) - K^2 = 0.$$

Nu heeft deze derdemachtsvergelijking dezelfde coëfficiënten als (14), dus heeft zij ook dezelfde wortels. De omhullende is dus gedegeneereerd tot de 3 parabolen, welke tot vergelijking hebben

$$U = \xi_1, \quad U = \xi_2, \quad U = -\lambda;$$

die na herleiding, en wederinvoering van x en y de gedaante aannemen:

$$2 \frac{y}{R_0 h} - \frac{\xi_1}{K} \cdot \frac{x^2}{R_0^2 h^2} + \frac{K}{\xi_1} = 0 \quad \xi_1 \text{ parabool,}$$

$$2 \frac{y}{R_0 h} - \frac{\xi_2}{K} \cdot \frac{x^2}{R_0^2 h^2} + \frac{K}{\xi_2} = 0 \quad \xi_2 \text{ parabool,}$$

$$2 \frac{y}{R_0 h} + \frac{\lambda}{K} \cdot \frac{x^2}{R_0^2 h^2} - \frac{K}{\lambda} = 0 \quad \lambda \text{ parabool.}$$

De parabolen zijn confociaal en hebben O als brandpunt. Als K positief is, hebben de ξ_1 en ξ_2 parabool de opening naar boven, de λ parabool naar beneden (dit geval is voorgesteld in fig. 2, waar

behalve eenige osculeerende krommen ook de omhullende parabolen zijn aangebracht).

Bijzondere gevallen.

§ 9. Aan het slot van § 5 zagen we dat zich twee bijzondere gevallen kunnen voordoen, n.l. als $K = 0$ en als $K = \pm \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

A. $K = 0$. Uit de betrekking

$$\xi \sqrt{1-\xi} \cos \varphi = K$$

leiden we 3 mogelijkheden af:

1°. $\xi = 0$. De beweging blijft bepaald tot het YZ -vlak.

2°. $\xi = 1$. De beweging blijft bepaald tot het XZ -vlak. Deze bewegingsvorm blijkt echter bij substitutie van $x \neq 0$ en $y = 0$ in (5) niet mogelijk te zijn.

3°. $\cos \varphi = 0$, dus $\varphi = \frac{\pi}{2}$ of $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ bij voortduring. De osculeerende krommen hebben het dubbelpunt in O . De bewegingsvorm nadert asymptotisch tot een beweging in het YZ -vlak. Wat er van de omhullende parabolen wordt, is in fig. 3 voorgesteld, in welke fig. ook eenige osculeerende krommen geteekend zijn.

B. $K = \pm \frac{2}{9}\sqrt{3}$. Dan is $\xi_1 = \xi_2 = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$. Nu is bij voortduring $\cos \varphi = \pm 1$, dus $\varphi = 0$ of $\varphi = \pi$. Er wordt voortdurend dezelfde parabool doorlopen, in welke ook de ξ_1 en ξ_2 parabool zijn samengevallen (fig. 4). Wanneer K een kleine verandering ondergaat, vallen ξ_1 en ξ_2 dicht bij elkaar. Deze bewegingsvorm is dus stabiel.

$$S = 3, \quad \frac{\rho}{n_1} \text{ is van de orde } \frac{h}{R_1}.$$

§ 10. De reeksontwikkelingen, door Prof. KORTWEG neergeschreven, verliezen voor $S = 3$ hare convergentie zoodra $\frac{h}{R_1}$ van de orde $\frac{\rho}{n_1}$ wordt (pag. 18 van zijn verhandeling), of m.a.w. zoodra $\frac{\rho}{n_1}$ van de orde $\frac{h}{R_1}$ wordt. Dit geval gaan we nu bespreken.

We nemen weer voor eerste benadering:

$$x = \frac{\sqrt{a_1}}{n_1} \cos(n_1 t + 2n_1 \beta_1),$$

$$y = \frac{\sqrt{a_2}}{2n_1} \cos(2n_1 t + 4n_1 \beta_2);$$

en moeten onderzoeken welke gedaante nu de functie R aanneemt. Aangezien we ondersteld hebben dat

$$2n_1 = n_2 + \varrho$$

is, zouden de termen van de orde h in de bewegingsvergelijkingen worden:

$$\ddot{x} + n_1^2 x$$

en

$$\ddot{y} + (2n_1 - \varrho)^2 y.$$

Omdat $\frac{\varrho}{n_1}$ van de orde $\frac{h}{R_1}$ is en we geen termen van hooger orde dan h^2 in de vergelijkingen opnemen, kunnen we voor het laatste ook schrijven:

$$\ddot{y} + 4n_1^2 y - 4n_1 \varrho y.$$

Als we dus bovenstaande uitdrukkingen voor x en y als eerste benadering nemen, dan hebben we in de functie R behalve den term $-d_2 x^2 y$ ook een term $2n_1 \varrho y^2$ op te nemen.

In de uitdrukking

$$-d_2 x^2 y + 2n_1 \varrho y^2$$

substitueeren we de uitdrukkingen voor x en y en laten weg de termen, die t expliciet bevatten. Zoo komen we tot

$$R = -\frac{d_2}{N^3} a_1 \sqrt{a_2} \cos \varphi + \frac{\varrho}{2N} a_2;$$

waarin weder N voor $n_2 + \varrho = 2n_1$ gesteld is.

De vergelijkingen ter bepaling der α 's en β 's worden:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = 2N m_1 a_1 a_2^{\frac{1}{2}} \sin \varphi,$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -2N m_1 a_1 a_2^{\frac{1}{2}} \sin \varphi,$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = m_1 a_2^{\frac{1}{2}} \cos \varphi,$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} = -\varrho' h + \frac{1}{2} m_1 a_1 a_2^{-\frac{1}{2}} \cos \varphi;$$

waarin

$$m_1 = \frac{d_2}{N^3}, \quad \varrho' = \frac{\varrho}{2Nh}.$$

We zien weer dat

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt} = 0,$$

dus

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \text{constant};$$

waarom we stellen :

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} R_0^2 N^2 h^2 \zeta \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{4} R_0^2 N^2 h^2 (1 - \zeta).$$

Voorts hebben we volgens § 4 als integraal van het stelsel :

$$-\frac{d_2}{N^3} \alpha_1 \sqrt{\alpha_2} \cos \varphi + \frac{\varrho}{2N} \alpha_2 = \text{konstant.}$$

ζ invoerende wordt het :

$$\zeta \sqrt{1-\zeta} \cos \varphi - \varrho'' (1-\zeta) = K;$$

waarin K een konstante, en

$$\varrho'' = \frac{\varrho N}{d_2 R_0 h}.$$

Op dezelfde wijze als dit voor het geval $\varrho = 0$ gedaan is, kunnen we weer de differentiaalbetrekking tusschen ζ en t neerschrijven en volgens den daar aangegeven weg x en y vinden als functiën van den tijd; zij krijgen volkomen dezelfde gedaante als voor $\varrho = 0$ ¹⁾.

ζ blijft in het algemeen weer tusschen twee grenzen ζ_1 en ζ_2 periodiek veranderen, ζ_1 en ζ_2 zijn de positieve wortels van :

$$\zeta^2 (1-\zeta) - \{K + \varrho'' (1-\zeta)\}^2 = 0.$$

Er is nu echter een belangrijk verschil tusschen de gevallen $\varrho = 0$ en ϱ van de orde h .

§ 11. Dit verschil merken we het duidelijkst op als we de gevonden betrekking tusschen ζ en φ op poolcoördinaten voorstellen. Stellen we

$$\varrho''' = -\varrho'',$$

dan wordt :

$$\cos \varphi = \frac{K - \varrho''' + \varrho''' \zeta}{\zeta \sqrt{1-\zeta}}.$$

We nemen φ als poolhoek, $\sqrt{1-\zeta}$ als voerstraal, en gaan de gedaante der krommen na voor positieve waarden van ϱ''' en voor alle mogelijke waarden van K .

Voor $K = \varrho'''$ is er degeneratie tot den cirkel $\zeta = 0$ en een rechte, loodrecht op den oorsprong der hoeken op een afstand ϱ''' van den pool O_1 . We hebben nu twee gevallen: $\varrho''' < 1$ en $\varrho''' > 1$.

$\varrho''' < 1$. Gaan we nu de gedaante der krommen na voor verschillende waarden van K . Voor $K > \varrho'''$ liggen zij links van de zoeven genoemde rechte lijn, voor toenemende waarde van K trekken zij zich meer en meer samen tot ze voor de maximale waarde van K ,

¹⁾ Men zie Hoofdstuk V van mijn proefschrift.

die bij zekere waarde van q''' behoort, een geïsoleerd punt geven. Is $0 < K < q'''$, dan omgeven de krommen het punt O_1 ; is $K = 0$ dan hebben we een kromme door O_1 , voor $K < 0$ liggen ze links van O_1 ; voor de minimale waarde van K krijgen we weer een geïsoleerd punt (fig. 5).

Voor toenemende waarden van q''' beweegt zich de rechte, die de gebieden $K > q'''$ en $K < q'''$ scheidt, naar rechts. Het gebied $K > q'''$ wordt kleiner en verdwijnt voor $q''' = 1$. Voor $q''' \geq 1$ hebben we dus alleen krommen die O_1 omgeven, en krommen links van O_1 . Bij verdere toename van q''' nadert het overgebleven geïsoleerde punt tot O_1 en de verder van O_1 verwijderde krommen naderen tot cirkels.

Voor $q = 0$ nu hadden we (afgezien van het bijzondere geval $K = 0$) alleen krommen rechts van O_1 , en krommen links van O_1 . Voor q van de orde h hebben we bovendien nog krommen om O_1 , die juist voor groote waarden van $\frac{q}{h}$ het waarschijnlijkst zijn.

De krommen om O_1 wijzen op een bewegingsvorm, waarbij φ alle waarden doorloopt; de dubbelpunten der osculeerende krommen liggen alsdan zowel boven als onder het punt O van fig. 2; de osculeerende parabolen hebben hun opening naar tegengestelde zijde.

Dat voor grooter wordende waarden van q''' de krommen in het algemeen meer op cirkels gaan gelijken, beteekent dat ζ ongeveer standvastig is; zij verandert tusschen nauwe grenzen.

Dit laatste zien we ook als volgt gemakkelijk in. Uit (16) leiden we af:

$$\begin{aligned} K - q'''(1 - \zeta_1) &= \pm \zeta_1 \sqrt{1 - \zeta_1} \\ K - q'''(1 - \zeta_2) &= \pm \zeta_2 \sqrt{1 - \zeta_2}. \end{aligned}$$

Door aftrekking vinden we:

$$\zeta_2 - \zeta_1 = \frac{\pm \zeta_2 \sqrt{1 - \zeta_2} \mp \zeta_1 \sqrt{1 - \zeta_1}}{q'''}$$

Voor groote waarden van q''' wordt dus $\zeta_2 - \zeta_1$ zeer klein.

Op deze wijze naderen we tot het algemeene geval, waarbij van geen relatie sprake is.

§ 12. Hoe de overgang tot dit algemeene geval plaats heeft, blijkt ook duidelijk uit de begrenzing van het bewegingsgebied, welke begrenzing we vinden door de omhullende der osculeerende krommen te bepalen. Op dezelfde wijze als in § 8 aangegeven is komen we er toe dat de omhullende degenerereert tot drie parabolen, waarvan de vergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned}
2 \frac{y}{R_0 h} + \frac{K - \varrho''' }{\zeta_1} + \varrho''' &= \frac{\zeta_1}{K - \varrho'''} \cdot \frac{x^2}{R_0^2 h^2} & \zeta_1 \text{ parabool,} \\
2 \frac{y}{R_0 h} + \frac{K - \varrho''' }{\zeta_2} + \varrho''' &= \frac{\zeta_2}{K - \varrho'''} \cdot \frac{x^2}{R_0^2 h^2} & \zeta_2 \text{ parabool,} \\
2 \frac{y}{R_0 h} - \frac{K - \varrho''' }{\lambda} + \varrho''' &= - \frac{\lambda}{K - \varrho'''} \cdot \frac{x^2}{R_0^2 h^2} & \lambda \text{ parabool.}
\end{aligned}$$

De snijpunten van de λ parabool met de ζ_1 en ζ_2 parabolen liggen weer op de ellips, die $R_0 h$ en $2R_0 h$ tot assen heeft. De parabolen zijn confocaal; het brandpunt ligt op de y -as op een hoogte $-\frac{1}{2}R_0 h \cdot \varrho'''$. In fig. 6^a, 6^b, 6^c vindt men die parabolen (en ook de osculeerende parabolen) voorgesteld voor de gevallen $\varrho''' < 1$ en $K \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \varrho'''$.

In fig. 7 ziet men hoe de begrenzing voor grooter wordende ϱ''' steeds meer tot een rechthoek nadert.

De ζ_1 en ζ_2 parabolen vallen voor maximale en minimale K samen.

Willekeurig mechanisme met 2 graden van vrijheid,
waarvoor $S = 3$.

§ 13. Laten q_1 en q_2 de principale coördinaten zijn van het mechanisme; zij blijven gedurende de beweging van de orde h en zijn nul in den evenwichtsstand.

De levende kracht en de potentiaalfunctie zijn te schrijven:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + T_3; \quad U = \frac{1}{2} (n_1^2 q_1^2 + n_2^2 q_2^2) + U_3,$$

waar T_3 en U_3 uitdrukkingen zijn in welker termen h minstens tot den 3^{den} graad optreedt.

Schrijven we de termen van de orde h^3 in T_3 uit:

$$T_3 = \frac{1}{2} (a q_1 \dot{q}_1^2 + b q_2 \dot{q}_1^2 + 2 c q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2 d q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + e q_1 \dot{q}_2^2 + f q_2 \dot{q}_2^2) + \dots$$

Tot en met termen van de orde h^2 worden nu de vergelijkingen van LAGRANGE:

$$\begin{aligned}
q_1 + n_1^2 q_1 &= - \frac{1}{2} a \ddot{q}_1^2 - a q_1 \ddot{q}_1 - b q_2 \ddot{q}_1 - b \dot{q}_1 \dot{q}_2 - c q_1 \ddot{q}_2 - d q_2 \ddot{q}_2 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e - d \right) \dot{q}_2^2 - \frac{\partial U_3}{\partial q_1}, \\
\ddot{q}_2 + n_2^2 q_2 &= \left(\frac{1}{2} b - c \right) \dot{q}_1^2 - c q_1 \ddot{q}_1 - d q_2 \ddot{q}_1 - e q_1 \ddot{q}_2 - e q_1 \ddot{q}_2 - f q_2 \ddot{q}_2 + \\
&\quad - \frac{1}{2} f \dot{q}_2^2 - \frac{\partial U_3}{\partial q_2}.
\end{aligned}$$

Voor het geval dat de relatie $n_2 = 2n_1$ geheel of nagenoeg vervuld is, zijn storende termen:

in de eerste vergelijking die met $\ddot{q}_2 \dot{q}_1, \dot{q}_1 \dot{q}_2, q_1 \ddot{q}_2, q_1 \dot{q}_2,$
 „ „ tweede „ „ „ $\dot{q}_1^2, q_1 \dot{q}_1, q_1^2.$

Trachten we bij eerste benadering aan de vergelijkingen te voldoen door:

$$q_1 = Ah \cos(n_1 t + \lambda) \quad q_2 = Bh \cos(n_2 t + \mu),$$

waarin A, B, λ en μ functiën zijn van t , echter zoodanig dat $\dot{A}, \dot{B}, \dot{\lambda}, \dot{\mu}$ van de orde h zijn, of kleiner, dan mogen we in het tweede lid van de vergelijkingen vervangen:

$$\begin{array}{ll} \dot{q}_1^2 \text{ door } n_1^2 (A^2 h^2 - q_1^2) & \dot{q}_2^2 \text{ door } n_2^2 (B^2 h^2 - q_2^2) \\ \ddot{q}_1 \text{ door } -n_1^2 q_1 & \ddot{q}_2 \text{ door } -n_2^2 q_2. \end{array}$$

Houden we hiermede rekening voor de storende termen, en laten we weg de niet storende termen, dan worden de vergelijkingen:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + n_1^2 q_1 = (bn_1^2 + cn_2^2 + 2p) q_1 q_2 - b \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 + n_2^2 q_2 = \left(2cn_1^2 - \frac{1}{2}bn_1^2 + p \right) q_1^2. \end{array} \right\}$$

De termen $2pq_1 q_2$ in de 1^{ste} en pq_1^2 uit de 2^{de} vergelijking zijn afkomstig van een term $-pq_1^2 q_2$, die in U_3 voorkomt.

Om ons te ontdoen van den term met $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ voeren we de nieuwe veranderlijke q' in, zoodanig dat:

$$q' = q_1 + \frac{1}{2} b q_1 q_2.$$

Dan is:

$$\begin{aligned} \ddot{q}'_1 &= \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} b \ddot{q}_1 q_2 + \frac{1}{2} b q_1 \ddot{q}_2 + b \dot{q}_1 \dot{q}_2 = \\ &= \ddot{q}_1 + b \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{1}{2} b (n_1^2 + n_2^2) q_1 q_2. \end{aligned}$$

Dus:

$$\ddot{q}'_1 + b \dot{q}_1 \dot{q}_2 = \ddot{q}'_1 + \frac{1}{2} b (n_1^2 + n_2^2) q_1 q_2.$$

De vergelijkingen gaan nu over in:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}'_1 + n_1^2 q'_1 = (bn_1^2 + cn_2^2 - \frac{1}{2}bn_2^2 + 2p) q'_1 q_2 \\ \ddot{q}'_2 + n_2^2 q_2 = (2cn_1^2 - \frac{1}{2}bn_1^2 + p) q_1^2. \end{array} \right.$$

Immers mogen we in de tweede leden q_1 door q'_1 vervangen, daar hun verschil van de orde h^2 is.

Denken we nu $n_2 = 2n_1$, dan krijgen we:

$$\ddot{q}'_1 + n_1^2 q'_1 = (4c n_1^2 - b n_1^2 + 2p) q'_1 q_2,$$

$$\ddot{q}_2 + n_2^2 q_2 = (2c n_1^2 - \frac{1}{2} b n_1^2 + p) q_1^2.$$

Dus komen we tot:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}'_1 + n_1^2 q'_1 + 2d_2 q'_1 q_2 = 0, \\ \ddot{q}_2 + n_2^2 q_2 + d_2 q_1^2 = 0; \end{array} \right.$$

waarin

$$d_2 = -2c n_1^2 + \frac{1}{2} b n_1^2 - p$$

De vergelijkingen, die de eerste benadering bepalen, hebben dus volkomen dezelfde gedaante als de in § 4 gevondene. Het vroeger voor het eenvoudig mechanisme afgeleide, is dientengevolge voor een willekeurig mechanisme met twee graden van vrijheid geldig voor het geval dat $n_2 = 2n_1$, in dien zin dat de horizontale projectie van het zich over het oppervlak bewegende punt als beeldpunt kan beschouwd worden voor het willekeurige mechanisme.

Ten slotte merken we op dat ieder mechanisme, waarvoor

$$-2c n_1^2 + \frac{1}{2} b n_1^2 - p = 0$$

is, ongevoelig is voor de relatie $n_2 = 2n_1$. Dit is dus de voorwaarde dat het mechanisme voor $n_2 = 2n_1$ een uitzonderingsmechanisme is, in den door Prof. KORTEWEG (§ 26 zijner Verhandeling) bedoelden zin.

Uitzonderingsmechanismen zijn dus b.v. ook de symmetrische mechanismen (§ 31 dier Verhandeling); immers zijn hierbij c , b en p alle gelijk nul.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ doet eene mededeeling „Over de verstrooïing van het licht door molekulen.”

§ 1. Dat een lichtbundel niet alleen door zwevende stofdeeltjes, maar ook door de molekulen waaruit de middenstof is samengesteld, naar alle zijden kan verstrooid worden, werd het eerst door RAYLEIGH¹⁾ opgemerkt. Deze natuurkundige vond dat bij het doorloopen van een afstand l de intensiteit in reden van 1 tot e^{-hl} verzwakt wordt, waarin de coëfficiënt h (extinctiecoëfficiënt) voor een lichaam van niet te groote dichtheid, een gas b.v., bepaald wordt door

$$h = \frac{32\pi^3(\mu - 1)^2}{3N\lambda^4} \dots \dots \dots (1)$$

¹⁾ RAYLEIGH, On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky, Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 375 (Scientific Papers 4, p. 397).

Hierin is μ de brekingsindex, λ de golflengte en N het aantal molekulen per volume-eenheid.

RAYLEIGH heeft deze vergelijking afgeleid door rechtstreeks het arbeidsvermogen te berekenen, dat van de molekulen in den lichtbundel, als de daarin liggende deeltjes in trilling gebracht worden, naar alle richtingen wordt uitgezonden, en door in aanmerking te nemen dat zooveel energie als aldus van het deel van den bundel tusschen twee doorsneden uitgaat, door de voorste doorsnede minder in de richting der stralen heen gaat dan door de achterste.

Men kan intusschen ook een anderen weg inslaan. Een verzwakking van den lichtbundel kan alleen plaats hebben, wanneer zich een of andere „weerstand” tegen de trillingen der deeltjes verzet en men kan nu uitgaan van den weerstand die bij de uitstraling behoort (wel te onderscheiden van andere, die tot een absorptie en warmteontwikkeling aanleiding geven, en met behulp daarvan den extinctie-coëfficiënt berekenen. Volgens de electronentheorie ¹⁾ heeft men de bedoelde werking te zoeken in de kracht ²⁾)

$$\frac{e^2}{6\pi c^3} \frac{d^2 v}{dt^2} \dots \dots \dots (2)$$

(e lading van het electron, c snelheid van het licht in den aether), waaraan een electron dat zich met de veranderlijke snelheid v beweegt, onderworpen is. Bij trillende bewegingen is dit een „weerstand”, want het tweede differentiaalquotient van v is dan tegengesteld aan de snelheid zelf. Dat deze weerstand nauw samenhangt met de uitstraling blijkt hieruit dat bij een enkelvoudige trilling van het electron de arbeid van een kracht gelijk en tegengesteld aan (2), dus van de kracht die noodig is om de trilling aan den gang te houden, juist gelijk is aan het arbeidsvermogen dat door een om het electron beschreven oppervlak naar buiten stroomt.

Zooals NATANSON ³⁾ onlangs heeft doen zien komt men nu juist tot de formule (1) wanneer men voor elk electron dat in den lichtbundel in trilling geraakt, de door (2) bepaalde kracht invoert.

§ 2. Na deze uitkomsten zou het niet noodig zijn op de zaak terug te komen, zoo niet enkele punten nader in het licht dienden te worden gesteld.

Bij de rechtstreeksche beschouwing van de uitstraling die van de

¹⁾ Zie b.v. LORENTZ, Math. Encyklopädie, V, 14, § 20.

²⁾ Deutsche letters stellen vectoren voor.

³⁾ L. NATANSON, On the theory of extinction in gaseous bodies, Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, déc. 1909, p. 915.

afzonderlijke molekulen uitgaat, moet men rekening houden met de interferentie der verschillende trillingen in elk punt van de omringende ruimte, en in verband daarmee moet bij het in rekening brengen van de weerstanden de onderlinge werking der molekulen niet uit het oog worden verloren. Zoowel bij de eene als bij de andere wijze van doen komt men tot het besluit dat de verstrooiing alleen dan bestaat, wanneer de molekulen, zooals in gassen en vloeistoffen, onregelmatig verspreid zijn, maar dat in een lichaam met regelmatig gerangschikte deeltjes een lichtbundel zich onverzwakt kan voortplanten.

Wij zullen met de beschouwing van de weerstanden beginnen en willen vooreerst opmerken dat uit (2) voor den weerstand per eenheid van lading volgt

$$\frac{e}{6\pi c^3} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2}.$$

Heeft men met een electron te doen, dat in een molekuul van het lichaam om een evenwichtsstand heen en weer gaat, dan kan men, als \mathbf{r} de uitwijking uit dien stand is, voor bovenstaande uitdrukking ook schrijven

$$\frac{e}{6\pi c^3} \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3},$$

of wel, wanneer men

$$e \mathbf{r} = \mathfrak{p}$$

stelt,

$$\frac{1}{6\pi c^3} \frac{d^3 \mathfrak{p}}{dt^3} \cdot \dots \dots \dots (3)$$

Is e het eenige bewegelijke electron in het molekuul, dan is \mathfrak{p} het elektrische moment van dit laatste.

In de tweede plaats wijzen wij er op dat in de aangegeven uitdrukkingen het *derde* differentiaalquotient van \mathbf{r} of \mathfrak{p} naar den tijd voorkomt. Men ziet gemakkelijk in dat in de vergelijkingen voor de lichtvoortplanting die wij zullen hebben op te stellen, alleen zulke termen met differentiaalquotienten van oneven orde tot een verzwakking van een lichtbundel in den loop zijner voortplanting kunnen leiden. Deze omstandigheid zal het mogelijk maken, de termen die weerstanden voorstellen, en waarop het nu in de eerste plaats aankomt, te scheiden van andere waarvan de invloed zich in de voortplantingssnelheid doet gevoelen, en die wij niet nader zullen behoeven te beschouwen.

§ 3. Het is opmerkelijk dat door het veld dat bij een molekuul

met een wisselend moment \mathfrak{p} behoort, een kracht zooals de door (3) bepaalde, niet alleen op het in dat molekuul liggende electron wordt uitgeoefend maar evenzeer op electronen die buiten het deeltje, op afstanden zeer klein in vergelijking met de golflengte, liggen.

In een uitwendig punt (x, y, z) op een afstand r van het molekuul worden de scalaire potentiaal φ en de vector-potentiaal \mathfrak{a} bepaald door

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{[\mathfrak{p}]}{r}, \quad (4)$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{4\pi cr} \left[\frac{d\mathfrak{p}}{dt} \right], \quad (5)$$

waar de vierkante haakjes dienen om aan te wijzen dat men, als men de berekening voor den tijd t wil uitvoeren, de ingesloten grootheden moet nemen, zooals zij op den tijd $t - \frac{r}{c}$ zijn. Dus is $[\mathfrak{p}]$ een functie van x, y, z, t en men toont gemakkelijk aan dat men voor den vector-potentiaal ook kan schrijven

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{4\pi cr} \frac{\partial[\mathfrak{p}]}{\partial t}.$$

Is nu r zeer klein in vergelijking met de golflengte, dan heeft men

$$[\mathfrak{p}] = \mathfrak{p} - \frac{r}{c} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \frac{r^2}{2c^2} \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} - \frac{r^3}{6c^3} \frac{d^3\mathfrak{p}}{dt^3} + \dots$$

Voor ons doel komt het bij de berekening van φ op den vierden en bij de bepaling van \mathfrak{a} op den tweeden term in deze reeksontwikkeling aan. In (4) vervangen wij dus $\frac{[\mathfrak{p}]}{r}$ door

$$-\frac{r^2}{6c^3} \frac{d^3\mathfrak{p}}{dt^3}.$$

De componenten van dezen vector zijn

$$-\frac{r^2}{6c^3} \frac{d^3\mathfrak{p}_x}{dt^3}, \quad -\frac{r^2}{6c^3} \frac{d^3\mathfrak{p}_y}{dt^3}, \quad -\frac{r^2}{6c^3} \frac{d^3\mathfrak{p}_z}{dt^3};$$

zijn divergentie is dus, als wij den oorsprong van coördinaten in het molekuul kiezen,

$$-\frac{1}{3c^3} \left(x \frac{d^3\mathfrak{p}_x}{dt^3} + y \frac{d^3\mathfrak{p}_y}{dt^3} + z \frac{d^3\mathfrak{p}_z}{dt^3} \right),$$

en wij hebben

$$\varphi (=) \frac{1}{12\pi c^3} \left(x \frac{d^3\mathfrak{p}_x}{dt^3} + y \frac{d^3\mathfrak{p}_y}{dt^3} + z \frac{d^3\mathfrak{p}_z}{dt^3} \right).$$

Het teeken $(=)$ is hier gebruikt om aan te duiden dat termen die voor ons doel zonder belang zijn, zijn weggelaten.

De differentiaalquotienten der tusschen haakjes staande uitdrukking naar x, y, z zijn

$$\frac{d^3 p_x}{dt^3}, \quad \frac{d^3 p_y}{dt^3}, \quad \frac{d^3 p_z}{dt^3}$$

en men heeft dus

$$\text{grad } \varphi (=) \frac{1}{12\pi c^3} \frac{d^3 \mathbf{p}}{dt^3},$$

terwijl volgens (5)

$$\mathfrak{a} (=) - \frac{1}{4\pi c^2} \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2}$$

is. Uit deze uitdrukkingen volgt voor de op de eenheid van lading werkende kracht (die door $-\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{a}} = \text{grad } \varphi$ wordt voorgesteld) de reeds aangegeven waarde

$$\frac{1}{6\pi c^3} \frac{d^3 \mathbf{p}}{dt^3}.$$

Eenvoudige voorbeelden kunnen doen zien dat deze uitkomst met de wet van het behoud van arbeidsvermogen in overeenstemming is. Stel dat twee in elkaars onmiddellijke nabijheid geplaatste molekulen gelijke electronen bevatten, die langs evenwijdige rechte lijnen trillingen van gelijke amplitudo en phase uitvoeren. Dan is de hoeveelheid arbeidsvermogen die gedurende een trillingstijd door een om die deeltjes beschreven gesloten oppervlak naar buiten stroomt, vier maal zoo groot als wanneer er slechts één molekuul was. Dus moet nu voor elk deeltje een twee maal grootere arbeid vereischt worden om de trillingen te onderhouden. Inderdaad moet bij elk electron een twee maal grootere weerstand overwonnen worden, omdat elk molekuul in dezelfde mate tot den weerstand bijdraagt.

Hadden de twee trillingen bij gelijke amplitudo tegengestelde phasen, dan zouden de twee volgens het bovenstaande op een der electronen werkende krachten, waarvan de eene te wijten is aan het veld van het molekuul waartoe het electron behoort, en de andere aan het veld van het andere molekuul, elkaar juist opheffen. In dit geval is er dan ook geen uitstraling.

§ 4. Met het oog op het gevondene mag men bij de behandeling van de vraag, in welke mate een lichtbundel door de verstrooiing der trillingen verzwakt wordt, niet zonder nader onderzoek van de onderlinge werkingen tusschen de molekulen afzien. Om deze in rekening te brengen zal ik dezelfde methode volgen, die ik bij vroegere gelegenheden heb gebezigd.

Wij zullen uitgaan van de grondvergelijkingen waarmede men het

veld zoowel in het binnenste van de electronen als tusschen deze deeltjes, tot in de kleinste bijzonderheden zou kunnen beschrijven, nl., als \mathfrak{d} en \mathfrak{h} de electriche en de magnetische kracht in den aether voorstellen, ρ de dichtheid der electriche lading en v de snelheid daarvan,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{d} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathfrak{h} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{h} &= \frac{1}{c} (\dot{\mathfrak{d}} + \rho v), \\ \operatorname{rot} \mathfrak{d} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{h}}. \end{aligned}$$

Toestanden die aan deze vergelijkingen voldoen, kunnen worden voorgesteld met behulp van een scalair potentiaal φ en een vector-potentiaal \mathfrak{a} . Men heeft voor deze de ruimte-integralen

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\rho]}{r} dS, \dots \dots \dots (6)$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{[\rho v]}{r} dS \dots \dots \dots (7)$$

en verder

$$\mathfrak{d} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi.$$

Tot formules die kunnen dienen om het veld te beschrijven met terzijdelating van kleine aan de waarneming ontsnappende bijzonderheden die met de molekulare structuur samenhangen, komt men door in bovenstaande vergelijkingen van alle termen de middelwaarde te nemen. Wij definiëren die voor een of andere scalaire of vector-grootheid A door de vergelijking

$$\bar{A} = \frac{1}{S} \int A dS,$$

waarin de integratie zich uitstrekt over een ruimte van de grootte S die rondom het beschouwde punt gekozen wordt, en die, hoewel zij zeer vele molekulen bevat, zoo klein is dat van de veranderingen die waarneembare grootheden van het eene punt dier ruimte tot het andere ondergaan, mag worden afgezien. Een dergelijke ruimte noemen wij „physisch oneindig klein”.

Wij zullen onderstellen dat het lichaam noch geleidings-, noch magnetisatie-electronen bevat, maar alleen polarisatie-electronen, door welke verschuiving uit de evenwichtsstanden electriche momenten in de molekulen ontstaan. Zij \mathfrak{P} de electriche polarisatie in het lichaam (het electriche moment per volume-eenheid). Dan is¹⁾

¹⁾ Math. Encyklopädie V 14, § 30.

$$\bar{q} = - \operatorname{div} \Psi,$$

$$\bar{q}v = \dot{\Psi},$$

en wanneer wij verder stellen $\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{E}$ (electrische kracht), $\mathfrak{E} + \Psi = \mathfrak{D}$ (dielectrische verplaatsing), $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{H}$, $\bar{\varphi} = \phi$, $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{A}$,

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}},$$

$$\mathfrak{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi \dots \dots \dots (9)$$

Verder volgt uit (6) en (7) voor het geval dat het veld alleen door polarisatie-electronen wordt teweeggebracht,

$$\phi = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\operatorname{div} \Psi]}{r} dS,$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] dS \dots \dots \dots (10)$$

In de eerste dezer laatste formules is stilzwijgend ondersteld dat de polarisatie Ψ nergens een sprong maakt. Is dit aan een of ander oppervlak σ het geval, dan wordt de vergelijking

$$\phi = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\operatorname{div} \Psi]}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \{ [\Psi_{n_2}] - [\Psi_{n_1}] \} d\sigma \quad (11)$$

De normaal n aan het oppervlak is hier van de zijde 1 naar de zijde 2 getrokken.

§ 5. Zooals de grondvergelijkingen aangeven, kan men het veld beschouwen als voortgebracht door de electronen die in de lichtbron en in de doorloopen middenstoffen voorkomen. Brengen wij in het beschouwde medium een gesloten oppervlak σ aan, dan kunnen wij dus de waarde van \mathfrak{E} die in eenig punt daarbinnen bestaat, splitsen in twee deelen, één (\mathfrak{E}_1) dat afkomstig is van alle electronen buiten het oppervlak, en een tweede (\mathfrak{E}_2) dat door den daarbinnen bestaanden toestand wordt voortgebracht. Dit laatste deel nu bepalen wij door de vergelijkingen (9), (10) en (11), ons voor een oogenblik voorstellende dat wij alleen met het deel van het lichaam binnen σ , met de daarin voorkomende waarden van Ψ te doen hebben. Dan is, als wij de normaal aan σ naar buiten trekken, $\Psi_{n_2} = 0$; dus, wanneer

wij bij Ψ_n den index 1 weglaten, en al vast in aanmerking nemen dat de trillingen transversaal zijn, zoodat $div \Psi = 0$ is,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\Psi_n]}{r} d\sigma. \quad (12)$$

Strekt men in (10) de integratie over de ruimte binnen σ uit, dan wordt

$$\mathfrak{E}_1 = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - grad \Phi. \quad (13)$$

De vector

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_2$$

stelt nu de waarde van $\bar{\mathfrak{d}}$ in een punt binnen σ voor, wanneer, zonder dat aan de electronenbewegingen daarbuiten iets verandert, alle door dit oppervlak omsloten deeltjes worden weggenomen. Nemen wij aan dat σ physisch oneindig klein is, met afmetingen die nog zeer groot zijn ten opzichte van die der ruimte S waarvan men zich bij het opmaken der middelwaarden bedient, dan is er in alle punten der gevormde holte, die niet al te dicht bij den wand liggen, geen onderscheid tusschen de middelwaarde van \mathfrak{d} en dezen vector zelf, en geeft dus \mathfrak{E}_1 de werkelijke waarde van \mathfrak{d} in een punt der holte aan.

§ 6. Om de wetten der lichtvoortplanting in het medium te leeren kennen, moeten wij aan de vergelijkingen (8) nog de betrekking tusschen \mathfrak{D} (of Ψ) en \mathfrak{E} toevoegen. Deze vinden wij door uit te gaan van de bewegingsvergelijking voor de in de molekulen trillende electronen.

Ter vereenvoudiging nemen wij aan dat elk molekuul slechts één trillend electron e bevat. Wij vatten een bepaald molekuul M in het oog en stellen de verplaatsing van het daarin voorkomende bewegelijke electron uit zijn evenwichtsstand door r , het moment door $\mathfrak{p} = e r$ en de massa van het electron door m voor. De krachten die het ondervindt, zijn: 1°. de quasi-elastische kracht, waarvoor wij schrijven $-f r$, 2°. de weerstand (3), en 3°. de kracht $e \mathfrak{d}$, als \mathfrak{d} de elektrische kracht is, die op de plaats van M door al de andere electronen wordt voortgebracht. Wanneer wij nu om M een physisch oneindig klein oppervlak σ , zooals in de vorige § beschouwd werd, beschrijven, kunnen wij \mathfrak{d} splitsen in den boven besproken vector \mathfrak{E}_1 en het deel dat aan de molekulen Q te danken is, die behalve M binnen het oppervlak σ liggen. Duiden wij de bijdrage van een dezer molekulen door \mathfrak{d}_q aan, en laten wij het somteeken op al de molekulen Q betrekking hebben, dan wordt de bewegingsvergelijking

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -j r + \frac{e}{6\pi c^3} \frac{d^3 p}{dt^3} + e(\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E}_2) + e \sum \mathfrak{d}_q . . . \quad (14)$$

Hierin is nu, wanneer wij ons tot de weerstanden beperken, blijkens het in § 3 gezegde

$$\sum \mathfrak{d}_q (=) \frac{1}{6\pi c^3} \sum \frac{d^3 p_q}{dt^3} \quad (15)$$

De berekening der hier voorkomende som zou zeer gemakkelijk zijn wanneer de molekulen op regelmatige wijze waren gerangschikt, b.v. in de punten van een parallelepipedisch net. Dan zou men n.l., daar de afmetingen van σ zeer klein zijn in vergelijking met de golflengte, het moment p_q voor elk deeltje Q gelijk mogen stellen aan dat van het molekuul M , waarvoor wij de bewegingsvergelijking opstellen. Zijn echter de deeltjes onregelmatig verspreid, dan kunnen door de onderlinge electromagnetische werkingen ongelijkheden ontstaan; men ziet dit in als men bedenkt dat de afstand tot de naastbijliggende deeltjes voor de verschillende molekulen ongelijk zal zijn. Wegens deze omstandigheid zou de nauwkeurige berekening der som voor een vloeistof op groote moeilijkheden stuiten.

Bij gassen van niet te groote dichtheid wordt de zaak eenvoudiger. Alles wijst er op dat hier de invloed der molekulen op de lichtbeweging klein is. De toestand in een bepaald molekuul hangt slechts in geringe mate van dien der andere af; hij wordt in hoofdzaak bepaald door den toestand van den aether, zooals die ook zou bestaan wanneer de lichtbundel zich in een luchtledige ruimte voortplantte. Dientengevolge treden in de bewegingsvergelijking voor het electron in een bepaald molekuul de termen die den invloed der overige uitdrukken op den achtergrond. Wel is waar is het nu voor ons doel noodig, deze kleine termen in rekening te brengen, maar wij kunnen, kleine grootheden van de tweede orde verwaarloozende, bij de bepaling van hun grootte te werk gaan alsof de momenten der deeltjes Q en dat van M zelf geheel onafhankelijk waren van de wisselwerking tussehen deze molekulen. In dit geval zouden die momenten alle aan elkaar gelijk zijn, en dit ook nu bij de berekening van (15) aannemende, stellen wij elke p_q gelijk aan de gemiddelde waarde die het moment p voor alle molekulen M binnen een physisch oneindig kleine ruimte heeft. Als wij dergelijke middelwaarden door een dubbele streep boven de letter aanduiden, en het aantal molekulen Q , d. w. z. het aantal deeltjes die, behalve M , binnen het gesloten oppervlak σ liggen, door ν voorstellen, mogen wij (15) vervangen door

$$\sum \mathfrak{d}_q (=) \frac{\nu}{6\pi c^3} \frac{d^3 \bar{p}}{dt^3}.$$

§ 7. Wij hebben nu nog de door (10), (12) en (13) bepaalde elektrische kracht \mathfrak{E}_2 nader te beschouwen. Te dien einde stellen wij

$$[\mathfrak{P}] = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q},$$

en splitsen op de hieraan beantwoordende wijze elk der drie groot-heden Φ , \mathfrak{A} en \mathfrak{E}_2 in twee deelen. Het eerste deel van \mathfrak{E}_2 hangt alleen van den toestand af, die op het bepaalde oogenblik t in de verschil-lende punten binnen en op σ bestaat, en zelfs wanneer men rekening wilde houden met de veranderingen die \mathfrak{P} van punt tot punt onder-gaat en die met behulp der differentiaalquotienten van \mathfrak{P} naar de coördinaten kunnen worden voorgesteld, kan men aantoonen dat in dat eerste deel van \mathfrak{E}_2 slechts differentiaalquotienten van even orde voorkomen, althans wanneer wij aan het oppervlak σ zoodanigen vorm toekennen, waar niets tegen is, dat het de drie door M even-wijdig aan de coördinaatvlakken gebrachte vlakken tot symmetrie-vlakken heeft. Voor ons doel is het dus voldoende, het tweede deel van \mathfrak{E}_2 te beschouwen, en dus in (13) de waarden

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{Q}_n}{r} d\sigma \dots \dots \dots (16)$$

en

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} dS \dots \dots \dots (17)$$

te gebruiken.

De waarde die men op deze wijze voor \mathfrak{E}_2 vindt, kan na eenige transformatie gemakkelijk worden berekend, waarbij wij de coördi-naten van het punt M waarvoor wij Φ , \mathfrak{A} en \mathfrak{E}_2 zoeken, door x', y', z' voorstellen, terwijl x, y, z op een willekeurig punt binnen of op het oppervlak σ betrekking hebben.

V oreerst merken wij op dat voor (16) kan worden geschreven

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{Q}_x}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{Q}_y}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathfrak{Q}_z}{r} \right) dS \dots \dots (18)$$

en dat hier de differentiaalquotienten naar x, y, z door die naar x', y', z' , met het tegengestelde teeken genomen, mogen worden ver-vangen. Om dit in te zien, stellen wij dat

$$\mathfrak{P}_x = f_1(x, y, z, t), \mathfrak{P}_y = f_2(x, y, z, t), \mathfrak{P}_z = f_3(x, y, z, t)$$

is, en duiden de partieele afgeleiden hiervan naar x, y, z , bij stand-vastige t genomen, door $f'_{1x}(x, y, z, t)$, enz. aan. Daar de trillingen transversaal zijn, is dan

$$f'_{1x}(x, y, z, t) + f'_{2y}(x, y, z, t) + f'_{3z}(x, y, z, t) = 0, \dots (19)$$

en wel geldt dit voor elke waarde van t , zoodat men ook heeft

$$f'_{1x} \left(x, y, z, t - \frac{r}{c} \right) + f'_{2y} \left(x, y, z, t - \frac{r}{c} \right) + f'_{3z} \left(x, y, z, t - \frac{r}{c} \right) = 0. \quad . \quad . \quad (20)$$

Nu is

$$\frac{\Omega_x}{r} = \frac{1}{r} \left\{ f_1 \left(x, y, z, t - \frac{r}{c} \right) - f_1(x, y, z, t) \right\},$$

$$\frac{\Omega_y}{r} = \frac{1}{r} \left\{ f_2 \left(x, y, z, t - \frac{r}{c} \right) - f_2(x, y, z, t) \right\},$$

$$\frac{\Omega_z}{r} = \frac{1}{r} \left\{ f_3 \left(x, y, z, t - \frac{r}{c} \right) - f_3(x, y, z, t) \right\},$$

en blijkens (19) en (20) verdwijnt het deel dat men voor de in (18) tusschen haakjes staande uitdrukking verkrijgt, wanneer men de differentiaalquotienten berekent met uitsluiting van de termen die van de veranderlijkheid van r afhangen. Derhalve hebben wij alleen deze laatste termen in rekening te brengen en volgt het boven gezegde uit de omstandigheid dat

$$\frac{\partial r}{\partial x'} = - \frac{\partial r}{\partial x}, \text{ enz.}$$

is.

In de vergelijking

$$\phi = - \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial}{\partial x'} \frac{\Omega_x}{r} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\Omega_y}{r} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\Omega_z}{r} \right) dS \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

substitueeren wij nu (verg. § 3)

$$\Omega = [\mathfrak{P}] - \mathfrak{P} = - \frac{r}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{r^2}{2c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial t^2} - \frac{r^3}{6c^3} \frac{\partial^3 \mathfrak{P}}{\partial t^3} + \dots, \quad (22)$$

waarin de afgeleiden $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}$, enz. onafhankelijk van x', y', z' zijn. Daar

na deze ontwikkeling de eerste term in $\frac{\Omega}{r}$ onafhankelijk van deze coördinaten wordt, en de volgende termen r tot een positieve macht bevatten, mag men bij het differenticeren van (21) naar x', y', z' , zooals men bij de bepaling van *grad* ϕ moet doen, deze bewerking onder het integraalteeken uitvoeren. Men heeft dus

$$- \frac{\partial \phi}{\partial x'} = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \frac{\Omega_x}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} \frac{\Omega_y}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} \frac{\Omega_z}{r} \right) dS, \text{ enz}$$

Wij kunnen ons beperken tot het deel hiervan dat aan den laatsten term in (22) beantwoordt, en hebben dus

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial v^i} (=) - \frac{1}{12\pi v^3} \int \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} dS, \text{ enz.}$$

d. w. z.

$$-\text{grad } \Phi (=) - \frac{1}{12\pi v^3} \int \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} dS.$$

Wat den term $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ betreft, behoeven wij in (17) alleen den eersten term in (22) te substitueeren. Daardoor vinden wij

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} (=) \frac{1}{4\pi c^3} \int \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} dS.$$

Ten slotte wordt

$$\mathfrak{E}_z (=) \frac{1}{6\pi c^3} \int \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} dS,$$

of, daar wij van de veranderlijkheid van $\frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3}$ over de physisch oneindig kleine ruimte binnen σ mogen afzien, wanneer wij de grootte van die ruimte door U voorstellen,

$$\mathfrak{E}_z (=) \frac{1}{6\pi c^3} U \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3}.$$

Alles samengenomen gaat de bewegingsvergelijking (14) over in

$$m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = -j \mathfrak{r} + e \mathfrak{E} + \frac{e}{6\pi c^3} \left(\frac{d^3 \mathfrak{p}}{dt^3} + v \frac{d^3 \mathfrak{p}}{dt^3} - U \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} \right) + \delta, \dots (23)$$

waarin wij onder den term δ verschillende in het voorgaande niet nader beschouwde werkingen begrepen hebben, die niet tot de weerstanden kunnen worden gerekend.

§ 8. Wij moeten nu twee gevallen onderscheiden.

a. Laat de molekulen een zoodanige regelmatige rangschikking hebben, dat elk in het middelpunt van een der congruente parallelepida ligt, waarin de ruimte door drie stelsels van vlakken verdeeld wordt. Men heeft in dit geval geen onderscheid tusschen \mathfrak{p} en $\bar{\mathfrak{p}}$ te maken. Verder is, wanneer $\frac{1}{N}$ het volume van een der zooeven genoemde elementaire parallelepida voorstelt,

$$\Psi = N\mathfrak{p}$$

en men heeft voor de in (23) met $\frac{e}{6\pi c^3}$ vermenigvuldigde uitdrukking, wanneer men voor U een parallelepipedum neemt, dat uit k elementaire parallelepida is samengesteld, zoodat

$$U = \frac{k}{N}$$

is,

$$(1 + \nu - k) \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial t^2}.$$

Daar $\nu + 1$ het geheele aantal der in U liggende deeltjes is, heeft men

$$\nu + 1 = k.$$

Er is dus, alles samengenomen, geen weerstand, en er zal geen verzwakking van den lichtbundel plaats hebben.

b. Wanneer de molekulen onregelmatig over de ruimte verspreid zijn, is het doelmatig de vergelijking (23) op de verschillende molekulen binnen een physisch oneindig kleine ruimte toe te passen en van elken term de middelwaarde te nemen. Bedenkt men daarbij dat, wanneer N het aantal deeltjes per volume-eenheid is,

$$\mathfrak{p} = N\bar{\mathfrak{p}}$$

is, dan vindt men

$$m \frac{d^2 \bar{\mathfrak{r}}}{dt^2} = -\bar{f}\mathfrak{r} + e\bar{\mathfrak{E}} + \frac{e}{6\pi c^3} (1 + \bar{\nu} - NU) \frac{\partial^3 \bar{\mathfrak{p}}}{\partial t^3} + \bar{\delta} \dots \quad (24)$$

Daar nu het aantal deeltjes die in de beschouwde ruimte U lagen, $1 + \nu$ bedroeg, zou men een oogenblik kunnen denken dat de middelwaarde $1 + \bar{\nu}$ gelijk aan NU zou zijn. In werkelijkheid is dit bij een onregelmatige verspreiding niet het geval, maar is

$$\bar{\nu} = NU. \dots \dots \dots (25)$$

Om dit in te zien moeten wij bedenken dat $1 + \nu$ het geheele aantal deeltjes voorstelde, liggende binnen een ruimte U die rondom een vooraf in het oog gevat deeltje M werd gekozen. Stellen wij ons in het gas een volume V voor, zeer groot in vergelijking met de physisch oneindig kleine ruimte U , en verbeelden wij ons dat de NV molekulen die deze ruimte bevatten zal, er blindelings in geplaatst worden, zonder dat aan eenig deel der ruimte de voorkeur gegeven wordt boven een ander. Nadat het eerste deeltje M geplaatst is, kiezen wij daar om heen de kleine ruimte U en stellen nu de vraag hoeveel van de overschietende $NV - 1$ deeltjes nu nog gemiddeld in die ruimte zullen komen, wanneer wij de proef van het aanbrengeu der $NV - 1$ molekulen een groot aantal malen herhalen. Klaarblijkelijk is dit gemiddelde aantal, dat wij voor $\bar{\nu}$ mogen nemen,

$$\frac{U}{V} (NV - 1) = NU - \frac{U}{V}$$

en hiervoor mogen wij (25) schrijven, daar $\frac{U}{V}$ een zeer kleine breuk is.

De slotsom onzer beschouwingen is dus dat de coëfficiënt $1 + \bar{r} - N\bar{r}$ in (24) de waarde 1 heeft, en dat van de termen in (23) die weerstanden voorstellen alleen die overblijft, die bij het door het beschouwde molekuul zelf voortgebrachte veld behoort.

De bewegingsvergelijking (24) kunnen wij nu in een geschikten vorm brengen door te vermenigvuldigen met $\frac{eN}{m}$, den vector $N e \bar{r} = N \bar{\rho}$ door Ψ te vervangen, en, wat een voldoende benadering geeft,

$$\frac{eN}{m} \bar{\rho} = \gamma \Psi$$

te stellen, waarin γ een standvastige coëfficiënt is. Stelt men nog

$$\frac{j}{m} - \gamma = n_0^2,$$

dan komt er

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = - n_0^2 \Psi + \frac{e^2 N}{m} \mathcal{E} + \frac{e^2}{6\pi c^3 m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}.$$

Dat men nu door deze betrekking met (8) te combineeren tot den door RAYLEIGH afgeleiden extinctiecoëfficiënt komt, behoeft hier niet nader te worden aangewezen.

§ 9. Ten slotte moge nog zooveel worden gezegd als noodig is om te doen gevoelen dat men ook bij de rechtstreeksche beschouwing van de uitstraling der molekulen alleen dan tot een verstrooijing van het licht mag besluiten, wanneer de molekulen onregelmatig verspreid zijn.

Onderstel dat wij met een bundel evenwijdige homogene stralen te doen hebben, en zij in dezen bundel L een lijn, of een zeer dun cilindertje, in de richting der stralen, $A B$ een deel van L dat zeer lang is in vergelijking met de golflengte, en P een verwijderd punt liggende op een lijn $A P$ die een willekeurigen hoek met $A B$ maakt, en op een afstand van A die zeer groot is ten opzichte van $A B$. Wij kiezen de x -as langs $A B$, en nemen ter vereenvoudiging aan dat voor elk molekuul op L , of in het dunne cilindertje, het elektrische moment kan worden voorgesteld door een uitdrukking van den vorm

$$a \cos(n t + p),$$

waarin p een lineaire functie van x is.

Wanneer wij van de ongelijkheden die bij onregelmatige ligging door de onderlinge werkingen ontstaan, afzien (verg. § 6) en aan-

nemen dat over den afstand $A B$ de verzwakking nog zeer weinig bedraagt, mogen wij a als een constante beschouwen.

Voor een der componenten van de evenwichtsverstoring in P , voor zoover zij van één molekuul afhangt, mogen wij nu stellen

$$b \cos (n t + q),$$

waarin b constant en q een lineaire functie van x is, en wij hebben de som

$$s = \Sigma b \cos (n t + q) \quad (26)$$

over al de molekulen uitgestrekt, te berekenen.

Stel nu vooreerst dat k molekulen op gelijke afstanden van elkaar op $A B$ liggen. Dan vormen de waarden van q een rekenkundige reeks $q_1, q_1 + \Delta, q_1 + 2 \Delta$, enz., en men heeft.

$$\begin{aligned} s &= \frac{b}{2 \sin \frac{1}{2} \Delta} [\sin \{n t + q_1 + (k - \frac{1}{2}) \Delta\} - \sin \{n t + q_1 - \frac{1}{2} \Delta\}] = \\ &= b \frac{\sin \frac{1}{2} k \Delta}{\sin \frac{1}{2} \Delta} \cos \{n t + q_1 + \frac{1}{2} (k-1) \Delta\}. \end{aligned}$$

Uit den eersten vorm blijkt, dat de resulterende evenwichtsverstoring kan worden opgevat als te bestaan uit twee trillingen van de uiteinden der rij molekulen afkomstig, en uit den laatsten dat bij gestadige toeneming van de lengte der rij de amplitudo steeds tusschen

$+\frac{b}{\sin \frac{1}{2} \Delta}$ en $-\frac{b}{\sin \frac{1}{2} \Delta}$ begrepen blijft. Er is geen sprake van een resulterende beweging waarvan de intensiteit steeds met de lengte van AB zou toenemen.

§ 10. Tot een dergelijke uitkomst geraakt men wanneer men met luchtmolekulen te doen heeft, die over den cilinder L zoo verdeeld zijn, dat in even lange deelen daarvan, door loodrechte doorsneden begrensd, juist evenveel molekulen liggen. Dan mag men voor het aantal deeltjes liggende in een element dx schrijven $f dx$, waarin f een constante is, en men heeft in plaats van (26)

$$s = b f \int \cos (n t + q) dx = b f \frac{l}{q'' - q'} \{ \sin (n t + q'') - \sin (n t + q') \},$$

waarin l de lengte van AB is, en q' , q'' op de uiteinden betrekking hebben. Bij het toenemen van l blijft $\frac{l}{q'' - q'}$ constant en de resulterende lichtbeweging bepaalt zich tot twee verstoringen die geacht kunnen worden van de uiteinden van AB uit te gaan.

Om ons daarvan geheel vrij te maken zal ik onderstellen dat het verschil $q'' - q'$ der uiterste waarden van q een vol aantal malen 2π is.

Wij zullen nu bewijzen dat er onder deze omstandigheden *wel* een verstrooiing is wanneer, zooals bij onregelmatige verspreiding onvermijdelijk is, in gelijke deelen van L *niet* juist even veel molekulen liggen. Te dien einde verdeelen wij den cilinder AB vooreerst in een aantal deelen AA' , $A'A''$ enz. van zulk een lengte dat langs elk deel q met 2π verandert, en vervolgens, steeds door loodrechte doorsneden, elk dezer deelen in een groot aantal, k andere, alle van de gelijke lengte dx . In gedachten vatten wij het eerste deel van AA' , het eerste van $A'A''$, enz. samen tot één deel van den cilinder AB , eveneens het tweede deel van AA' , het tweede van $A'A''$, enz. tot een tweede deel van AB , en zoo vervolgens, zoodat de geheele cilinder in k deelen van gelijk volume verdeeld wordt. Voor al de molekulen die in een zelfde van deze deelen liggen, kunnen de trillingsphasen die zij in P teweegbrengen, dezelfde worden geacht. Laat de k phasen bepaald worden door de grootheden q_1, q_2, \dots, q_k , die een rekenkundige reeks vormen.

Zijn nu g_1, g_2, \dots, g_k de aantallen molekulen die in de k deelen van den cilinder liggen, dan wordt

$$s = b [g_1 \cos (nt + q_1) + g_2 \cos (nt + q_2) + \dots + g_k \cos (nt + q_k)] . \quad (27)$$

Volgens het bovengezegde zou dit 0 zijn, indien al de getallen g_1, g_2, \dots, g_k aan elkaar gelijk waren. Daaruit volgt dat men ook mag schrijven

$$s = b [h_1 \cos (nt + q_1) + h_2 \cos (nt + q_2) + \dots + h_k \cos (nt + q_k)],$$

als h_1, h_2, \dots, h_k de afwijkingen der getallen g_1, g_2, \dots, g_k van hun gemiddelde zijn. Dat gemiddelde zullen wij g noemen.

De straling door een vlakke-element bij P wordt door de tweede macht van s bepaald en wij kunnen dus de te beantwoorden vraag zoo formuleeren: Wat is de gemiddelde waarde van s^2 bij een groot aantal proeven, die zich daardoor van elkander onderscheiden dat, terwijl al het overige hetzelfde blijft, ky molekulen telkens weer op andere wijze over de k deelen van den cilinder verdeeld worden? Daarbij houden wij in het oog dat onder de getallen h_1, h_2, \dots, h_k steeds positieve en negatieve voorkomen, en wel in gelijke mate, daar $h_1 + h_2 + \dots + h_k = 0$ is.

Het is nu duidelijk dat de gemiddelde waarde van elk product van twee verschillende h 's, die op twee bepaalde van de k deelen betrekking hebben, noodzakelijk 0 moet zijn, daar er geen reden is waarom bij dikwijls herhaalde proeven gelijke of tegengestelde teekens van die twee afwijkingen van het gemiddelde in ongelijke mate zouden voorkomen.

Wij hebben dus voor het gezochte gemiddelde

$b^2 [\overline{h_1^2} \cos^2 (n t + q_1) + \overline{h_2^2} \cos^2 (n t + q_2) + \dots + \overline{h_k^2} \cos^2 (n t + q_k)]$,
 of, als wij de middelwaarden over een volle periode nemen,

$$\frac{1}{2} b^2 (\overline{h_1^2} + \overline{h_2^2} + \dots + \overline{h_k^2}),$$

of eindelijk, daar volgens een bekende stelling der waarschijnlijkheidsrekening

$$\overline{h_1^2} = \overline{h_2^2} = \dots = \overline{h_k^2} = \mu$$

is,

$$\frac{1}{2} k \mu b^2.$$

Men verkrijgt dus de intensiteit der straling die van den cilinder L uitgaat door de intensiteit $\frac{1}{2} b^2$ die één molekuul zou te weeg brengen, met het aantal molekulen in den cilinder te vermenigvuldigen. Deze uitkomst kan onmiddellijk tot een willekeurig deel van den lichtbundel worden uitgebreid. Immers, de trilling waarvan wij de intensiteit berekend hebben, is wat er van de k in (27) voorkomende trillingen overschiet, nadat zij elkaar grootendeels door interferentie hebben opgeheven. Die overblijvende trilling kan allerlei door de toevallige verspreiding der molekulen bepaalde fasen hebben, en verdeelt men een deel van den bundel in een groot aantal naast en achter elkander liggende cilinders, zooals L er een was, dan is er tussehen de fasen van de daarbij behorende overblijvende trillingen geenerlei samenhang, zoodat de intensiteiten bij elkaar moeten worden opgeteld.

Natuurkunde. — De Heer DU Bois biedt, mede namens den Heer KÔTARÔ HONDA, eene mededeeling aan uit het Bosscha-Laboratorium: „*De thermomagnetische eigenschappen der elementen.*”

CURIE¹⁾ heeft in 1895, weliswaar na onderzoek van betrekkelijk weinig stoffen, gemeend de volgende regelen te mogen formuleeren:

1. Bij paramagnetische stoffen is de specifieke susceptibiliteit omgekeerd evenredig met de absolute temperatuur.
2. Bij diamagnetische stoffen hangt zij daarentegen zoo goed als niet van de temperatuur af.
3. Bij laatstgenoemde hebben veranderingen van aggregaatstoestand vaak geen merkbaren invloed en:
4. Evenmin wijzigingen van den chemischen toestand (allotropie).

Door een onzer werd in 1900 voorgesteld den eersten van die thermomagnetische regelen de wet van CURIE te noemen en een *constante van Curie* in te voeren, zoodanig dat

¹⁾ P. CURIE, Ann. de Chim. et de Phys. (7) 5 p. 289. 1895. — Oeuvres p. 232 Paris 1908.

$$\chi(\theta + 273) = C.$$

Intusschen werd toen reeds uitdrukkelijk opgemerkt dat men hier vermoedelijk slechts met een soort „limietwet” te doen heeft in den geest der — formeel analoge — ideale gaswet. Daarenboven werd er alda op gewezen dat de gewone theorie der oriënteerbare magneeculen tot een dergelijke wet leidt, als men haar uit een meer magnetokinetisch oogpunt generaliseert; dit werd in den LORENTZ- en BOSSCHA-bundel der „Archives”¹⁾ theoretisch bewezen en proefondervindelijk uitvoerig gestaafd. Naast deze waardeering van CURIE’s belangrijk onderzoek en van zijn eerste regel kon en kan aan de tweede stelling echter geen algemeener beteekenis worden toegekend; zij was al dadelijk in strijd met de uitkomsten van andere waarnemers, b.v. voor het bijzondere geval van water.

Bij den derden en vierden regel wees trouwens de steller zelf reeds op een aantal uitzonderingen. Daar de susceptibiliteit voor de door hem onderzochte diamagnetische stoffen ook veel kleiner bleek dan voor de paramagnetische, kwam CURIE daarenboven tot de slotsom dat deze beide tegenovergestelde uitingen van magnetische inductie aan oorzaken van geheel verschillenden aard te wijten zouden zijn.

Uitgaande van deze experimenteele conclusies werkte LANGEVIN²⁾ in 1905 eene electronentheorie van het magnetisme uit; hij gaf daarbij weer een kinetische uitbeelding der eerste wet van CURIE, volkomen analoog aan bovengenoemde, zonder deze evenwel te vermelden, en trouwens geheel onafhankelijk van de invoering van electronen.

Het leek daarom zeer wenschelijk de thermomagnetische eigenschappen van meer stoffen, thans in de eerste plaats elementen, nader te onderzoeken ten einde beter te kunnen nagaan of CURIE’s slotsom zulk eene verregaande generalisatie toelaat. Wij merken al bij voorbaat op dat zulks hoegenaamd niet het geval blijkt te zijn.

Inrichting der proeven. De methode was die der torsiebalans met een niet-uniform veld, door CURIE en vroegere onderzoekers eveneens toegepast. Gebruikt werd de onlangs in deze Verslagen beschreven nieuwe halfring-electromagneet; de assen der beide kernen vormden een hoek van 10° tot 20° ; het maximum verval der veldintensiteit lag dan op zekeren afstand zijdelings van hun snijpunt. Het veld

¹⁾ H. du Bois, Rapp. Congr. d. Phys. 2 p. 486, Paris 1900. — Arch. Néerl. (2) 5 p. 246, 1900, alsmede 6. p. 581, 1901. — Verh. nat. en gen. Congr. 9 p. 60, Rotterdam 1901. *Notaties:*

a , Atoomgewicht.		t , Temperatuur.
C , Constante van CURIE		χ , Specifieke susceptibiliteit

²⁾ P. LANGEVIN, Ann. de Chim. et de Phys. (8) 5 p. 70, 1905. Journ. de Phys. (4) 4 p. 678, 1905.

zelf bedroeg in dit singuliere punt nog tot 25 kilogauss; een en ander werd met een verplaatsbaar geijkt proefklosje topographisch opgenomen. De gevoeligheid der torsiebalans kon gevariëerd worden; zij werd op de gewone wijze gemeten door den invloed van een toegevoegd traagheidsmoment op den slingertijd te bepalen.

Het oventje was een porseleinen buis met platinadraad omwikkeld en met kaolinpoeder en asbest geïsoleerd. Bij een stroomverbruik van 1,2 kilowatt werd een temperatuur van 1250° bereikt, die met behulp van een thermo-element werd gemeten en gecontroleerd door de smeltpunten van tin, tellurium, antimoon en goud.

Proefmateriaal. Het groote bezwaar bij alle proeven op dit gebied was en blijft steeds de alomtegenwoordigheid van het ijzer, ofschoon dit bijna nooit geheel vrij met zijne geweldig overheerschende ferromagnetische eigenschappen schijnt op te treden. Voor een vijftiental metalen zijn binaire alliages met ijzer in het laboratorium van TAMMANN onderzocht, echter niet in zoo verdund toestand als waarin het bij wijze van verontreiniging meestal pleegt voor te komen. Van de 81 elementen werden er 43 onderzocht, vele daarvan waren door de Firma KAHLBAUM zoo zuiver mogelijk geleverd. Prof. COHEN en Dr. HOITSEMA te Utrecht, Dr. HERÄUS te Hanau, Prof. TAMMANN en WALLACH te Göttingen stelden o.a. welwillend verscheiden elementen ter onzer beschikking. Niet onderzocht werden vooral nog de 10 gasvormige elementen; Li, Rb, Cs, Ca, Sr, Ba waren niet voldoende ijzervrij, Be, Sc, Ga, Ge, Y, Rd en de „zeldzame” metalen in 't geheel niet te verkrijgen. Fe, Co, Ni kwamen hier minder in aanmerking. Dr. M. HANDA had de welwillendheid het ijzer door middel der Berlijnsch blauw-reactie colorimetrisch te bepalen; bij Na, Zn, Sn, Ta, kon het hiermede niet worden aangetoond en bedraagt derhalve het gehalte minder dan 0,001 %.

De uitkomsten der proeven zelf leveren trouwens zekere physische criteria op voor hunne betrouwbaarheid: Voor zoover de susceptibiliteit onafhankelijk blijkt van het veld kan van een ferromagnetisch optredend bestanddeel geen sprake wezen. Voor ongeveer een derde der praeparaten was dit niet het geval maar nam de susceptibiliteit in algebraïschen zin af bij toenemend veld, en wel hyperbolisch. Hieruit werd door den Heer MORRIS OWEN de waarde χ_{∞} berekend, die asymptotisch voor een oneindig veld zoude gelden; en tevens de invloed van het ferromagnetische bestanddeel, die hoogstens een zesde — meestal veel minder — bedroeg van hetgeen aan het analytisch ijzer in vrijen toestand zoude te wijten zijn. Ook aan de thermomagnetische eigenschappen laat zich de zuiverheid tot op zekere hoogte toetsen: enkele sterk ijzerhoudende stoffen vertoonen tus-

sehen 500° en 600° een groote vermindering der susceptibiliteit, terwijl boven 700° de invloed van het ijzer haast niet meer te duchten valt. In geen geval bestaat er reden om te betwijfelen dat de susceptibiliteit der geheel ijzervrije elementen constant zoude blijven, althans binnen het gebruikte veldinterval. De mededeeling van de bijzonderheden der uitkomsten vereischt vele tabellen en graphieken; het zij ons daarom vergund in dit bestek enkel de aandacht te vestigen op de hoofdpunten.

*Specifieke Susceptibiliteit*¹⁾ bij 18°: De gevonden waarden liggen ongeveer tusschen — 2 en + 5 (amorphe koolstof resp. palladium); men kan dus niet beweren dat de positieve paramagnetische waarden over 't algemeen veel grooter zijn dan de negatieve diamagnetische. Een uitzondering vormt alleen zuurstof met circa 100; voor mangaan was de waarde ongeveer 10; dit bevatte echter $\frac{1}{3}$ % ijzer.

Curie had reeds op den invloed der allotropie bij phosphorus en antimoon gewezen, terwijl die bij den zoo karakteristiek polymorphen zwavel ontbrak. Thans vertoonde zich een grooter of kleiner verschil tusschen diamantboort (— 0,49) en amorphe koolstof (— 2,02); Silicium kristallijn (— 0,12) en amorph (— 0,14); maar vooral tusschen gewoon tetragonaal tin (+ 0,03) en grauw tin (— 0,29). Eerstgenoemd was zeer zuiver electrolytisch materiaal van KAHLBAUM, met hoogstens 0,001 % ijzergehalte; het werd daarna met weinig grauwe tinpest besmet, welwillend door Prof. COHEN uit den voorraad in het van 't Hoff-Laboratorium afgestaan.

Het indium bleek aanvankelijk paramagnetisch; in een veld van 7 Kgs. ging de susceptibiliteit door nul om voor sterkere velden negatief te worden, zonder twijfel ten gevolge van 0,013% ijzergehalte; die eigenschap is van geenerlei principiële beteekenis, daar men haar ook vindt bij niet enkelvoudige stoffen, zooals sommige soorten porselein, glas en dergelijke.

Niettegenstaande menige leemte was het toch mogelijk het algemeene beloop van $\chi = f(\alpha)$ op te teekenen; dit blijkt vrij ingewikkeld, maar vertoont toch een duidelijken samenhang met het periodieke stelsel. Volgens de rangschikking der tabel van MENDELEJEFF-BRAUNER vormen de rijen (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8) en (9, 10, 11, 12) telkens een gebied I, II en III, waarin zich dat beloop op eigenaardige wijze herhaalt. Bij de grens van I en II liggen op een positief maximum Cr, Mn, Fe, Co, Ni, tusschen II en III evenzoo de „zeldzame” metalen; binnen I, II en III zijn de diamagnetische „pikken” bezet door de verwante vijfwaardige elementen P, Sb, en Bi van de vijfde groep (3^{de}, 7^{de}, 11^{de} rij). Zoo bestaat er ook nog op meer dan een

¹⁾ In het vervolg overal in millioenen uitgedrukt.

secundair punt zekere magnetisch-chemische overeenkomst, die in dit bestek onbesproken moet blijven.

Susceptibiliteit bij hoogere temperaturen. In den regel bleek $\chi = \text{funct}(\theta)$ dezelfde voor toe- en afnemende temperatuur; enkele afwijkingen berusten vermoedelijk op een toestandsverandering van aanwezig ijzer na verhitting. Mg en Ru vertoonden in sterke mate de reeds vermelde vermindering tusschen 500° en 600° . De uitkomsten laten zich als volgt samenstellen. (Zie tabel p. 671).

Tusschen [] staan hier enkele elementen, door anderen reeds onderzocht; de atoomgewichten nemen in elke kolom van boven naar beneden toe; verder beteekent *O*: onveranderlijk; *T*, bij verhitting numeriek toenemende; *A*, numeriek afnemende susceptibiliteit. Het minste komen hier tot nu toe in de vijfde kolom diamagnetische elementen voor, wier susceptibiliteit bij verhitting numeriek toeneemt; ook is deze toeneming in elk der 4 gevallen slechts gering.

Er bestaat ook thermomagnetisch zekere samenhang met de periodieke kromme $\chi = \text{funct}(\alpha)$: o.a. liggen de paramagnetische elementen sub *A* alle in de hoofdmaxima of bij de secundaire toppen; die sub *T* daarentegen in de stijgende takken der functie. Derhalve zouden de scherpten dier kromme bij hoge temperaturen meer en meer worden uitgevaagd; daarentegen zouden zij vermoedelijk bij lagere temperatuur nog meer accentuatie en wellicht dan eerst het meest karakteristieke beloop verkrijgen; immers de temperatuur van $+18^\circ$ is blijkbaar zeer willekeurig. Naar aanleiding der aangehaalde regelen van CURIE valt het volgende op te merken:

1. Enkel palladiumblik van KAHLBAUM met 0,70% ijzer en $\chi = +6,12$ volgde bij verhitting de wet van CURIE ten naastenbij, maar vertoonde bij afkoeling complicaties. Bij een veel zuiverder palladiumregulus van Dr. HERAEUS met 0,03% ijzer en $\chi = +5,79$ nam de susceptibiliteit bij verhitting langzamer af; bij afkoeling trad hier geen temperatuurhysterese op¹.

2. Slechts 6 diamagnetische elementen blijven binnen het geheele temperatuur-interval constant, o.a. de door CURIE onderzochte P, S, Se.

3. Bij het smelten of stollen treedt veelal — echter niet altijd — een discontinuïteit op, en wel: Hetzij een kleinere of grootere sprong van χ zelve, zooals bij P (44°), Ag (961°), Sn (233°), Sb (631°), Te (450°), Au (1064°), Tl (290°), Pb (327°), Bi (268°), of althans een vrij plotse-linge verandering van $d\chi/d\theta$, zooals bij Mg (633°), Cu (1065°), Cd (322°),

¹) Toevallig is palladium het eenige door CURIE onderzochte paramagnetische element; het was wellicht toch niet voldoende zuiver. De uitkomsten voor zuurstof, ferromagnetische metalen bij zeer hoge temperatuur alsmede in hunne zouten blijven intusschen hunne waarde behouden.

P A R A M A G N E T I S C H			D I A M A G N E T I S C H		
O	T	A	O	T	A
Na (0°—97°)	Ti	[O]	B, krist (400°—1200°)	B krist (0°—400°)	C, amorph
Al (657°—1100°)	V (500°—1200°)	Mg (0°—657°)	Si, kristallijn	Diamant	Cu
K (0°—150°)	Cr (500°—1100°)	[Fe] (80°—1350°)	P, wit	Ag	Zn (300°—700°)
V (0°—500°)	Mn	Co (1150°—?) ?	S, rhombisch	I (0°—114°)	Zr (500°—1200°)
Cr (0°—500°)	Mo	[Ni] (350°—800°)	Zn (0°—300°)		Cd (300°—700°)
Nb (0°—400°)	Ru (550°—1200°)	Pd	As, Sublim.		In (0°—150°)
W	Rh	Zeldz. metalen?	Se, Metalliek		Sb (0°—631°)
Os	Ir	Ta	Zr, krist (0°—500°)		Tc
	Th (0°—400°)	Pt	Cd (0°—300°)		I (114°—200°)
		U	Au		Tl
			Hg (0°—350°)		Pb (0°—327°)
			Pb (327°—600°)		Bi (0°—268°)

I (114°); de overigens volkomen rechte lijnige graphiek voor zwavel vertoont bij het smeltpunt een nauw merkbaar deukje, 't geen CURIE vermoedelijk ontgaan is.

4. Wat het thermomagnetisch onderzoek van polymorphe omzettingen betreft werd bij den overgang van α -thallium in β -thallium bij 234° een sprongsgewijze vermindering der specifieke susceptibiliteit van 15% gevonden. Doch de merkwaardigste eigenschappen vertoont het tin: Werd diamagnetisch grauw tin langzaam verwarmd, dan veranderde van af 32° de specifieke susceptibiliteit ($-0,29$) bijna sprongsgewijze, zooals dat ook met de dichtheid geschiedt, en ging bij ca. 35° door nul. Wellicht zoude reeds van af het overgangspunt (18°) die verandering plaats grijpen, maar dan veel langzamer. Verdere verwarming bracht de susceptibiliteit geleidelijker op hogere positieve waarden, zoodat bij ongeveer 50° de waarde ($+0,03$) voor paramagnetisch tetragonaal tin bereikt was, die verder weinig veranderde; bij 161° ligt volgens DEGENS het overgangspunt tetragonaal \rightleftharpoons rhombisch tin, waarbij echter tot nu toe niets bijzonders werd opgemerkt; bij het smeltpunt (233°) trad andermaal een sprong op van $\chi = +0,03$ tot $\chi = -0,04$; het diamagnetische vloeibare metaal bleef vrijwel onveranderd tot 400°. Bij de stolling bleek de magnetische variatie omkeerbaar; maar bij afkoeling beneden 32° bleef het tin tot ca. 10° nog paramagnetisch. Zelfs al mocht later blijken — wat voorzichtigheidshalve als mogelijk maar minder waarschijnlijk dient te worden beschouwd — dat het paramagnetisme tusschen 35° en 233° toch maar op een bijzonderen toestand van chemisch niet meer aan te toonen ijzer berust, dan blijven toch de beide sprongen, beantwoordende aan bekende omzettingen, merkwaardig genoeg.

Een uitbreiding van het thermomagnetisch onderzoek, o.a. ook tot lage temperaturen, wordt voorbereid; daarbij zal allicht ook over de bijzondere eigenschappen van het tin nog meer licht worden verspreid,

Uit al het medegedeelde, meer in 't bijzonder uit de conclusies sub. 1 tot 4, blijkt nu wel afdoende dat de vier overeenkomstige regelen van CURIE zeker niet de algemeene strekking hebben, die men hun wel wat overhaast had toegeschreven. Daarmede vervallen tevens de experimenteele uitgangspunten der theorie van LANGEVIN; een hechtere en breedere grondslag voor latere theoriën kan eerst door uitgebreider onderzoek worden verkregen.

Plantkunde. — De Heer MOLL. biedt eene mededeeling aan van den Heer C. VAN WISSELINGH: „*Over het aantoonen van looistof in de levende plant en over hare physiologische beteekenis*”.

(Zal in het Verslag der volgende vergadering verschijnen.)

Ter plaatsing in de Bibliotheek wordt aangeboden door den Heer PLACE uit naam van den Heer J. W. LANGELAAN: „*Voordrachten over den bouw van het centrale zenuwstelsel*”.

De vergadering wordt gesloten.

E R R A T A.

In het Zittingsverslag van 30 October 1909 leze men :

p. 378 r. 13 v. b. : 10 000 i. pl. v. 1000

p. 384 r. 12 v. o. : gemiddelden i. pl. v. waren

r. 11 „ „ : tusschen 18° en $-t^\circ$ i. pl. v, bij $-t^\circ$.

p. 385 in de formule r. 4 v. b. : $\{1 - d(t + 18)\}$ i. pl. v. $1 - dt$.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 26 Februari 1910.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 676.
Verslag van de Commissie over een schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken omtrent het uitzenden naar het Laboratorium op den Col d'Olen, p. 677.
Jaarverslag der Geologische Commissie over 1909, p. 678.
C. VAN WISSELIJGH: „Over het aantoonen van looistof in de levende plant en over hare physiologische beteekenis”. (Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en F. A. F. C. WENT), p. 680.
L. E. J. BROUWER: „Over continue vectordistributies op oppervlakken” (2e gedeelte). (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 702.
H. J. E. BETH: „De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen”. (2de Mededeeling). (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 722. (Met één plaat).
H. ZWAARDEMAKER: „Over de Camera Silenta van het Physiologisch Laboratorium te Utrecht”, p. 739.
JAN DE VRIES: „Over puntenparen die met betrekking tot een vlakke kubische kromme geassocieerd zijn”, p. 744.
J. J. VAN LAAR: „Eenige opmerkingen naar aanleiding van een antwoord van den Heer KOHNSTAMM”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en F. A. H. SCHREINEMAKERS), p. 749.
A. F. HOLLEMAN, T. VAN DER LINDEN en J. J. P. VALLETON: „Over eene methode ter quantitative analyse van ternaire mengsels”, p. 751. (Met één plaat).
J. J. P. VALLETON: „De smeltiguur bij het stelsel der drie isomere nitramilinen”. (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en S. HOOGWERFF), p. 755. (Met één plaat).
PIERRE WEISS en H. KAMERLINGH ONNES: „Onderzoekingen over de magnetisatie bij zeer lage temperaturen”, p. 768. (Met 2 platen).
Aanbieding eener verhandeling van Mrs. A. BOOLE STOTT: „Geometrical deduction of semi regular from regular polytopes and space fillings”, p. 797.
Aanbieding eener verhandeling van Dr. H. VAN CAPPELLE: „Bijdrage tot de kennis van de landijs-vormingen in de provincie Friesland en van het oudere fluviatile diluvium in den ondergrond van Noord-Nederland”, p. 797.
Benoeming van den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN tot afgevaardigde naar de vergadering van de Internationale Associatie der Akademien te Rome, p. 797.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1°. Bericht van den Heer HOEK dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 1 Februari 1910 waarbij werd medegedeeld dat op de begrooting voor 1910 een som van f' 1000 is uitgetrokken ter gemoetkoming in de reis- en verblijfkosten voor de uitzending naar het Laboratorium op den Col d'Olen. Z.Exc. vraagt daarin tevens aan de Akademie om eventuele voorstellen daaromtrent in te dienen.

In handen gesteld van de reeds bestaande Commissie.

3°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 7 Februari 1910 waarbij verzocht wordt op te geven of er Nederlandsche geleerden zijn, bereid, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist te worden afgevaardigd naar het van 15—20 Augustus 1910 te Graz te houden internationaal zoologisch congres; Z.Exc. meent dat wellicht overleg met de Nederl. Dierkundige Vereeniging in deze wenschelijk zal zijn.

De Voorzitter stelt voor den Heer VOSMAER als afgevaardigde voor te dragen. Aldus wordt besloten.

4°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 22 Februari j.l. waarbij bericht wordt dat het subsidie voor de Akademie met ingang van 1 Januari 1910 met f' 4000 verhoogd is.

5°. Missive van de Heeren H. HAGA en W. H. JULIUS waarbij zij bericht geven dat de Commissie voor het onderzoek der aan de ijkkantoren voor de verificatie van gasmeters gebezigde toestellen, en in welke Commissie genoemde Heeren op voorstel der Akademie benoemd zijn, haar taak heeft volbracht en haar rapport aan Z.Exc. heeft ingezonden.

Voor kennisgeving aangenomen.

6°. Brief van den Nederlandschen Consul te Leipzig waarbij ZEd. namens Rektor en Senaat der Universiteit te Leipzig aan de Akademie doet toekomen de vier deelen van het Festschrift zur Feier des 500-jährigen Bestehens der Universität Leipzig.

Zal met een brief van dankbetuiging worden beantwoord.

Physiologie. — De Heer EINTHOVEN brengt mede namens de andere ondertekenaars het volgende verslag uit:

Naar aanleiding van een verzoek van den Voorzitter der wis- en natuurkundige afdeling van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen (zie den brief van 15 December 1909 n°. 57), om rapport uit te brengen over een missive van den Minister van Binnenlandse Zaken van 7 Augustus 1909 n°. 2107 Afd. K. W. hebben de ondergeteekenden de eer het volgende te berichten.

Er is een overeenkomst gesloten tusschen de Nederlandsche Regeering en het bestuur der wetenschappelijke laboratoria op den Col d'Olen, waarbij onze Regeering tegen de betaling van 5000 francs het recht heeft verkregen, om tot 30 April 1929 een Geleerde in die laboratoria werkzaam te doen zijn. De directie der laboratoria zal aldaar ten behoeve van den Nederlandschen Geleerde onder meer een slaapkamer en een werktafel beschikbaar stellen.

Bij schrijven van 1 Februari 1910 n°. 181 Afd. K. W. verklaart de Minister zich in beginsel bereid, te bevorderen, dat zij, die eventueel voor uitzending naar den Col d'Olen in aanmerking komen, van Rijkswegen een matige tegemoetkoming voor reis- en verblijfkosten ontvangen. De ondergeteekenden stellen voor, deze tegemoetkoming te bepalen op honderdtwintig gulden (ƒ 120.—) voor reiskosten en tien gulden (ƒ 10.—) daags voor verblijfkosten, deze laatste te rekenen van den dag der aankomst op den Col d'Olen tot den dag van vertrek van daar.

Overeenkomstig den wensch, die in de laatst aangehaalde Ministerieele missive wordt geuit, verklaren de ondergeteekenden zich bereid, om in het vervolg omtrent elken Geleerde, die naar hunne meening voor uitzending in aanmerking kan worden gebracht, een afzonderlijk voorstel bij den Minister in te dienen. Daartoe zal het noodig zijn, dat de ondergeteekenden, die allen lid zijn der Akademie en tevens hoogleeraar of oud-hoogleeraar in de physiologie aan een Nederlandsche Universiteit, tot een blijvende commissie worden samengevoegd.

H. J. HAMBURGER.
C. A. PEKELHARING.
H. ZWAARDEMAKER Cz.
T. PLACE.
W. EINTHOVEN.

Op voorstel van den Voorzitter wordt besloten ingevolge den wensch uitgebracht in het Verslag aan den Minister voor te stellen de reeds bestaande Commissie te bestendigen en aan deze met goedkeuring van Z.Exc. op te dragen jaarlijks eene oproeping te doen van personen die geneigd zijn naar dat Laboratorium te worden afgevaardigd.

Aardkunde. — De Heer DE BRUYN leest het: „*Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1909*”, hetwelk luidt als volgt:

In den loop van dit jaar hebben geene veranderingen in het personeel der Commissie plaats gehad.

Geene mededeelingen omtrent grondboringen of terreininsnijdingen werden ons gedaan door Ingenieurs, die bij den Rijks- en Provinciaalen Waterstaat of bij particulieren werkzaam zijn.

Dr. H. VAN CAPPELLE heeft ons bericht, dat hij zijn verslag over de boring te *Klazinaveen* bij *Nieuw-Amsterdam*, hem door de Nederlandsche Heide-maatschappij toegezonden, en over zijn onderzoek van het keileem in het oostelijk diluviaal gebied van Friesland bij gebrek aan tijd nog niet heeft kunnen voltooien maar binnenkort hoopt in te zenden.

Dr. J. LORIÉ heeft het verslag van zijn onderzoek in verband met de opgravingen van Dr. HOLWERDA JR. aan het Uddelermeer reeds voor geruimen tijd aan de Geologische Commissie ingezonden. Dit onderzoek is door haar aan de Koninkl. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam ter opname in hare werken aangeboden. Deze heeft eene Commissie benoemd om daarover verslag uit te brengen, maar de publicatie van Dr. Lorié's verhandeling laat nog op zich wachten.

Professor J. A. GRUTTERINK heeft in den loop dezes jaars den arbeid zijner geologische kaartgeving van ons land met behulp zijner leerlingen, de studenten-mijningenieurs te Delft, niet kunnen voortzetten, en is nog niet gereed gekomen met de samenstelling van het door hem toegezegde verslag over de uitkomsten van de kaartgevingen gedurende vorige jaren.

Ofschoon eene vraag van het Bestuur der Natuurkundige Afdeling der Akademie omtrent hetgeen over de daling van onzen bodem bekend was gemaakt niet tot de Geologische Commissie was gericht, zoo hebben toch de leden MOLENGRAAFF, DE BRULIN en VAN BEMMELEN individueel aan de beantwoording dier vraag deelgenomen, en daarover memoriën opgesteld. Deze memoriën heeft de Akademie afzonderlijk doen drukken en 6 December ll. gepubliceerd als toevoegsel aan haar zittingsverslag van 30 October.

De Heer A. E. VAN GIFFEN, candidaat in de Botanie en Zoölogie te Groningen heeft zich het geheele jaar bezig gehouden op uitnoodiging van de Commissie met de studie van vele onzer terpen in Friesland, Groningen en Zeeland, en daarna ook met die van eenige terpen in Oldenburg, Oost-Friesland, Butjadingerland en de Halligen nabij de Westkust van Sleeswijk. Hij heeft de diepte, waarop de vloer dier terpen thans ligt, nagespoord om geologische gegevens te verkrijgen omtrent de daling van onzen bodem. Die uitkomsten zijn door ons medelid VAN BEMMELEN reeds benuttigd voor zijn bovenver-

melde op 6 December ll. gepubliceerde memorie. Voorts heeft de Heer VAN GIFFEN de door hem verzamelde schedels en beenderen van huisdieren uit de terpen gebruikt voor de studien over de fossiele rassen der huisdieren in de terpen. Van al die studiën en onderzoekingen heeft de heer VAN GIFFEN een voorloopig verslag van eenigen omvang aan het einde des jaars aan onze commissie gezonden. Een meer uitvoerige bewerking zijner waarnemingen en uitkomsten hoopt de Heer VAN GIFFEN in den loop dezes jaars te geven.

Het bestuur van het Geologisch Kongres, dat dit jaar in *Stockholm* gehouden is, heeft een verslag gevraagd over hergeen in verschillende landen bekend is over de veranderingen van het klimaat gedurende het postglaciale tijdperk van het pleistoecene tijdvak. Het komt aan het Kongresbestuur het meest wenschelijk voor dat over die vraag in verschillende landen, en ook in Nederland, een gemeenschappelijk Rapport worde opgemaakt en opgezonden. Het heeft daartoe uitgenoodigd voor Nederland de leden der Geologische commissie en de geologen en andere geleerden: J. LORÉ, J. P. F. VAN CALKER, J. VAN BAREN, H. VAN CAPPELLE, J. P. LOTSY, J. F. VAN BEMMELEN om mede te deelen, wat hun bekend is omtrent den invloed van het klimaat op de vegetatie gedurende de tertiaire en quaternaire perioden.

Om aan het verzoek van het Kongresbestuur te kunnen voldoen heeft de Geologische Commissie de bovengenoemde heeren uitgenoodigd om met haar te zamen eene vergadering te houden. Die vergadering heeft op 15 October ll. te Leiden plaats gehad en werd geleid door ons medelid Professor MOLENGRAAFF. Daarin hebben genoemde heeren medegedeeld, wat hun omtrent dien invloed bekend was, en heeft de heer VAN BAREN zich bereid verklaard uit deze gegevens een gezamenlijk verslag op te maken, hetwelk wij over korten tijd verwachten.

De Heer WATERSCHOOT VAN DER GRACHT is in het afgelopen jaar voortgegaan met het toezenden voor de door hem voor zijne grondboringen verzamelde boorkernen. Deze zijn door Prof. MOLENGRAAFF in het Geologisch Museum te *Delft* geplaatst en worden daar bewaard.

Ten slotte hebben wij de eer U voor te stellen:

1o. den dank der Akademie te betuigen aan den heer WATERSCHOOT VAN DER GRACHT voor zijn toezending, en aan den heer LORÉ voor zijne medewerking.

2o. aan Zijne Excellentie den Minister van Waterstaat eene toelage van *f* 1000 voor het jaar 1911 aan te vragen ter bestrijding van de kosten voor geologisch onderzoek van Nederland.

De Geologische Commissie,

C. LELY, *Voorzitter.*

J. M. VAN BEMMELEN, *Sekretaris.*

De conclusies van het Verslag worden goedgekeurd.

Plantkunde. — De Heer MOLL. biedt eene mededeeling aan van den Heer C. VAN WISSELINGH: „*Over het aantoonen van looistof in de levende plant en over hare physiologische beteekenis.*”

(Mede aangeboden door den Heer F. A. F. C. WENT).

(Aangeboden in de vergadering van 29 Januari 1910).

In dit opstel zal eene methode aangegeven worden om looistof in de levende plant aan te toonen, eene methode, die ons bovendien in staat stelt eene voorstelling te vormen van de hoeveelheid dier stof in de cellen en vast te stellen of na zeker tijdsverloop die hoeveelheid vermeerderd of verminderd is zonder de levensverrichtingen der plant merkbaar te storen of haar noemenswaardig te schaden.

Verder zullen enkele resultaten medegedeeld worden van onderzoekingen over de physiologische beteekenis van looistof, resultaten, die naar mijne meening eene wezenlijke bijdrage leveren tot de kennis van dit onderwerp.

Alvorens ik tot de bespreking der door mij uitgewerkte methode overga, komt het mij wenschelijk voor enkele opmerkingen te maken over het begrip „looistof” en eene schets te geven van den stand van het physiologisch looistofvraagstuk.

Over het begrip looistof heerscht geen eenstemmigheid. De botanici verstonden vroeger onder looistof alles wat in de cel door ferrizouten blauw of groen gekleurd wordt¹⁾. Dit heeft aanleiding gegeven tot verwisseling met andere stoffen en tot de opvatting, dat de looistof een algemeen voorkomend plantenbestanddeel is. REINITZER²⁾ vooral heeft daarop de aandacht gevestigd. Op grond van zijne onderzoekingen komt hij tot de conclusie, dat het begrip looistof een onding is, uit de leerlooierij in de wetenschap gekomen. De naam looistof moet volgens hem weder uit de wetenschap verdwijnen. Dit voorstel heeft echter geen ingang gevonden. Vooral is WAAGE³⁾ er tegen op gekomen. Naar aanleiding van deze quaestie merkt DEKKER⁴⁾ in zijne Botanisch-chemische monographie der tanniden te recht op, dat er beslist plantenstoffen bestaan, die door gemeenschappelijke karakteristieke eigenschappen, als de eigenschap om dierlijke huid in leder te

1) J. DEKKER, De looistoffen, Bot.-chem. monographie der tanniden, 1908, D. I, p. 197 en 210.

F. CZAPEK, Biochemie der Pflanzen, II. Bd. p. 576.

2) F. REINITZER, Bemerkungen zur Physiologie des Gerbstoffs, Ber. d. d. bot. Gesellsch. Bd. VII, 1889, p. 187.

3) Th. WAAGE, Die Beziehungen des Gerbstoffs zur Pflanzenchemie, Pharm. Centralh. f. Deutsch. N^o. 18, 1891, XII. Jahrg. N. F. p. 247.

4) l. c. 1908, D. I. p. V, D. II. p. 66, D. I. p. 211 en 212.

veranderen, hetgeen berust op de eigenschap om met eiwit in water onoplosbare verbindingen te vormen, den wrangen, samentrekkenden smaak, het bezit van veel phenolhydroxylgroepen in het molecuul, het vermogen alkaloiden uit waterige oplossingen neer te slaan en andere eigenschappen, zich scherp van andere koolstofverbindingen onderscheiden en daarom in eene afzonderlijke groep moeten samengevat worden. Zoolang van deze lichamen de chemische structuur niet volledig bekend is, mag men de groep, tot welke ze vereenigd zijn, niet verbreken.

Sommige schrijvers, b.v. REINITZER¹⁾ en BRAEMER²⁾ vinden, dat men eene groep van plantenstoffen physiologisch niet bestudeeren kan, zoolang de chemische kennis nog onvolledig is. WAAGE³⁾ kan zich naar mijne meening te recht daarmee niet vereenigen. Natuurlijk zal men bij het physiologisch looistofonderzoek in elk geval met de verschillende ons ten dienste staande hulpmiddelen moeten vaststellen, dat de te onderzoeken plant werkelijk een lichaam bevat, dat tot de groep der looistoffen behoort en dat eene verwisseling met andere stoffen is buitengesloten.

Over de physiologische beteekenis der looistoffen zijn de meeningen der botanici altijd zeer verdeeld geweest. TH. HARTIG⁴⁾ nam aan, dat de looistoffen bijdroegen tot opbouw van het plantaardig organisme. SCHLEIDEN⁵⁾ daarentegen zag in de looistof slechts een ontledingsprodukt van den eelwand.

In overeenstemming met de zienswijze van HARTIG is volgens WIGAND⁶⁾ de looistof een wezenlijke factor in het chemisch proces van het plantenleven en behoort ze physiologisch tot de groep der koolhydraten, op welke vorming en omzetting vooral het levensproces van de plant berust. In tegenstelling met zetmeel, dat als reservestof in de rusttoestanden der vegetatie optreedt, behoort volgens WIGAND de looistof in het algemeen tot de vloeibare, actieve stoffen, die noodig zijn voor den groei. In sommige gevallen schijnt ze volgens genoemden schrijver als reservestof te fungeeren. Zooals uit het medegedeelde volgt, is volgens WIGAND de looistof een hoogst belangrijk stofwisselingsprodukt in het plantenleven. Niet een onderzoeker heeft dit zoo duidelijk en beslist uitgesproken.

¹⁾ l. c.

²⁾ L. BRAEMER, *Les tannoïdes*, 1890—91. *Ref. Bot. Centralbl. Jahrg. XII*, 1891, *Bd. 47*, p. 275.

³⁾ l. c.

⁴⁾ TH. HARTIG, *Entwicklungsgeschichte des Pflanzenkeims*, 1858, p. 103.

⁵⁾ M. J. SCHLEIDEN, *Grundzüge der wissenschaftlichen Botanik*, 1861, p. 141.

⁶⁾ A. WIGAND, *Einige Sätze über die physiologische Bedeutung des Gerbstoffes und der Pflanzenfarbe*, *Bot. Zeitung*, 20. Jahrg. 1862, N^o. 16, p. 121 und 129.

De zienswijze van WIGAND is inzonderheid door SACHS bestreden geworden, terwijl ze in het algemeen onder de botanici weinig instemming heeft gevonden, wat o.a. blijkt uit het hoofdstuk „Die physiologische Bedeutung der Gerbsäuren“ in CZAPEK's Biochemie der Pflanzen¹⁾, waar de voorstelling van WIGAND met die van TH. HARTIG²⁾ over het „Gerbmehl“ als drager der looistof en georganiseerde reservestof gerekend wordt onder de „irrigen Auffassungen über die physiologische Rolle der Gerbsäuren.“ WIGAND heeft zijne waarnemingen, waarop zijne gevolgtrekkingen berusten niet uitvoerig medegedeeld, wat waarschijnlijk ook er toe heeft bijgedragen, dat deze laatste door andere schrijvers spoedig verworpen zijn geworden.³⁾

De zienswijze over de rol der looistoffen, tot welke SACHS⁴⁾ bij zijne onderzoekingen over het ontkiemen van zaden is ingekomen, heeft meer ingang gevonden dan die van WIGAND. SACHS zag in de bij de kieming zich vormende looistoffen slechts afscheidingsproducten, nevenproducten of ontledingsproducten. Hij achtte het zeer onwaarschijnlijk, dat de looistoffen op de eene of andere wijze als bouw-materiaal voor de vorming der celwanden zouden dienen.

De resultaten van enkele andere onderzoekers sluiten zich bij die van SACHS aan. Zoo komt b.v. KRAUS⁵⁾, die zich bijzonder voor de physiologische beteekenis der looistoffen geïnteresseerd heeft, tot de conclusie, dat de gevormde looistof in geen geval meer aan de stofwisseling deelneemt. Volgens GERBER⁶⁾ verdwijnen de looistoffen door oxydatie, zonder dat daarbij koolhydraten ontstaan. AF KLERCKER⁷⁾ beschouwt de looistoffen als excretieproducten. WAAGE⁸⁾ noemt ze nevenprodukten der stofwisseling. BÜSGEN⁹⁾ legt

¹⁾ l. c. p. 588.

²⁾ TH. HARTIG, Das Gerbmehl, Bot. Zeitung 23. Jahrg. N^o. 7, 1865, p. 53. Weitere Mitteilungen das Gerbmehl betreffend, Bot. Zeitung 23. Jahrg. N^o. 30, 1865, p. 235.

³⁾ Vergelijk EML KUTSCHER. Ueber die Verwendung der Gerbsäure im Stoffwechsel der Pflanze, Flora, 66. Jahrg. N^o. 3, 4 en 5, 1883, p. 37.

⁴⁾ J. SACHS, Physiologische Untersuchungen über die Keimung der Schminkebohne (*Phaseolus multiflorus*), Sitzungsber. d. kais. Akad. der Wiss. Wien, 37. Bd., 1859, No. 17, p. 57. Zur Keimungsgeschichte der Dattel, Bot. Zeitung, 20. Jahrg., 1862, No. 31, p. 241 en 249. Handbuch der Experimental Physiologie der Pflanzen, 1865, p. 360.

⁵⁾ G. KRAUS, Grundlinien einer Physiologie des Gerbstoffs, 1889, p. 38 en 44.

⁶⁾ C. Gerber, Rôle des tannins dans les plantes et plus particulièrement dans les fruits. Compt. rend. 124, p. 1106.

⁷⁾ J. E. F. AF KLERCKER, Studien über die Gerbstoffvacuolen. Bihang till K. Svenska Vit.-Akad. Handlingar, Bd. 13. Afd. III, No. 8, 1888. Ref. Bot. Zeitung, 47. Jahrg. 1889, p. 210.

⁸⁾ l. c. p. 250.

⁹⁾ M. BÜSGEN, Beobachtungen über das Verhalten des Gerbstoffes in den Pflanzen, Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, 24. Bd., N. F. 17. Bd., 1890, p. 59. Erläuterung zu dem Referat über Beobachtungen etc., Bot. Zeitung, 1890, p. 381.

er nadruk op, dat de gedaane waarnemingen in geen geval het recht geven om aan te nemen, dat de looistof als bouwstof fungeert. Daarentegen speelt volgens SCHULZ¹⁾ de looistof bij de altijd groene bladen de rol eener reservestof.

Volgens enkele onderzoekers moeten de looistoffen in sommige gevallen als afscheidingsprodukten of als nevenprodukten der stofwisseling beschouwd worden, terwijl ze in andere gevallen aan de stofwisseling deelnemen en als bouw materiaal dienst doen. Tot zoodanige resultaten zijn SCHELL²⁾, KUTSCHER³⁾ en WESTERMAIER⁴⁾ gekomen.

Volgens SCHROEDER⁵⁾ is de looistof bij den berk en den ahorn geen reservestof, doch ook geen afscheidingsprodukt. Mogelijk vormt ze er, zegt genoemde schrijver, een eindprodukt der stofwisseling. Op de vraag, welke de physiologische beteekenis der looistof is, moet hij evenwel het antwoord schuldig blijven.

Bij vele onderzoekers heeft de meening ingang gevonden, dat de looistoffen dienen om de planten te beschermen tegen uitwendige schadelijke invloeden. Deze zouden van zeer verschillende aard kunnen zijn. STAHL⁶⁾ neemt aan, dat de looistof wegens haren onaangename smaak dient om de plant tegen aantasting door dieren, inzonderheid door slakken, te beschermen. Ook KRAUS⁷⁾ ziet in de looistof een beschermingsmiddel en wel niet uitsluitend tegen dieren, maar ook dienende om rotting der planten te voorkomen.

Bij planten met overwinterende bladen is WARMING⁸⁾ tot het besluit gekomen, dat het looistofgehalte der opperhuid de plant voor uitdrogen behoedt, wanneer ze in den winter aan gevaarlijke droge winden is blootgesteld en dat ze tegelijk een middel is om den verloren turgor spoedig te herstellen. SCHELL²⁾ acht het waarschijnlijk, dat de looistof bij zaden een beschermingsmiddel tegen uitwendige schadelijke invloe-

¹⁾ E. SCHULZ, Ueber Reservestoffe in immergrünen Blättern unter besonderer Berücksichtigung des Gerbstoffes, *Flora*, 1888, p. 256.

²⁾ J. SCHELL, Physiologische Rolle der Gerbsäure, Kazan, 1874 (Russisch), *Botan. Jahresber.* III. Jahrg., 1875, p. 876.

³⁾ l. c. p. 73.

⁴⁾ M. WESTERMAIER, Zur physiol. Bedeutung des Gerbstoffes in den Pflanzen, *Sitzungsber. d. königl. preuss. Akad. der Wissensch. zu Berlin*, Jahrg. 1885, 2. Halbb. p. 1124 en 1125.

⁵⁾ J. SCHROEDER, Die Frühjahrsperiode der Birke (*Betula alba* L.) und der Ahorn (*Acer platanoides* L.), *Die landwirthsch. Versuchs-Stationen*, Bd. XIV, 1871, p. 146.

⁶⁾ ERNST STAHL, Pflanzen und Schnecken, *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, XXII. Bd., N. F. XV. Bd., p. 590 en 594.

⁷⁾ *Grundlinien zu einer Physiologie des Gerbstoffs*, 1889, p. 21.

⁸⁾ E. WARMING, Beobachtungen über Pflanzen mit überwinternden Laubblättern, *Botan. Centralblatt*, Jahrg. IV. Bd. 16, 1883, p. 350.

⁹⁾ l. c. p. 877.

den is. Ook BÜSGEN ¹⁾ neemt aan, dat de looistof de plant bescherming verleent.

Andere schrijvers hebben aan de looistoffen weder andere functies toegeschreven. Volgens GERBER ²⁾ gaan ze in vruchten omzetting en gisting der suiker tegen en PFEFFER ³⁾ acht het zeer waarschijnlijk, dat de rol der looistoffen ook bestaat in het vasthouden van suikers en andere stoffen in de cellen. KÜTSCHER ⁴⁾ vindt het meest aannemelijk, dat de looistof voor respiratiemiddel dient en bij de ademhaling geoxydeerd wordt.

In verband met de stofwisseling in de plant worden aan looistoffen nog verschillende rollen toegekend. Zoo nam WIGAND ⁵⁾ aan, dat de roode kleurstoffen uit looistoffen ontstaan, eene zienswijze, die o. a. door PICK ⁶⁾, MIELKE ⁷⁾ en TSCHIRCH ⁸⁾ is gedeeld geworden.

Sommigen brengen de looistof in verband met de harsvorming. WIESNER ⁹⁾ gelooft, dat zetmeel en celwand in looistof kunnen worden omgezet en vervolgens in hars. Ook SCHELL ¹⁰⁾ en MIELKE ¹¹⁾ beschouwen de looistof als een intermediair stadium tusschen zetmeel en hars en cellulose en hars. Beiden nemen echter ook aan, dat looistof in zetmeel kan overgaan. BASTIN en TRIMBLE ¹²⁾ hebben bij het onderzoek der harsgangen in Coniferen ook den indruk gekregen, dat de looistof met de harsvorming in verband staat.

Volgens BUIGNET ¹³⁾ draagt de looistof in vruchten bij tot de vorming

1) l. c. p. 58.

2) l. c.

3) W. PFEFFER, Über Aufnahme von Anilinfarben in lebende Zellen, Untersuchungen aus dem botan. Institut zu Tübingen, 2. Bd., 1886—1888, p. 310.

4) l. c. p. 73.

5) l. c.

6) H. PICK, Ueber die Bedeutung des rothen Farbstoffes bei den Phanerogamen und die Beziehungen desselben zur Stärkewanderung, Botan. Centralblatt, Jahrg. IV, 1883, p. 284.

7) G. MIELKE, Ueber die Stellung der Gerbsäuren im Stoffwechsel der Pflanzen, Programm der Realschule vor dem Holstenthore in Hamburg, 1893. Ref. Botan. Centralblatt, Jahrg. XV, 1894, Bd. 59, p. 281.

8) A. TSCHIRCH, Schweiz. Wochenschr. f. Pharm. N^o. 7. Pharm. Centralbl. N^o. 10, 1891, p. 141.

9) J. WIESNER, Über die Entstehung des Harzes im Inneren der Pflanzenzellen, Sitzungsber. d. Wiener. Akad., 1865, 52. Bd. II. Abt. p. 126 en 129. Ref. Jahresber. über die Fortschritte der Chemie etc., 1865, p. 627.

10) l. c.

11) l. c.

12) E. BASTIN en H. TRIMBLE, A contribution to the knowledge of some North Amerikan Coniferae, Amer. Journ. Pharm. 68, 1896.

13) H. BUIGNET, Recherches sur la matière sucrée contenue dans les fruits acides, son origine, sa nature et ses transformations, Compt. rend. 51, p. 894.

van suiker en volgens STADLER¹⁾ levert ze in de nectariën van *Oenothera* en *Saxifraga* het materiaal voor de vorming der honig.

In verband met de physiologische beteekenis der looistoffen en de stofwisseling in de planten komt het mij wenschelijk voor, er op te wijzen tot welke resultaten de botanici gekomen zijn, wat de verplaatsing en het ontstaan der looistoffen betreft.

Eenige onderzoekers nemen aan, dat de looistof zich in de plant verplaatst kan, nl. KRAUS, MOELLER en WESTERMAIER. Volgens KRAUS²⁾ verplaatst de looistof zich als zoodanig. MOELLER³⁾ acht het waarschijnlijk, dat de koolhydraten zich in den vorm van looistofverbindingen verplaatsen. WESTERMAIER⁴⁾ laat het onbeslist of looistof als zoodanig zich verplaatst en of het zetmeel in den vorm van een oplosbaar koolhydraat of in dien van looistof zich verplaatst.

Over het ontstaan der looistoffen in de plant zijn de meeningen der botanici verdeeld. Zooals boven reeds is vermeld, is volgens SCHLEIDEN⁵⁾ de looistof een ontledingsprodukt van den celwand. Volgens TH. HARTIG⁶⁾ ontstaat ze bij het kiemingsproces van *Quercus pedunculata* uit zetmeel. Ook volgens SCHELL⁷⁾ wordt bij de kieming der zaden van *Faba vulgaris* en *Pisum sativum* looistof uit zetmeel gevormd. MIELKE⁸⁾ neemt aan, dat de looistoffen uit koolhydraten ontstaan, uit looistofglucosiden, en ook uit zetmeel en cellulose. WESTERMAIER⁹⁾ beschouwt ze als een assimilatieprodukt, doch neemt ook aan, dat ze bij ontleding van eiwitstoffen gevormd worden. Volgens SCHROEDER¹⁰⁾ worden ze door oxydatie uit in de planten aanwezige organisch materiaal gevormd. KRAUS¹¹⁾ geloofte, dat het afvalproducten zijn van amideachtige stoffen, die bij de vorming van eiwitstoffen ontstaan. Door de waarnemingen van MOELLER¹²⁾ bij de

1) S. STADLER, Beiträge zur Kenntniss der Nectarien und der Biologie der Blüten, Berlin 1886.

2) G. KRAUS, Grundlinien zu einer Physiologie des Gerbstoffs, 1889, p. 20.

3) HERMAN MOELLER, Anatom. Untersuchungen über das Vorkommen der Gerbsäure, Ber. d. deutschen bot. Gesellsch. Bd. VI, p. LXXX.

4) M. WESTERMAIER, Neue Beiträge zur Kenntniss der physiologischen Bedeutung des Gerbstoffes in den Pflanzengewebe, Sitzungsber. d. königl. preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Jahrg. 1887, 1. Halbb. p. 134.

5) l.c. p. 141.

6) l.c. p. 102.

7) l.c.

8) l.c.

9) Zur physiol. Bedeutung des Gerbstoffes in den Pflanzen, l.c. p. 1124.

10) l.c. p. 146.

11) Grundlinien, p. 47.

12) MOELLER, Mitt. des naturw. Vereins f. Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald, 1887.

bladen van *Ampelopsis hederacea* en door die van BÜSGEN¹⁾ bij kiemende zaden van *Vicia Faba* en bij verwonde bladen, die zich op eene tienprocentische oplossing van druivensuiker bevonden, is het ontstaan van looistof uit suiker aangetoond geworden.

Door KRAUS²⁾ en WESTERMAIER³⁾ is er op gewezen, dat in sommige gevallen de vorming der looistoffen afbankelijk is van den invloed van het licht.

Uit het bovenvermelde blijkt, dat de meeningen der botanici over de physiologische beteekenis der looistoffen zeer uiteenloopen. Men kan ze in hoofdzaak als volgt samenvatten. Volgens sommigen hebben de looistoffen voor de plant geen waarde en zijn het afvalprodukten der stofwisseling. Anderen zien in de looistoffen beschermingsmiddelen tegen verschillende schadelijke uitwendige invloeden. Weinigen gelooven, dat de looistoffen bijdragen tot opbouw van het plantaardig organisme. Enkel menen, dat de looistoffen verschillende functies kunnen vervullen.

Door verschillende schrijvers, o. a. door CZAPEK⁴⁾ in zijne *Biochemie der Pflanzen* en door DEKKER⁵⁾ in zijne *Botanisch-chemische Monographie der Tanniden*, is er op gewezen, dat de veelvuldige onderzoekingen over de physiologie der looistoffen tot nog toe weinig resultaten van beteekenis hebben opgeleverd. DEKKER komt tot de conclusie, dat, zoo men aan deze groep van verbindingen eene beteekenis voor de plant moet toekennen, wat hij waarschijnlijk acht, het geheel nog niet vast staat, welke functie ze vervullen. NOLL⁶⁾ laat zich in STRASBURGER'S *Lehrbuch der Botanik* in gelijken geest uit. Dat de physiologische beteekenis der looistoffen nog zoo in het duister ligt, wordt aan verschillende oorzaken toegeschreven. Zoo gaven volgens CZAPEK⁷⁾ soms enkele langs mikroskopischen of chemischen weg vastgestelde feiten aanleiding tot generalisatie en tot het ontwerpen van onhoudbare theorieën. DEKKER⁸⁾ wijst bovendien nog op de onvolkomenheid der methoden van onderzoek en het eenzijdig gebruik er van, waardoor looistoffen soms met andere plantenstoffen verwisseld zijn geworden.

Naar mijne meening moet de voornaamste oorzaak daarin gezocht

1) l. c. p. 34 en 35.

2) *Grundlinien*, p. 20 en 44.

3) *Zur physiolog. Bedeutung des Gerbstoffes in den Pflanzen*, l. c. p. 1117. *Neue Beiträge etc.* l. c. p. 128 en 133.

4) l. c. p. 588.

5) l. c. D. I, p. 220.

6) l. c. 8. Aufl. 1906, p. 190.

7) l. c. p. 588.

8) l. c. D. I, p. 210 en 211.

worden, dat bij het maken van gevolgtrekkingen dikwijls veel te weinig kritiek is uitgeoefend. Het physiologisch looistofvraagstuk is zeer zeker een zeer moeilijk probleem, bij welks beantwoording met een groot aantal factoren rekening gehouden moet worden. Deze factoren zijn in meerdere of mindere mate aan ons bekend, doch ook onbekende factoren kunnen in het spel zijn. Vandaar dat bij het maken van gevolgtrekkingen de meest mogelijke voorzichtigheid dient in acht genomen te worden. Bij het geven van eene verklaring van een waargenomen verschijnsel dient ernstig overwogen te worden of ze de eenig mogelijke is en moet men op verschillende wijze door het nemen van vergelijkende proeven ze trachten te bewijzen. Dit alles heeft lang niet in zulk eene mate plaats gevonden als de ingewikkeldheid van het probleem eischt. Naar aanleiding van enkele waarnemingen hebben vele onderzoekers verklaringen gegeven, terwijl ook andere zeer plausibel waren, of de meeningen van andere onderzoekers bestreden, die misschien een juister inzicht hadden, al hadden deze ook zelf daarvoor geen voldoende bewijzen kunnen bijbrengen. Zelfs ernstige onderzoekers zijn in die fout vervallen. Met een enkel voorbeeld wil ik dit toelichten. Ik zal nl. aantoonen op hoe losse gronden, de mogelijkheid, dat de looistoffen voor bouw materiaal zouden kunnen dienen, verworpen is geworden.

Zooals hierboven reeds is vermeld, gelooft SACHS niet, dat de looistoffen op eenigerlei wijze als bouw materiaal bij de weefselvorming fungeeren. Deze meening vindt bij SACHS haren steun deels in waarneming, deels in eene mijns inziens onjuiste gevolgtrekking. SACHS¹⁾ constateerde, dat bij de kieming van zaden, die geen looistof in het endosperm of in het embryo bevatten, bij de weefselvorming looistoffen optreden en wel allereerst daar, waar de weefselvorming juist begonnen is. Nimmer zag hij gedurende de kieming de looistoffen verdwijnen of verminderen. In andere gevallen, nl. bij den eikel en bij den kastanje, waar het embryo looistof bevat, nam hij ook geen vermindering waar, eerder nog eene vermeerdering. Overeenkomstige waarnemingen deed hij bij de ontwikkeling van knoppen. SACHS besluit uit de medegedeelde feiten, dat de looistoffen op de plaatsen, waar ze gevormd worden in de plant blijven liggen en dat ze dus niet aan de weefselvorming deelnemen, want was dit het geval, dan zou men eene vermindering hebben moeten waarnemen. Ik vind deze gevolgtrekking onjuist. Op grond van de waarnemingen van SACHS zou men evengoed eene andere kunnen maken, nl. deze,

¹⁾ *Physiolog. Untersuchungen über die Keimung der Schminkbohne*, l. c. p. 111. *Zur Keimungsgeschichte der Dattel*, l. c. p. 246. *Handbuch der Experimental-Physiologie der Pflanzen*, 1865, p. 361.

dat op grond van het veelvuldige optreden of voorhanden zijn van looistoffen bij de weefselvorming, die stoffen waarschijnlijk daarbij eene verrichting te vervullen hebben. Echter acht ik absoluut niet door SACHS bewezen, dat de looistof op de plaats, waar ze gevormd wordt, blijft liggen en dat ze niet voor bouw materiaal bij de weefselvorming dient. Wanneer nl. bij de ontkieming der zaden meer looistof gevormd wordt dan er omgezet wordt, behoeft er geen vermindering van het looistofgehalte plaats te vinden en zal er zelfs eene vermeerdering kunnen plaats hebben. Voor de reservestoffen als zetmeel en vette olie mag men niet aannemen, dat ze rechtstreeks aan den bouw der celwanden deelnemen. Ze moeten eerst in oplosbare stoffen worden omgezet. Gesteld nu, dat ook de looistof tot deze categorie behoort, d. w. z. tot de bouwstoffen, die in opgelosten staat in de plant aanwezig zijn, dan is er niets bevreemdends in gelegen, dat voor het onderhouden van den groei voortdurend voldoende van deze bouwstof aanwezig is en dat soms, nl. wanneer uit de reservestof er meer van geproduceerd wordt dan bij den groei van de celwanden verbruikt wordt, het looistofgehalte toeneemt. Bewezen is het althans niet, dat de looistof, omdat geen vermindering er van plaats vindt, op de plaats, waar ze gevormd is, onverbruikt blijft liggen en niet dient voor den opbouw van de celwanden.

Evenals SACHS neemt ook KRAUS¹⁾ aan, dat eene vermeerdering van het gehalte aan looistof bij het kiemingsproces bewijst, dat deze stof niet verbruikt wordt en niet voor bouwstof dient. Zoo zegt KRAUS betreffende het kiemen van den eikel op grond van quantitative bepalingen van het looistofgehalte, dat niet alleen geen looistof verbruikt wordt, maar dat hare hoeveelheid zelfs toeneemt en ze dus niet dient voor den groei.

Terwijl SACHS bij de kieming van zaden alleen vermeerdering van het looistofgehalte waarnam, nam SCHELL²⁾ bij sommige planten vermeerdering en bij andere vermindering of verdwijning waar. In het eerste geval neemt SCHELL in overeenstemming met SACHS aan, dat de looistoffen nevenprodukten der stofwisseling zijn, doch in het laatste geval beschouwt hij ze als bouwstoffen. In verband met het reeds vermelde spreekt het van zelf, dat ik ook met de gevolgtrekkingen van SCHELL niet kan instemmen. Naar mijne meening behoeft men op grond van de waarnemingen van vermeerdering van het looistofgehalte in sommige gevallen en van vermindering in andere nog niet er toe te besluiten, dat de looistoffen in verschillende planten zich zoo verschillend gedragen. Gesteld dat in beiderlei

¹⁾ Grundlinien, p. 38.

²⁾ l.c. p. 876.

gevallen de looistoffen bouwstoffen zijn, dan kan het alleen reeds van de hoeveelheden, die geproduceerd en verbruikt worden, afhangen, of vermeerdering of vermindering van het gehalte zal plaats vinden. Zeer plausibel acht ik het ook, dat bij eene en dezelfde plant, al naardat de omstandigheden zijn, nu eens vermeerdering, dan weder vermindering plaats vindt.

Meerdere botanici nemen aan, dat de looistoffen zich in de plant verplaatsen kunnen. Over de wijze, waarop dit geschiedt, loopen de meeningen uiteen, doch waar geen meeningsverschil over kan bestaan, is dat de mogelijkheid eener verplaatsing de beantwoording der vraag, of ze voor bouw materiaal kunnen dienen, veel ingewikkelder maakt. De vermeerdering en de vermindering van het looistofgehalte van enig plantendeel behoeven dus niet alleen van productie en verbruik af te hangen, maar ook aanvoer en afvoer zijn factoren, waarmede rekening moet gehouden worden. Alleen uit de omstandigheid, dat het gehalte aan looistof in eene kiemplant of in een plantendeel toeneemt of afneemt, valt niets af te leiden, dat voor de beantwoording der vraag betreffende hare beteekenis als bouwstof eenige waarde heeft.

Voor het bestudeeren der physiologische beteekenis der looistof zijn tot nu toe door de botanici hoogere planten gekozen. Voor de studie der ingewikkelde levensprocessen en van de physiologische beteekenis der chemische bestanddeelen leveren, naar mij voorkomt, sommige lagere planten bepaalde voordeelen op boven hoogere met zooveel meer gecompliceerden bouw. Bijzonder geschikt voor zoodanige studie schijnen mij de dikkere soorten van het geslacht *Spirogyra*. Wel is waar is de looistof van *Spirogyra* nog niet chemisch onderzocht geworden, doch op grond van talrijke mikrochemische reacties kan men met eene vrij groote mate van zekerheid aannemen, dat *Spirogyra* in het celvocht eene aanzienlijke hoeveelheid looistof bevat. Door DE VRIES¹⁾ is dit na abnormale plasmolyse met verschillende looistofreagentiën aangetoond, o.a. met ferrizouten, kaliumbichromaat en osmiumzuur. Behalve de genoemde reagentiën geven ook vele andere in het celvocht neerslagen, die volkomen overeenkomen met de neerslagen, die daarmede in oplossingen van looistoffen teweeggebracht worden.

De voordeelen, die dikke soorten van het geslacht *Spirogyra* aanbieden boven hoogere planten, zijn de volgende. Stukjes der draden

¹⁾ H. DE VRIES, Plasmolytische Studien über die Wand der Vakuolen, Pringsh. Jahrb. f. wissensch. Botanik, Bd. 16, 1885, Heft 4, p. 575. Over looistofreactiën van *Spirogyra nitida*, Maandblad voor Natuurwetenschappen, 1885, N^o. 7, Overdruk, p. 7.

kan men mikroskopisch onderzoeken zonder ze te dooden of te beschadigen en de veranderingen in de cellen kan men bij de levende plant bestudeeren. Ze leenen zich bijzonder goed voor allerlei proefnemingen. Om ze te hanteeren zijn ze niet te klein en voor mikroskopisch onderzoek niet te dik. De verschillende bestanddeelen in de cellen zijn gemakkelijk onder den mikroskoop waar te nemen. Evenals bij ééncellige algen is zeer waarschijnlijk ook bij *Spirogyra* een transport van voedingsstoffen van de eene cel naar de andere buitengesloten. Deze belangrijke factor, waarmede wij bij hogere planten rekening moeten houden, kan bij *Spirogyra* in veel gevallen buiten beschouwing blijven. Door middel van centrifugeeren kan men allerlei afwijkingen verkrijgen als meerkernige cellen, kernlooze cellen, cellen met veel en weinig chromatophoren-massa en zelfs chromatophorenvrije cellen. Hierdoor is men o. a. in staat het assimilatieproces, nl. het opnemen van koolstof door middel der chromatophoren uit het koolzuuranhydride der lucht onder den invloed van het licht uit het levensproces uit te schakelen. Bij *Spirogyra* heeft men gelegenheid een aantal vergelijkende proeven te nemen, die bij hogere planten niet genomen kunnen worden, en doordat sommige factoren buitengesloten zijn of uitgeschakeld kunnen worden, kunnen andere met meer kans van slagen bestudeerd worden.

Omdat het onderzoek van hogere planten voor de kennis van de physiologische beteekenis der looistoffen nog zoo weinig bevredigende resultaten heeft opgeleverd, heb ik op grond van de bovenvermelde overwegingen bij lagere planten, inzonderheid bij *Spirogyra*, eens beproefd meer positieve gegevens voor de oplossing van het physiologisch looistofvraagstuk te verkrijgen.

Hierbij deed zich allereerst de vraag voor, welke methode daarvoor het meest in aanmerking kwam. Bij de hogere planten zijn door de onderzoekers, die zich met het vraagstuk hebben bezig gehouden, verschillende methoden gevolgd geworden. Van de vele stoffen, die met looistoffen verkleuringen of neerslagen geven, zijn het vooral ferrizouten en kaliumbichromaat geweest, waaraan de onderzoekers de voorkeur gegeven hebben. Vooral van kaliumbichromaat, dat met looistoffen een roodbruin of geelrood neerslag geeft, is een veelvuldig gebruik gemaakt, o. a. door SCHROEDER¹⁾, SCHELL²⁾, KUTSCHER³⁾, RULF⁴⁾ SCHULZ⁵⁾ MOELLER⁶⁾ en BÜSGEN⁷⁾. KUTSCHER vervaardigde eene

1) l. c. p. 140. 2) l. c. p. 873. 3) l. c. p. 38 en 39.

4) P. RULF, Ueber das Verhalten der Gerbsäure bei der Keimung der Pflanzen, Zeitschrift für Naturwiss. in Halle, LVII. Bd. Vierte Folge Bd. III, 1884, p. 42.

5) l. c. 227.

6) HERMANN MOELLER, Anatomische Untersuchungen über das Vorkommen der Gerbsäure, Ber. d. deutschen botan. Gesellsch., Bd. VI, 1888, p. LXVI.

7) l. c. p. 13.

schaal met acht vakken, waarvan de kleur overeenkwam met de kleur van het neerslag, doch die in verschillende mate sterk gekleurd waren en wel zoo, dat de sterkte van de kleur van twee opvolgende vakken telkens evenveel verschilde. Deze schaal diende ter bepaling van de sterkte der neerslagen.

KRAUS¹⁾ bepaalde de hoeveelheid looistof door titratie met kaliumpermanganaat of sloeg de looistof neer met koperacetaatoplossing en woog het neergeslagen koper als koperoxyde. De titrimetrische bepaling met kaliumpermanganaat paste ook RULF²⁾ toe.

De bovengenoemde titrimetrische en gewichtsanalytische methoden kunnen natuurlijk bij een klein object als Spirogyra niet worden toegepast; bovendien beantwoordde geen enkele methode aan den eisch, die ik mij had gesteld. Ik wilde nl. over eene methode beschikken om bij een en dezelfde cel op verschillende tijdstippen het looistofgehalte te bepalen met voldoende nauwkeurigheid om eene vermeerdering of vermindering er van te constateeren zonder de cel te dooden of noemenswaardig te schaden. De behoefte aan zoodanige methode had zich doen gevoelen bij het onderzoek van verschillende abnormale cellen als meerkernige, kernlooze en cellen met veel, met weinig en zonder chromatophoren. Terwijl ik bij het onderzoek van zulke cellen door metingen den groei kon bepalen en uit de grootte der zetmeelhaarden kon afleiden of het zetmeelgehalte toegenomen of afgenomen was, was het mij niet mogelijk bij een en dezelfde cel eene voorstelling te verkrijgen van het looistofgehalte in verschillende perioden van haar bestaan. De gebruikelijke reagentiën laten slechts een enkel onderzoek toe, omdat nl. bij het onderzoek de cellen gedood worden. Ik moest dus naar eene andere methode omzien.

Ik legde mij de vraag voor of methyleenblauw misschien aan het gestelde doel zou kunnen beantwoorden. Volgens PFEFFER³⁾ gaat dit met looistof in de levende cel eene verbinding aan, die zich als een fijn blauw neerslag afscheidt. Voor verschillende physiologische onderzoekingen worden door PFEFFER, anilinekleurstoffen, inzonderheid methyleenblauw, zeer warm aanbevolen. Hij zegt daarover o.a. het volgende⁴⁾: „In allen Fällen werden also Methylenblau und andere Farbstoffe wertvolle Reagentien sein, mit deren Hülfe, ohne Schädigung Aufschlüsse über Vorkommen und Verteilung gewisser Körper in der Zelle zu erhalten sind. Mit solcher vielseitig ausnutzbaren

¹⁾ Grundlinien, p. 61.

²⁾ l. c. p. 42.

³⁾ l. c. p. 190.

⁴⁾ l. c. p. 191.

Methode lässt sich unter richtiger Erwägung nach vielen Richtungen hin eine Kontrolle des jeweiligen Zustandes des Zellsaftes und der Veränderungen dieses im Laufe der Entwicklung erreichen." Bij gebruik van verdunde oplossingen gaat het indringen van methyleenblauw in het plantenlichaam en de ophooping er van in het celvocht volgens PFEFFER¹⁾ zonder het leven te schaden voort en zelfs, wanneer volkomen verzadiging is ingetreden, blijkt het nog onschadelijk. Tot de verschillende objecten, waarmede PFEFFER experimenteerde, behoorde ook *Spirogyra*.

De proeven van PFEFFER werden door mij eenige malen herhaald bij *Spirogyra maxima*, doch met zeer ongunstigen uitslag. In de cellen werd zelfs na verloop van eenige dagen slechts een gering korrelig neerslag verkregen en bleef althans de grootste hoeveelheid looistof in oplossing; bovendien bleken ook zeer verdunde oplossingen nog in hooge mate schadelijk te werken. Ik kan dus nog niet instemmen met de loftuitingen van PFEFFER over zijne methode van onderzoek. Na deze teleurstelling werd naar eene betere methode gezocht.

Met een aantal stoffen, die met looistoffen neerslagen geven, alkaloïden, antipyrine, ammoniumvanadaat en vele andere, werden bij *Spirogyra maxima* voorloopige proeven genomen. Van al de onderzochte stoffen bleken caffeine en antipyrine de minst schadelijke te zijn, waarom van de werking van deze beide stoffen eene meer uitvoerige studie gemaakt werd, ten einde hare waarde voor de studie van het physiologisch looistofvraagstuk te leeren kennen. Hierbij werd vooral op het volgende gelet, nl. of de stoffen spoedig in de cel en tot in het celvocht doordringen, of eene volledige praecipitatie van de looistof in de cel te verkrijgen is en welke concentratie de oplossingen in verband hiermede moeten bezitten, op den aard van het neerslag, of het neerslag na verwijdering van het praecipitatie-middel weder oplost, of de sterkte van het praecipitaat beantwoordt aan de hoeveelheid looistof in de cellen aanwezig en of de methode als voldoende onschadelijk te beschouwen is. Na een aantal proeven met antipyrine- en caffeine-oplossingen van verschillende sterkte, die ik gedurende korten of langen tijd liet inwerken, is mij het volgende gebleken.

De antipyrine- en caffeine-oplossingen dringen snel in de cellen door en veroorzaken bij voldoende concentratie spoedig in het celvocht een neerslag, dat uit kleine korreltjes of bolletjes bestaat, die in aanhoudende heen en weer gaande beweging zijn. Om de looistof

¹⁾ l. c. p. 195, 196 en 197.

zoo volledig mogelijk te praecipiteeren is het wenschelijk antipyrine-oplossingen niet slapper dan van 1% en caffeine-oplossingen niet slapper dan van $\frac{1}{10}$ % te gebruiken. Al naarmate het looistofgehalte grooter is, is het praecipitaat sterker. Niet zelden is het praecipitaat zoo sterk, dat men de kern, die men bij *Spirogyra maxima* anders gemakkelijk kan waarnemen, volstrekt niet kan onderscheiden en soms is het praecipitaat zelfs nog sterker. Brengt men de *Spirogyra*-draden weder in slotwater of gedistilleerd water, dan is het praecipitaat na korten tijd, b. v. na tien minuten, weder verdwenen en zien de *Spirogyra*-draden er weder uit als voor de proef. Men kan volstrekt niet bemerken, dat er iets mede heeft plaats gevonden. Blijven de *Spirogyra*-draden in de oplossingen, dan bezinkt het neerslag en vereenigen de kleine bolletjes of kogeltjes, waaruit het bestaat, zich langzamerhand tot grootere volkomen kleurloos schijnende bollen, die soms zeer groot kunnen zijn en zeer veel op vetbollen gelijken. Zoodanig deed zich gewoonlijk het neerslag voor na verloop van enkele dagen. Het bezinken van het neerslag in de cellen en de vereeniging der kleine kogeltjes tot groote zuiver bolvormige massa's bewijst, dat het neerslag zwaarder is dan water en dat het vloeibaar is. Uit verschillende gegevens leid ik af, dat het niet dunvloeibaar is, maar dikvloeibaar. De vereeniging tot groote bollen gaat langzaam en kan b. v. door eenige minuten te centrifugeeren niet tot stand gebracht worden. Wanneer de *Spirogyra*-cellen met het uit bollen bestaand neerslag in water worden gebracht, lossen de bollen op. De oplossing gaat echter langzamer dan die van het pas ontstane en nog fijn verdeelde neerslag. Brengt men de praeparaten in plaats van in water in ijzerchloride-oplossing, dan worden de bollen blauw gekleurd, terwijl het celvocht niet blauw gekleurd wordt. Rationeel is het bij deze proef caffeine-oplossing als praecipitatie-middel te gebruiken, omdat antipyrine met ijzerchloride eene roodviolette verkleuring geeft. Daar de aldus gekleurde verbinding oplosbaar is en zich gemakkelijk verspreiden laat, is ook bij gebruik van antipyrine de looistofreactie met ijzerchloride bij de bollen waar te nemen en het wegblijven er van bij het celvocht te constateeren, wanneer althans het ijzerchloride snel genoeg inwerkt. Brengt men de praeparaten uit de antipyrine- of caffeine-oplossing in eene éénprocentische osmiumzuur-oplossing, dan worden de bollen aanvankelijk blauwachtig en spoedig daarna zwart gekleurd, terwijl het celvocht ongekleurd blijft.

Uit de proeven met ijzerchloride en osmiumzuur blijkt, dat de looistof door eene éénprocentische antipyrine-oplossing en eene $\frac{1}{10}$ -procentische caffeine-oplossing volkomen of nagenoeg volkomen wordt

neergeslagen, want anders zou ook het celvocht blauwkleuring of zwartkleuring hebben moeten vertoonen. Lost men het antipyrine- of caffeine-neerslag op, hetzij het pas ontstane fijn verdeelde, hetzij het tot bollen samengepakte, door de Spirogyra-draden in water te brengen en voegt men dan ijzerchloride-oplossing of osmiumzuur-oplossing toe, dan wordt het celvocht blauw of zwart gekleurd, evenals dit het geval is met cellen, die niet met antipyrine- of caffeine-oplossing zijn behandeld geweest. Wanneer in antipyrine- of caffeine-oplossing de cellen eindelijk afsterven, worden de bollen bruin gekleurd; hunne oplosbaarheid in water is dan minder geworden doch met ijzerchloride en osmiumzuur geven ze nog de vermelde reacties.

Door vergelijkende proeven met antipyrine- en caffeine-oplossingen en verschillende andere looistofreagentiën, als kaliumbichromaat, osmiumzuur en ferrizouten, bij Spirogyra-cellen met verschillend looistofgehalte stelde ik vast, dat de sterkte der antipyrine- en caffeine-neerslagen overeenkwam met de sterkte der neerslagen en verkleuringen, die de andere hierboven genoemde reagentiën gaven. Voor deze proeven dienden Spirogyra-draden, die eenige weken van te voren gecentrifugeerd waren geworden en waarin zich ook allerlei abnormale cellen bevonden, als kernlooze, chromatophorenvrije, meerkernige enz. Het looistofgehalte van de cellen dezer draden was zeer verschillend. Eerst werden de draden met antipyrine- of caffeine-oplossing behandeld en de sterkte der neerslagen in de verschillende cellen genoteerd; daarna werden de draden in water gebracht en wanneer de neerslagen weder opgelost waren, in eene oplossing van kaliumbichromaat, osmiumzuur of ijzerchloride, waarna weder genoteerd werd, hoe de reacties bij de verschillende cellen waren uitgevallen. Bij vergelijking der verschillende aantekeningen bleek, dat de sterkte der antipyrine- en caffeine-neerslagen overeenkwam met de sterkte der reacties met de andere reagentiën verkregen en dus beantwoordde aan de sterkte der hoeveelheden looistof in de verschillende cellen aanwezig.

De sterkte der neerslagen met antipyrine en caffeine werd op verschillende wijze beoordeeld. Zoo werd er op gelet, of de kern, die bij Spirogyra maxima onder normale omstandigheden zeer duidelijk te onderscheiden is, na praecipitatie der looistof nog te onderscheiden was. Verder werd nagegaan of de ophangdraden, de chromatophoren en de zetmeelhaarden boven en beneden in de cel nog waarneembaar waren. Om te beoordeelen in welke cellen de neerslagen het sterkst waren, werden niet alleen na de praecipitatie de verschillende cellen met elkaar vergeleken, doch ook werd nagegaan in welke cellen het neerslag het eerst optrad en na overbrenging in

water het langst waarneembaar bleef. Het was mij nl. gebleken, dat het neerslag het eerst optreedt in de cellen met het grootste looistofgehalte en dat het in die cellen, wanneer de draden weder in water gebracht worden, het langst waarneembaar blijft.

In verband met het gebruik, dat ik mij voorstelde van de antipyrine- en cafeïne-oplossingen te maken, was het van veel belang te weten in welke mate deze oplossingen schadelijk voor het leven zijn en of een kort verblijf der Spirogyra-draden in deze oplossingen, noodig om eene voorstelling van het looistofgehalte te verkrijgen als onschadelijk of nagenoeg onschadelijk zou kunnen beschouwd worden. Het bleek mij, dat wanneer eene éénprocentische antipyrine- of eene $\frac{1}{10}$ -procentische cafeïne-oplossing genomen werd, met slootwater of gedistilleerd water bereid, dus eene oplossing van zoodanige concentratie, dat alle of nagenoeg alle looistof in de cellen neergeslagen werd en de Spirogyra-draden in deze oplossing bleven, geen deelingen meer optraden en dat de groei zeer spoedig tot staan kwam of wel, dat in het geheel geen groei meer plaats vond. Werden daarentegen oplossingen gebruikt, die tienmaal slapper waren, dus oplossingen, die geen neerslagen in de cellen teweegbrachten, dan bleek uit vergelijkende proeven met Spirogyra-draden, die zich in slootwater of gedistilleerd water bevonden, dat door antipyrine en cafeïne de groei vertraagd werd en dat minder kern- en celdeelingen plaats vonden.

Met eene éénprocentische antipyrine-oplossing en met eene $\frac{1}{10}$ -procentische en eene éénprocentische cafeïne-oplossing nam ik proeven om te zien, of een dagelijksch verblijf in die oplossingen gedurende tien minuten voor Spirogyren, die in slootwater gekweekt werden, schadelijke gevolgen had. De tijd van 10 minuten werd genomen, omdat die tijd voldoende is voor een onderzoek naar het looistofgehalte. Het resultaat van deze proeven was, dat niet met zekerheid kon worden geconstateerd, dat de gevolgde methode van onderzoek een schadelijken invloed op de Spirogyren uitoefende. Nu eens was de groei der draden, die voortdurend in slootwater geweest waren, sterker, dan weder die der draden, die periodiek met antipyrine- of cafeïne-oplossing behandeld waren. Niet onwaarschijnlijk is het, dat de gevonden verschillen grootendeels afhankelijk zijn van den aard der onderzochte cellen. Ik vermoed dit, omdat de groei van verschillende cellen in normale en gelijke voedingsvloeistoffen eveneens verschillen oplevert. Uit de resultaten der genomen proeven mag worden afgeleid, dat een dagelijksch kort verblijf der Spirogyra-draden in de verschillende oplossingen voor den groei en voor het levensproces in het algemeen van weinig beteekenis is. De hierboven aangegeven methode van onderzoek naar het looistofgehalte kan ik daarom zeer

aanbevelen, vooral wanneer men dezelfde cellen telkens na verloop van eenigen tijd wil onderzoeken zonder ze te schaden.

Voor zoover ik heb kunnen nagaan zijn antipyrine- en caffeine-oplossingen nog niet voor mikrochemische looistofreagentiën in aanmerking gekomen. Volledigheidshalve wil ik er op wijzen, dat toch zulke oplossingen reeds bij mikrochemisch onderzoek door botanici gebruikt zijn nl. door LOEW en BOKORNY¹⁾ en wel voor het aantoonen van niet georganiseerd actief eiwit in de levende cel. Door de vermelde reagentiën zou dit in den vorm van kleine kogeltjes, door de beide schrijvers proteosomen genoemd, uitgescheiden worden. Dit is dus eene geheel andere verklaring van het verschijnsel, dat eene antipyrine- of caffeine-oplossing in de levende cel teweegbrengt, dan de door mij gegeven verklaring. Op grond mijner hierboven medegedeelde onderzoekingen blijf ik evenwel bij mijne opinie, dat antipyrine- en caffeine-oplossingen waardevolle looistofreagentiën zijn en neem ik aan, dat LOEW en BOKORNY eene onjuiste verklaring van het door hen waargenomen verschijnsel gegeven hebben.

In het historisch overzicht heb ik er op gewezen, dat, wat de physiologische beteekenis der looistoffen betreft, onder de onderzoekers veel verschil van meening bestaat en dat men volgens de meening van verschillende botanici nog weinig als voldoende bewezen kan beschouwen en men hier eigenlijk voor een vraagstuk staat, dat nog in geenen deele tot oplossing is gebracht. Zooals hierboven reeds is medegedeeld, heeft de zienswijze, dat de looistoffen zouden kunnen dienen voor de vorming van celwanden, weinig ingang en veel bestrijding gevonden. Met behulp der door mij uitgewerkte methode is het mij thans bij *Spirogyra* gelukt feiten aan het licht te brengen, die er op wijzen, dat de looistof eene belangrijke rol moet spelen bij de vorming der celwanden, dat ze gedurende dit proces verbruikt wordt en zeer waarschijnlijk dus daarbij voor bouw materiaal dient. Hieronder zal ik eenige waarnemingen mededeelen, die daarop betrekking hebben. Ze betreffen in de eerste plaats de copulatie.

Cellen, die neiging tot copulatie vertoonden, vond ik rijkelijk voorzien van looistof. Ik kon constateeren, dat gedurende de copulatie het looistofgehalte minder werd en in de volwassen zygosporen, die opgevuld waren met reservestof, kon ik alleen met ijzerchloride soms nog eene zwakke looistofreactie waarnemen. Uit het bovenvermelde volgt nog niet, wat er met de looistof plaats vindt, doch wanneer men de copulatie meer in bijzonderheden nagaat, dan blijkt het, dat er zeer veel grond is om te vooronderstellen, dat althans een deel

¹⁾ O. LOEW en TH. BOKORNY, Versuche über aktives Eiweiss für Vorlesung und Praktikum, Biologisches Centralblatt, 1891, XI, p. 5.

van de looistof als bouw materiaal voor den celwand dient. De copulatie is een proces, dat op zoodanige wijze verloopt, dat wij mogen verwachten, dat de studie er van in verband met het gemelde punt van onderzoek ons belangrijke gegevens kan verschaffen. De copulatie begint nl. bij alle cellen niet gelijktijdig. Sommige cellen zijn andere vooruit; bij een grooter of kleiner aantal bestaat blijkbaar neiging tot copuleeren, doch de copulatie gelukt niet en weder andere cellen vertoonen geen spoor van het copulatieproces. Terwijl de copuleerende cellen veel reservestof als vet en zetmeel vormen, worden de niet copuleerende schijnbaar zeer arm aan inhoud en eindelijk gaan ze ten gronde. Door toevallige omstandigheden, als het in aanraking komen der cellen met cellen van andere draden, de nabijheid van zulke cellen, de ligging der cellen ten opzichte van elkaar, schijnen de bovengenoemde verschillen beheerscht te worden. Men neemt ze zelfs waar bij materiaal, dat vóór de copulatie uitsluitend uit gezonde normale cellen bestaat.

Wat in verband met het looistofvraagstuk van belang is, is, dat men bij copuleerende Spirogyra-draden cellen met elkaar vergelijken kan, die kort van te voren nog volkomen gelijk waren en later min of meer belangrijke verschillen opleveren door toevallige weinig ingrijpende omstandigheden teweeggebracht. Interessant is het bij die verschillende cellen na te gaan, hoe het met het looistofgehalte gesteld is. Met de door mij aanbevolen antipyrine- en cafeïne-oplossingen werd dit onderzocht en frappant was het te constateeren, hoe verschillen in ontwikkeling van den celwand beantwoordden aan de hoeveelheid looistof, die in de cellen aanwezig was. Zoo kon ik vaststellen, dat bij de cellen, waarbij de zijdelingsche uitgroeiing en onderlinge vergroeiing hadden plaats gevonden, het looistofgehalte steeds aanmerkelijk geringer was dan bij de cellen, die slechts het allereerste begin der zijdelingsche uitgroeiing vertoonden. Beiderlei cellen leverden alleen, wat den celwand en het looistofgehalte betrof, punten van verschil op; overigens kwamen ze nog volkomen met elkaar overeen. Ze lagen in de draden door elkaar, zooals zulks bij de copulatie regel is. Het bovenvermelde bewijst m. i. dat er verband is tusschen celwandvorming en looistofgehalte en de vooronderstelling, dat de looistof als bouw materiaal voor den celwand dient, ligt zeer voor de hand.

Opmerkenswaardig is vooral ook de aanmerkelijke looistofvermeerdering in de cellen, die niet in de gelegenheid zijn geweest te copuleeren of waarbij het proces vroegtijdig is blijven staan en die te gronde gaan en gewoonlijk worden voorgesteld als arm aan inhoud. Deze cellen gaan nog voort eenigen tijd looistof te produceeren en

daar de looistof er niet voor celwandvorming of voor vorming van reservestoffen gebruikt wordt, neemt het looistofgehalte toe en gaat met haren dood eene aanzienlijke hoeveelheid bouwmetaal in den vorm van looistof verloren.

Het verloren gaan van looistof in de natuur, b. v. bij het afvallen der bladeren in den herfst, is meermalen als argument aangevoerd voor de stelling, dat looistof geen bouwmetaal kan zijn en geen deel neemt aan de stofwisseling. Ik kan die zienswijze niet deelen en vind in het verloren gaan van hoeveelheden van eene stof, die bepaalde planten voor hare ontwikkeling noodig hebben, niets vreemds en volstrekt niet een bewijs, dat ze niet als bouwmetaal voor de ontwikkeling der plant kan dienen. Hoe veel komt er in de natuur niet tot zijn recht en gaat er niet verloren zonder aan zijne bestemming te hebben kunnen beantwoorden! Bovendien komt het mij wenschelijk voor, dat de plant over eene overmaat van bouwmetaal beschikt, opdat de ontwikkeling bij gebrek daaraan niet te eeniger tijd gestoord wordt. Dat de stengel in den herfst niet in staat of in de gelegenheid is, uit de bladeren alle looistof of wat van den overvloed nog in de bladeren achterblijft, tot zich te nemen, bewijst nog niet dat de looistof niet tot den opbouw der weefsels kan dienen. Nog minder behoeft het ons te bevreedden, dat bij *Spirogyra* looistof verloren gaat, want klaarblijkelijk is het hier zeker niet de bedoeling der natuur, dat ze verloren zal gaan. De natuur zorgt bij *Spirogyra* voor eene voldoende hoeveelheid looistof, omdat die stof voor de ontwikkeling noodig is, zooals o. a. bij de copulatie en de vorming der sporen het geval is. Dat de copulatie soms mislukt, waarbij dan veel looistof verloren gaat, bewijst niet, dat ze b. v. een afvalprodukt is en geen bouwmetaal kan zijn.

Eene tweede serie waarnemingen, die ook aantoonen, dat de looistof eene rol bij de celwandvorming speelt, heeft betrekking op de dwarswandvorming. Bij het onderzoek van *Spirogyra*-draden, waarin in deeling zijnde cellen voorkomen, viel het mij herhaaldelijk op, dat het looistofgehalte van die cellen iets geringer was, dan dat van andere, niet in deeling zijnde cellen. Het verschil was niet groot en met sommige der tot nu toe gebruikelijke looistofreagentien, als ferrizouten, kaliumbichromaat, misschien zelfs niet waarneembaar, doch met antipyrine- en cafeïne-oplossingen was het bestaan van een verschil in het looistofgehalte met zekerheid vast te stellen. Niet alleen was het duidelijk zichtbaar, dat het neerslag met antipyrine- of cafeïne-oplossing in de zich deelende cellen iets geringer was dan in andere, doch bij behandeling der draden met deze oplossingen bleek ook, dat het neerslag in de zich deelende cellen iets

later optrad dan in andere en bij overbrenging der praeparaten in gedistilleerd water of slootwater bleek, dat het neerslag in eerstgenoemde cellen ook iets eerder verdween. Volledigheidshalve vermeld ik nog, dat tusschen cellen, waarbij kern- en celdeeling juist een aanvang genomen hadden, en niet in deeling zijnde cellen nog geen verschil in het looistofgehalte te constateeren viel, doch wel bleek het looistofgehalte verminderd, wanneer het kern- en celdeelingsproces in vollen gang was of als afgelopen kon beschouwd worden.

De bovenvermelde resultaten toonen aan, dat er verband moet gezocht worden tusschen de vermindering van het looistofgehalte en het kern- en celdeelingsproces. Dit proces bestaat eigenlijk uit twee processen, die gelijktijdig plaats vinden, en daarom lag de vraag voor de hand door welk van deze beide processen het looistofgehalte geïnfluenceerd wordt. In verband met deze vraag heb ik eenige proeven genomen.

Zooals ik reeds gemeld heb, houden de groei der cellen en de kern- en celdeelingen op in eene éénprocentische antipyrine-oplossing of in eene $\frac{1}{10}$ -procentische cafeïne-oplossing. Daarom werd nagegaan, welken invloed deze oplossingen op de dwarswandvorming en de karyokinese zouden hebben, wanneer de zich deelende cellen en die, welke de allereerste verschijnselen van het kern- en celdeelingsproces vertoonden, gedurende eenigen tijd er in vertoefden. Draden, waarin zulke cellen voorkwamen, liet ik gedurende $1\frac{1}{2}$ uur in de bovengenoemde oplossingen en onderzocht den volgenden dag, hoe het met de kern- en celdeeling afgelopen was. De dwarswanden, die bezig waren zich te vormen, waren in hunne ontwikkeling gestoord geworden en derhalve was in die gevallen de celdeeling onvolkomen. Interessanter was het resultaat bij de cellen, die, toen ze in de antipyrine- of cafeïne-oplossing gebracht werden, op het punt waren zich te gaan deelen; dikwijls was in zulke cellen den volgenden dag geen spoor van een dwarswand te bespeuren. Het celdeelingsproces was volkomen onderdrukt geworden.

Geheel anders was het daarentegen met het kerndeelingsproces gesteld. In alle cellen, waarin het in gang was of juist zou beginnen, had het zich tot het einde toe voortgezet en het resultaat was immer twee normale dochterkernen, die gewoonlijk op eenigen afstand van elkaar eene plaats in de cel verkregen hadden.

Uit deze proeven blijkt, dat eene tijdelijke vastlegging der looistof door antipyrine of cafeïne de dwarswandvorming opheft, doch niet direct van invloed is op de kerndeeling. Op grond van dit resultaat geloof ik te mogen aannemen, dat er verband gezocht moet worden tusschen de vermindering van het looistofgehalte, waarvan hierboven

sprake was en de dwarswandvorming. Zooïvel de opheffing der dwarswandvorming door vastlegging der looïstof als de vermindering van het looïstofgehalte gedurende de dwarswandvorming wijzen er op, dat looïstof bij de dwarswandvorming noodig is en verbruikt wordt.

Om aangaande deze gevolgtrekking nog meer zekerheid te verkrijgen, werd nagegaan, welken invloed antipyrine of caïfeïne by *Cladophora* op de dwarswandvorming zou hebben. Met ijzerchloride, osmiumzuur en antipyrine verkreeg ik bij *Cladophora* geen looïstofreactie en daarom interesseerde het mij te weten, hoe het b.v. met de dwarswandvorming zou gaan bij overbrenging in eene éénprocentische antipyrine-oplossing. Het bleek mij, dat dwarswanden, die juist begonnen waren zich te vormen, bleven voortgroeien tot ze geheel voltooid waren. Dit was zelfs het geval, wanneer de objecten gedurende het geheele celdeelingsproces in de antipyrine-oplossing bleven. Dit resultaat versterkt mij nog meer in de zienswijze, dat bij *Spirogyra* alleen de vastlegging der looïstof de oorzaak is, dat de dwarswandvorming gestoord of voorkomen wordt. Want bij *Cladophora*, waar bij de dwarswandvorming geen looïstof gebezigd kan worden, brengt eene éénprocentische antipyrine-oplossing zoodanige storing niet teweeg. De eenige ongedwongen verklaring, die naar mijne meening voor de resultaten, die ik bij de copulatie en bij de dwarswandvorming verkreeg, gevonden kan worden, is deze, dat de looïstof als bouwmetaal dient bij den opbouw van den celwand.

Een paar resultaten, die er ook op wijzen, dat er verband is tusschen celwandgroeï en looïstofgehalte, wil ik nog aan de reeds vermelde toevoegen. In *Spirogyra*-draden neemt men soms cellen waar, die te oordeelen naar den stand der dwarswanden door een grooteren turgor van andere onderscheiden zijn. Deze cellen onderscheiden zich bovendien gewoonlijk nog door een grooter zetmeelgehalte. Bij nader onderzoek blijkt, dat hare groei minder is dan die van andere cellen of wel dat de groei geheel tot stilstand is gekomen. De genoemde verschijnselen wijzen op een ziekelijken toestand, want gewoonlijk kon ik constateeren, dat bovengemelde cellen zich niet meer deelden en ten gronde gingen. Wat de oorzaak van dezen toestand is, kan ik niet mededeelen, maar opmerkelijk is het, dat het looïstofgehalte dier cellen, zooals bij onderzoek met antipyrine- of caïfeïne-oplossing blijkt, grooter is dan dat van andere cellen en dikwijls zeer aanzienlijk. Ook hier blijkt weer evenals bij cellen, waarbij de copulatie mislukt, dat stilstand in den groei gepaard gaat met eene vermeerdering van het looïstofgehalte.

Zooals door de onderzoekingen van GERASSIMOFF ¹⁾ en van mij ²⁾ bekend is geworden, is bij kernlooze cellen de groei zeer gering en komt die er langzamerhand geheel tot stilstand. Zoowel bij kernlooze cellen met chromatophoren als bij die zonder chromatophoren, die ik beide verkreeg door vóór of tijdens de karyokinese de cellen te centrifugeeren, wordt na eenigen tijd het looistofgehalte zeer aanzienlijk, zooals bleek bij het onderzoek met antipyrine- en cafeïne-oplossingen. Bij gemis van de kern houdt de groei op en dientengevolge moet het verbruik van looistof minder geworden zijn of ophouden. De productie er van houdt echter nog eenigen tijd aan en vandaar de vermeerdering van de hoeveelheid looistof in de kernlooze cellen. Ook hier dus weder stilstand van den groei en vermeerdering van het looistofgehalte.

De resultaten bij niet groeiende kernhoudende en bij kernlooze cellen verkregen, sluiten zich aan bij die, welke ik bij copuleerende en zich deelende cellen verkreeg, doch zijn van minder gewicht voor de verklaring van de physiologische beteekenis der looistof, omdat de niet groeiende kernhoudende cellen als ziekelijk zijn te beschouwen en de kernlooze zeer abnormale zijn. De resultaten, bij de copuleerende en in deeling zijnde cellen verkregen, acht ik daarentegen zeer belangrijk voor de verklaring van de physiologische beteekenis der looistof, waarin naar mijne meening bij *Spirogyra* eene stof moet gezien worden, die dient voor de vorming der celwanden. Eene reservestof is de looistof daar echter niet; ze behoort tot de opgeloste stoffen, die de plant voortdurend voor hare ontwikkeling noodig heeft. Ze verdwijnt en maakt plaats voor reservestoffen, wanneer de plant zygosporen vormt en in rusttoestand overgaat. Ik ben dus tot een resultaat gekomen, dat in overeenstemming is met conclusies, die door WIGAND bijna een halve eeuw geleden gepubliceerd werden, doch dat zeer in strijd is met de zienswijze van latere onderzoekers, als SACHS, KRAUS en andere. Duidelijkheidshalve moet ik hieraan toevoegen, dat ik geenszins wil zeggen, dat de looistof de eenige stof is, die bij *Spirogyra* voor de celwandvorming dient en ook wil ik niet betoogen, dat de beteekenis der looistof als bouw materiaal hare eenige physiologische beteekenis is.

¹⁾ J. J. GERASSIMOW, Ueber den Einfluss des Kerns auf das Wachstum der Zelle, Separat-Abdruck aus Bull. d. I. Soc. Imp. des Nat. de Moskou, 1901, No. 1 en 2, p. 193. Zur Physiologie der Zelle, Separat-Abdruck aus Bull. d. I. Soc. Imp. des Nat. de Moscou, 1904, No. 1, p. 7.

²⁾ C. VAN WISSELINGH, Over wandvorming bij kernlooze cellen, overdruk uit het Bot. Jaarb. Dodonaea, 13e deel, 1904, p. 5 en 6. Zur Physiologie der Spirogyrzelle, Beihefte zum Botan. Centralblatt, Bd. XXIV, Abt. I, p. 170.

Dit opstel is eene voorloopige mededeeling. Het is mijn voornemen over eenigen tijd meer uitvoerig over de physiologische beteekenis der looistof bij Spirogyra te berichten en dan de gevolgtrekkingen, die betrekking hebben op vergelijkende proeven over den groei der Spirogyra-draden onder verschillende omstandigheden, nl. in anti-pyrine- en cafeïne-oplossingen, in slootwater enz., met tabellen toe te lichten. Ook zullen dan verschillende punten van onderzoek, die het looistofvraagstuk raken, doch waarover in dit opstel geen mededeelingen zijn gedaan, behandeld worden.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling¹⁾ aan van den Heer L. E. J. BROUWER: „*Over continue vectordistributies op oppervlakken*” (tweede mededeeling)¹⁾.

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

§ 1.

De raakkrommen aan een eindige, gelijkmatig continue vectordistributie met een eindig²⁾ aantal singuliere punten, in een enkelvoudig samenhangend binnengebied eener gesloten kromme.

Zij γ het beschouwde gebied, dan mogen we het altijd als op een bol gelegen aannemen, kunnen dus op grond van de in de eerste mededeeling (zie aldaar p. 901) afgeleide eigenschap terstond formuleeren:

STELLING 1. *Een raakkromme, die niet in onbepaalde nabijheid van een nulpunt komt, is òf een enkelvoudige gesloten kromme, òf zoowel de vervolgende als de terugloopende tak vertoont een der volgende gedragingen: 1°. eindigen in een punt van de grens van γ ; 2°. spiraalvormig convergeeren tot een enkelvoudige gesloten raakkromme; 3°. uitloopen in een enkelvoudige gesloten raakkromme.*

In aansluiting hieraan willen we thans de gedaante (in den zin der analysis situs) onderzoeken van een raakkromme r , waarvan we aannemen, dat minstens één van beide takken (b.v. de vervolgende tak) in onbepaalde nabijheid van een of meer nulpunten, d. w. z. singuliere punten, van de vectordistributie komt.

We beginnen de raakkromme in een punt A_0 (dat geen nulpunt is), en stellen ons het vervolgen van die kromme op de volgende wijze voor: Onder β_ε verstaan we een boogafstand met de eigenschap, dat in twee punten, die binnen eenzelfde met een straal β_ε beschreven cirkel liggen, en beide een afstand $> \varepsilon$ van de nulpunten bezitten, de vectoren zeker een hoek $< \frac{1}{8} \pi$ met elkaar maken. We

¹⁾ Voor de eerste mededeeling zie deze Verslagen, deel XVII 2, p. 896.

²⁾ De hierin gelegen beperking zullen we in een volgende mededeeling laten vallen.

kiezen verder een fundamentealreeks van afnemende en tot 0 convergeerende groottheden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ en daarbij passende afnemende boogafstanden $\beta_{z_1}, \beta_{z_2}, \dots$, die we, als a de afstand van A_0 tot de nulpunten is, alle kleiner dan $a - \varepsilon_1$ onderstellen.

We bewijzen dan op de in de eerste mededeeling op p. 897 aangegeven wijze, dat bij het vervolgen van r van A_0 uit eenmaal een punt B_0 wordt bereikt, dat een afstand β_{z_1} van A_1 bezit; den boog $A_0 B_0$ kunnen we weer een β_{z_1} -boog noemen. Volgens de onderstelling is er nu een eindig getal n_1 zoodanig, dat we, na n_1 , maar nog niet $n_1 + 1$ β_{z_1} -bogen te hebben afgelegd, een punt A_1 bereiken, waar we voor het eerst de nulpunten tot op een afstand ε_1 zijn genaderd. Dan is er weer een eindig getal n_2 zoodanig, dat we, na van A_1 af te hebben afgelegd n_2 , maar nog niet $n_2 + 1$ β_{z_2} -bogen, een punt A_2 bereiken, waar we voor het eerst de nulpunten tot op een afstand ε_2 zijn genaderd. Van daar af vervolgen we r met β_{z_3} -bogen, en zetten dit proces onbepaald voort.

Verstaan we dan onder $m(\varepsilon_n)$ den maximum-afstand, dien r van de nulpunten bereikt bij verder vervolgen, *nadat* ze voor het eerst de nulpunten tot op een afstand ε_n is genaderd, dan is een eerste mogelijkheid, dat $m(\varepsilon_n)$ met ε_n tot nul convergeert.

In dat geval convergeert de vervolgende tak tot één enkel nulpunt, en hij is *een enkelvoudige kurvenboog, die in dat nulpunt eindigt*.

We onderstellen nu verder de tweede mogelijkheid, dat $m(\varepsilon_n)$ voor elke ε_n grooter is, dan een eindige grootheid e . Dan kunnen we (door eventueel de reeks der ε_n 's eerst bij een verderop gelegen term te beginnen) altijd zorgen, dat elke $\varepsilon_n < \frac{1}{2} e$, en elke $\beta_{z_n} < \frac{1}{2} e$.

Er zijn dan op den vervolgenden tak zeker twee punten P_1 en Q_1 aan te wijzen, beide op een afstand e van de nulpunten gelegen, en op r gescheiden door minstens één punt op een afstand ε_1 van de nulpunten, terwijl de afstand tusschen P_1 en $Q_1 \leq \frac{1}{4} \beta_{z_1}$ is. Laten

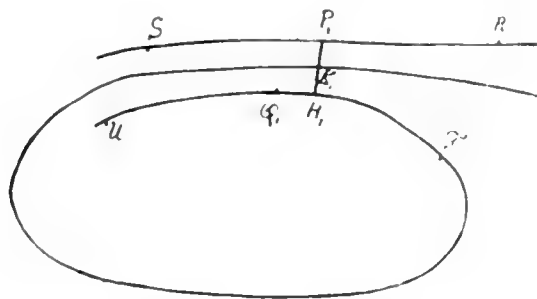


Fig. 1.

P_1S en Q_1U vervolgende β_{ε_1} -bogen, P_1R en Q_1T terugloopende β_{ε_1} -bogen zijn.

Zij H_1 een punt van TU , dat van P_1 den kleinst mogelijken afstand heeft, dan kan H_1 niet met T of U samenvallen, zoodat de geodetische boog P_1H_1 in H_1 loodrecht op de vectorrichting staat, en de vectorrichtingen in alle punten van dien geodetischen boog, daar ze met elkaar een hoek $< \frac{1}{8}\pi$ maken, naar denzelfden kant van den geodetischen boog P_1H_1 zijn gericht.

Zij K_1 het laatste snijpunt van den boog P_1H_1 van r met den geodetischen boog P_1H_1 . Dan vormen de boog K_1H_1 van r , en de geodetische boog K_1H_1 een enkelvoudige gesloten kromme, en we bewijzen op de in de eerste mededeeling op p. 899 aangegeven wijze, dat òf de vervolgende tak van r van H_1 af in het binnengebied, en de terugloopende tak van K_1 af in het buitengebied, òf de vervolgende tak van H_1 af in het buitengebied, en de terugloopende tak van K_1 af in het binnengebied dier gesloten kromme verloopt.

Nemen we eerst aan, dat de vervolgende tak in het *binnengebied* verloopt, dan zijn daarop zeker twee punten P_2 en Q_2 aan te wijzen, beide op een afstand e van de nulpunten gelegen, en op r gescheiden door minstens één punt op een afstand ε_2 van de nulpunten, terwijl de afstand tusschen P_2 en $Q_2 \leq \frac{1}{4}\beta_{\varepsilon_2}$ is. Met behulp van die beide punten construeeren we dan op dezelfde wijze als zooeven een enkelvoudige gesloten kromme, bestaande uit een boog K_2H_2 van r , en een geodetischen boog K_2H_2 , in het binnengebied waarvan de vervolgende tak van r van H_2 af geheel verlopen moet.

Zoo voortgaande construeeren we een fundamenteaalreeks van binnen elkaar gelegen gesloten krommen u_1, u_2, u_3, \dots . Indien er een gebied of gebiedsverzameling G is, die aan alle binnengebieden dezer krommen gemeen is (wat we straks zullen aantoonen, dat inderdaad het geval is), dan kan de grens van G slechts gevormd worden door punten, die tot geen der krommen u_1, u_2, u_3, \dots behooren, maar grenspunten zijn van op die krommen gelegen fundamenteaalreeksen.

Zij $q > p$, en zij B een punt van u_q , dat een afstand $> 3\varepsilon_p$ en $> 3\beta_{\varepsilon_p}$ van de nulpunten heeft. Zij C het eerste punt bij terugloopen, en D het eerste punt bij vervolgen, dat een afstand $\frac{1}{2}\beta_{\varepsilon_p}$ van B bereikt, dan willen we een oogenblik aannemen, dat op u_q buiten den boog CD een punt S bestond, op een afstand $\leq \frac{1}{4}\beta_{\varepsilon_p}$ van B

gelegen, en zullen aantonen, dat deze aanname tot een ongerijmdheid voert.

Zij SV een terugloopende $\frac{1}{2} \beta_{z,p}$ -boog op u_q , SW een vervolgende $\frac{1}{2} \beta_{z,p}$ -boog op u_q , dan kunnen de bogen CD en VW geen punt gemeen hebben, en de geodetische boog $K_q H_q$, die tot u_q behoort, heeft of geen punt met VW , of geen punt met CD gemeen.

In het eerste geval bepalen we op VW een punt M , dat van B een zoo klein mogelijken afstand heeft. De geodetische boog BM staat dan in M loodrecht op VW , en heeft een laatste snijpunt N met CD , zoodat de geodetische boog NM met een der bogen NM van u_q , die b.v. het punt C niet bevat, een gesloten kromme vormt; een der beide daardoor bepaalde gebieden zou u_q rondgelopen in een bepaalden zin, bij M binnentreden, om het nooit meer te kunnen verlaten, dus nooit het punt C te kunnen bereiken, waarmee de ongerijmdheid onzer aanname is gebleken.

In het tweede geval bepalen we op CD een punt M , dat van S een zoo klein mogelijken afstand heeft, en op den geodetischen boog SM het laatste snijpunt N met VW . De verdere redeneering blijft analoog aan de zooeven gevolgde: de rollen der bogen VW en CD zijn alleen verwisseld.

Zij nu B_o het eenige grenspunt van een zekere fundamenteaalreeks van punten B_1, B_2, B_3, \dots , achtereenvolgens op u_1, u_2, u_3, \dots gelegen. We nemen aan, dat B_o geen nulpunt is; het heeft dan voor een passend gekozen p een afstand $> 4 \epsilon_p$ en $> 4 \beta_{z,p}$ van de nulpunten.

Zij verder elke $m_k > p$, en $B_{m_1}, B_{m_2}, B_{m_3}, \dots$ een in de zooeven genoemde bevatte fundamenteaalreeks van punten, die alle van B_o een afstand $< \frac{1}{8} \epsilon_p$ en $< \frac{1}{8} \beta_{z,p}$ hebben.

Zijn dan verder op de verschillende u_{m_k} telkens B_{m_k}, D_{m_k} vervolgende, B_{m_k}, C_{m_k} terugloopende $\frac{1}{2} \beta_{z,p}$ -bogen, dan bewijzen we door de in de eerste mededeeling op p. 900 gevolgde redeneering, dat er een deelreeks $C_{n_1} D_{n_1}, C_{n_2} D_{n_2}, C_{n_3} D_{n_3}, \dots$ bestaat, die gelijkmatig convergeert tot een boog $C_o D_o$ van een raakkromme u_o zoodanig, dat alle bogen $C_{n_i} D_{n_i}$ aan denzelfden kant van $C_o D_o$ liggen.

Beschrijven we om B_o een geodetischen cirkel met straal $\frac{1}{8} \beta_{z,p}$, dan snijdt die uit $C_o D_o$ een B_o bevattenden boog FI uit, die zijn binnengebied in twee deelgebieden verdeelt, in een waarvan, dat we

g zullen noemen, nòch de bogen $C_{n_k} D_{n_k}$ kunnen indringen, nòch ook andere deelen van een kromme u_{n_k} , daar die dan een afstand

$\leq \frac{1}{4} \beta_{\varepsilon p}$ van B_{n_k} zouden krijgen.

Daar verder het gebied g natuurlijk niet buiten alle krommen u_{n_k} kan liggen, ligt het binnen alle krommen u_{n_k} .

Er is dus zeker een gebied of gebiedsverzameling G , die aan de binnengebieden van alle krommen u_k gemeenschappelijk is, en tot de grens van G behooren alle punten van de limietverzameling λ der u_k 's, die geen nulpunten zijn, dus ook alle punten van λ , die nulpunten zijn, aangezien ze grenspunten van de eerste zijn. De grens van G is dus identiek met de limietverzameling der u_k 's, is dus samenhangend en identiek met haar *buitenomtrek*, terwijl ze buiten de nulpunten bestaat uit raakkrommen aan de vectordistributie, die buiten de nulpunten wegens het bestaan van het gebied g nergens het in stelling 1 onder 3^o opgenoemde gedrag kunnen vertoonen.

We zullen nu aantoonen, dat een tot de grens van G behorende raakkromme r' niet zelf weer de eigenschap kan hebben, dat haar vervolgende of terugloopende tak spiraalvormig tot de grens van een gebied of gebiedsverzameling G' convergeert.

We zouden dan n.l. op dezelfde wijze, als boven, en in de eerste mededeeling, voor r is geschied, ook voor r' een gesloten kromme u'_k kunnen vormen, bestaande uit een geodetischen boog $\leq \frac{1}{4} \beta_{\varepsilon k}$, en een boog φ' van r' , die dezelfde twee punten K' en H' verbinden. En er zouden bogen van r moeten zijn, die van eenzelfde kant, b.v. van den binnenkant van u'_k , gelijkmatig tot φ' convergeerden. Maar bij verder vervolgen van zulk een in voldoende nabijheid van φ' verloopenden boog ψ van r , zouden we nooit meer tusschen ψ en φ' kunnen terugkomen.

Daar verder in het hier beschouwde geval, dat de vervolgende tak van r in het binnengebied van u_1 verloopt, ook is uitgesloten, dat r' de grens van γ bereikt, blijft voor r' slechts één vorm als mogelijk over, n.l. *die van een enkelvoudigen kurvenboog, die in een nulpunt begint, en in een nulpunt eindigt.* (Dit begin- en eindpunt kunnen overigens zeer goed indentiek zijn).

Van zulke raakkrommen kunnen er in de grens van G hoogstens twee zijn, die tusschen hetzelfde begin- en eindpunt verlopen, als dat begin- en eindpunt verschillend zijn; maar er kunnen er oneindig veel zijn, die in eenzelfde nulpunt zijn gesloten. Daarvan zijn er

echter slechts een eindig aantal, waarvan de uitgestrektheid een zekere, willekeurig aangenomen, eindige grens overschrijdt. Immers elk daarvan draagt tot de gebiedsverzameling G een gebied met een oppervlak boven zekere eindige grens bij.

De krommen r , wier uitgestrektheid een zekere eindige grens overschrijdt, worden door een u_k van voldoende hoogen index langsgelopen in dezelfde volgorde, als waarin ze op den buitenomtrek van G op elkaar volgen. Hieruit volgt, dat voor alle krommen r' de vervolgende richting bij eenzelfde omloopszin van den buitenomtrek van G behoort.

Zoo de vervolgende tak van r in het *buitengebied* van u , verloopt, blijft het voorgaande met geringe wijzigingen van kracht. Een punt van de limietverzameling der u_k 's, dat geen nulpunt is, begrenst nu alleen dan een buiten alle u_k 's gelegen deelgebied van γ , als het *niet* op de grens van γ is gelegen. De *binnenomtrek*, waartoe r nu van *binnen* spiraalvormig convergeert, bestaat ook hier weer uit enkelvoudige kurvenbogen, die raakkrommen aan de vectordistributie zijn, maar deze raakkrommen kunnen geheel of gedeeltelijk in de grens van γ liggen. Ze hebben echter weer alle een vervolgende richting, die behoort tot eenzelfde omloopszin van den omtrek.

Komen we overeen, een vervolgenden tak eener raakkromme, als hij in een nulpunt uitmondt, zoo mogelijk voort te zetten langs een uit dat nulpunt vertrekkenden vervolgenden tak, die de eerste binnen zekeren eindigen afstand niet snijdt, maar, zoo zulk een voortzetting niet mogelijk is, den tak in het nulpunt te eindigen, en dat eveneens te doen, als hij in een gesloten raakkromme is uitgelopen, of spiraalvormig een omtrek heeft benaderd, dan kunnen we de voorafgaande redeneeringen als volgt resumeeren:

STELLING 2. *Een raakkromme is of een enkelvoudige gesloten kromme, of een buiten de einden enkelvoudige kurvenboog, waarvan zoowel de vervolgende als de teruglopende tak een der volgende gedragingen vertoont: 1°. eindigen in een punt van de grens van γ ; 2°. eindigen in een nulpunt; 3°. uitloopen in een enkelvoudige gesloten raakkromme; 4°. spiraalvormig convergeeren tot een omtrek, die uit een of meer enkelvoudige gesloten raakkrommen bestaat.*

Hieruit volgt in het bijzonder:

STELLING 3. *Een raakkromme kan niet in onbepaalde nabijheid van een later punten, na zich eenmaal op eindigen afstand daarvan te hebben verwijderd, terugkeeren, tenzij om zich in dat punt te sluiten.*

Dat de laatste stelling niet van zelf spreekt, blijkt hieruit, dat ze voor een ringoppervlak niet geldt. Daarop laten zich zeer goed raak-

krommen van de structuur, waarop LORENTZ (Enz. der Math. Wiss. V 2, p. 120, 121) heeft gewezen, construeeren.

Ten slotte merken we op, dat de hier beschouwde vectordistributie niet, zooals die op den bol, noodzakelijk een singulier punt bezit, zooals direct blijkt, als we maar in het binnengebied van een in een Euclidisch plat vlak gelegen cirkel een overal constanten vector aanbrengeu.

§ 2.

De structuur van het veld in de omgeving van een niet-singulier punt.

Om de singuliere punten te klassificeeren, willen we ze elk omgeven met een gebied, dat we geheel met elkaar niet kruisende raakkrommen opvullen, en de verschillende wijzen onderzoeken, waarop die opvulling in verschillende gevallen tot stand komt. Volledigheidshalve en ter inleiding doen we eerst hetzelfde voor een niet-singulier punt.

Zij P het beschouwde punt, RS een P bevattende boog r eener raakkromme, UV een P bevattende boog eener orthogonaalkromme van de vectordistributie. We trekken dan nog door U en V raakkrommen α_0 en α_1 , en door R en S orthogonaalkrommen γ en δ , en laten de vier punten R, S, U en V tezamen naar P convergeeren. Voor ze P hebben bereikt, komt dan een oogenblik, waarop $\alpha_0, \alpha_1, \gamma$ en δ een kromlijnigen rechthoek vormen, waarbinnen P ligt, en waarbinnen geen nulpunt van de vectordistributie ligt, dus op grond van de eerste mededeeling geen gesloten raakkromme kan wordengetrokken.

Dezen kromlijnigen rechthoek willen we met elkaar niet kruisende raakkrommen opvullen.

We nummeren α_0 met 0, r met $\frac{1}{2}$, α_1 met 1. Zij $Q_{\frac{1}{4}}$ een punt binnen of op den rechthoek $A_0 B_0 S R$ (zie fig. 2), dat van α_0 en r

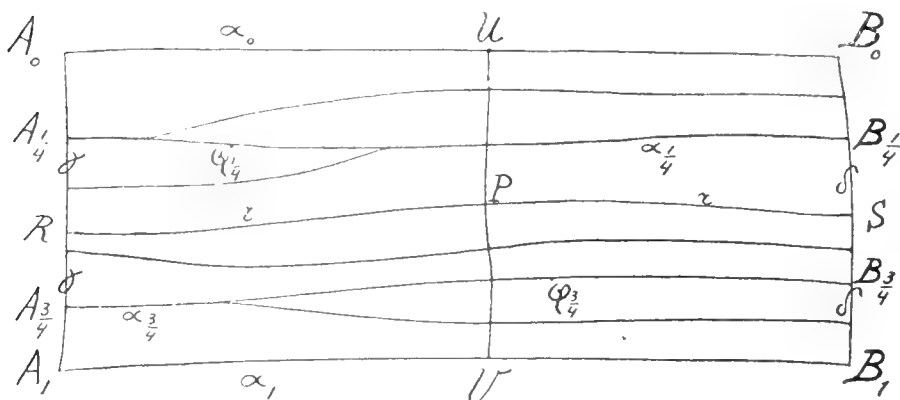


Fig. 2. Niet-singulier punt.

een zoo groot mogelijken afstand heeft, dan trekken we door $Q_{\frac{1}{4}}$ een raakkromme α_1 , waaromtrent we overeenkomen, dat we haar, zoo ze op α_0 of r uitloopt, verder langs α_0 of r vervolgen of terugloopen, tot we op γ of δ uitkomen.

Dan is $\alpha_{\frac{1}{4}}$ een raakkromme, die twee punten $A_{\frac{1}{4}}$ en $B_{\frac{1}{4}}$ van γ en δ verbindt tusschen α_0 en r in. Op dezelfde wijze brengen we binnen den rechtehoek $A_1 B_1 S R$ een raakkromme α_3 aan, die twee punten $A_{\frac{3}{4}}$ en $B_{\frac{3}{4}}$ van γ en δ tusschen r en α_1 in verbindt. De rechtehoek $A_0 B_0 B_1 A_1$ is dan in vier deelgebieden verdeeld. In deze kiezen we op de boven beschreven wijze achtereenvolgens een punt $Q_{\frac{1}{8}}, Q_{\frac{3}{8}}, Q_{\frac{5}{8}}, Q_{\frac{7}{8}}$, brengen door $Q_{\frac{1}{8}}$ een tusschen twee punten $A_{\frac{1}{8}}$ en $B_{\frac{1}{8}}$ van γ en δ verloopende raakkromme α_1 , en door de overige drie punten analoog.

Zoo voortgaande construeeren we bij elke echte breuk $\frac{a}{2^n}$ een raakkromme α_a , die twee punten van γ en δ verbindt, en twee willekeurige dezer raakkrommen kunnen wel *gedwettelijk* samenvallen, doch niet elkaar doorkruisen.

Al deze raakkrommen moeten nu het binnengebied van den rechtehoek $A_0 B_0 B_1 A_1$ overal dicht bedekken. Immers lieten ze daar een gebied G vrij, dan zou een door 2 raakkrommen met indices $\frac{a}{2^n}$ en $\frac{a+1}{2^n}$ begrensde gebied G'_n tot G convergeeren. Voor n groot genoeg zou dan echter het punt $Q_{\frac{2a+1}{2^{n+1}}}$ binnen G liggen, er zou dus in strijd met de onderstelling ook een raakkromme $\alpha_{\frac{2a+1}{2^{n+1}}}$ door G heengaan.

Hieruit volgt, dat, als we nog de grenselementen der raakkrommen α_a , die eveneens raakkrommen zijn, toevoegen, het binnengebied van den rechtehoek $A_0 B_0 B_1 A_1$ geheel is bedekt, en wel is er voor elk reëel getal tusschen 0 en 1 één en niet meer dan één dezer raakkrommen, die dat getal tot index heeft.

§ 3.

De structuur van het veld in de omgeving van een geïsoleerd singulier punt. Eerste hoofd geval.

Het geïsoleerd onderstelde nulpunt P omgeven we met een enkel-

voudige gesloten kromme c , waarbinnen geen verder nulpunt ligt. We nemen verder als eerste hoofdgeval aan, dat c zoo kan worden gekozen, dat binnen c geen enkelvoudige gesloten raakkromme, waar P binnen ligt, bestaat. Op grond van de eerste mededeeling kan verder binnen c ook geen enkelvoudige gesloten raakkromme, waar P buiten ligt, bestaan. We onderscheiden nu 2 gevallen:

a. Er bestaat binnen c een enkelvoudige gesloten raakkromme q door P . Dan kunnen we c kleiner kiezen, zoodat ze q snijdt, dus in haar binnengebied een raakkromme q_1 bevat, die (in haar vervolgende richting) van P naar c loopt, en een andere q_2 , die van c naar P loopt, en we zoeken verder zulke raakkrommen binnen c , die nòch q_1 , nòch q_2 kruisen. Van de aan het slot van § 1 opgenoemde mogelijke soorten van raakkrommen kunnen we daarbij zulke, die uitloopen in een gesloten raakkromme, langs die raakkromme vervolgen, tot ze hetzij P , hetzij c bereiken, en daar eindigen. Spiraalvormige convergentie tot een binnenomtrek kan niet optreden, daar het andere einde van zulk een raakkromme zoowel van P als van c zou zijn afgesloten, dus een gesloten raakkromme zou bepalen, waar P buiten lag, wat onmogelijk is. Evenmin kan spiraalvormige convergentie tot een buitenomtrek optreden, daar P in dien buitenomtrek zou moeten liggen, dus de spiraal noodzakelijk q_1 en q_2 zou moeten kruisen.

b. Er bestaat binnen c geen enkelvoudige gesloten raakkromme door P . Dan bestaat binnen c geen enkele enkelvoudige gesloten raakkromme, zoodat ook weer spiraalvormige convergentie is uitgesloten.

In elk geval kunnen we dus, als we overeenkomen, raakkrommen, die P of c bereiken, niet verder voort te zetten, de q_1 en q_2 , zoo deze optreden, niet kruisende raakkrommen binnen c brengen tot drie categoriën:

- 1°. *Gesloten krommen, die P bevatten, doch c niet bereiken.*
- 2°. *Kurvenbogen, die twee punten van c verbinden, doch P niet bevatten.*
- 3°. *Kurvenbogen, die loopen van P naar een punt van c (positieve krommen der derde soort), of van een punt van c naar P (negatieve krommen der derde soort).*

Van deze derde soort moeten zeker raakkrommen bestaan. Anders toch zouden de door de krommen der eerste en der tweede soort bepaalde afgesloten verzamelingen het geheele binnengebied van c bedekken, dus zeker een gemeenschappelijk punt bezitten; daardoor zou dan echter een kromme der derde soort gaan.

We kunnen dus zeker beginnen met één kromme der derde soort te construeeren, en kiezen daarvoor eventueel q_1 . Zoo mogelijk, brengen we daarna een tweede kromme der derde soort aan, die de

eerste niet kruist, en kiezen daarvoor eventueel ϱ_2 . In elk der beide dan binnen c bepaalde sectoren brengen we zoo mogelijk weer een de reeds bestaande niet kruisende kromme der derde soort aan, en wel kiezen we die zoodanig, dat ze zich van de beide den sector begrenzende krommen der derde soort zoo ver mogelijk verwijderd¹⁾, terwijl we, als de nieuwe kromme ergens op een der den sector begrenzende krommen uitloopt, verder die laatste kromme volgen. In elk der daarna in het binnengebied van c bepaalden sectoren herhalen we zoo mogelijk deze tusschenvoeging, en zetten dit proces zoo lang mogelijk, eventueel tot een onbepaald aantal tusschenvoegingen voort.

Indien we zoo oneindig veel raakkrommen der derde soort hebben verkregen, bepalen deze grenselementen, die elk of weer een raakkromme der derde soort zijn, of zulk een kromme als deel bevatten. En wel bepaalt een fundamenteaalreeks van positieve resp. negatieve krommen der derde soort in zijn grenselementen weer positieve resp. negatieve krommen der derde soort.

Na toevoeging dezer grenskrommen der derde soort zijn we echter zeker, dat geen nieuwe krommen der derde soort, die de bestaande niet kruisen, kunnen worden tusschengevoegd. Dit blijkt uit een redeneering, met de in § 2 gevolgde analoog. Alle nu verkregen krommen der derde soort te zamen noemen we een *systeem basiskrommen van de omgeving van P*.

Een willekeurige positieve, en een willekeurige negatieve basiskromme sluiten binnen c een sector in, waarvan de inhoud niet onder een zekere eindige grens kan dalen. Anders toch zouden we een fundamenteaalreeks van positieve, en een fundamenteaalreeks van negatieve basiskrommen hebben, die eenzelfde basiskromme als grenselement bezaten, wat onmogelijk is, daar die grensbasiskromme zoowel positief als negatief zou moeten zijn.

Het binnengebied van c wordt dus verdeeld in een *eindig* aantal sectoren, die tot de beide volgende categorieën zijn te brengen:

Eerste categorie. Sectoren begrensd door een positieve en een negatieve basiskromme, waartusschen geen verdere basiskrommen liggen. De inhoud dezer sectoren ligt boven zeker eindige grens.

Tweede categorie. Sectoren begrensd door twee positieve (resp. twee negatieve) basiskrommen, en binnen zich slechts positieve (resp.

¹⁾ Hieronder verstaan we het volgende: Zijn ϵ_1 en ϵ_2 de beide den sector begrenzende krommen der derde soort, en ϵ_3 een willekeurige kromme der derde soort binnen den sector. Een willekeurig punt P van ϵ_3 heeft een afstand ${}_1a_P$ van ϵ_1 , en een afstand ${}_2a_P$ van ϵ_2 . De kleinste dezer beide grootheden noemen we a_P . Dan heeft a_P op ϵ_3 een maximum a_3 , en we kiezen ϵ_3 zoodanig, dat ${}_1a_3$ zoo groot mogelijk is.

negatieve) basiskrommen bevattende. Een sector van deze categorie kan zich in bijzondere gevallen tot een enkele basiskromme reduceeren.

We behandelen eerst een willekeurigen sector der *eerste categorie*, en merken daarvoor allereerst op, dat *buiten* een daarin gelegen kromme der tweede soort (d. w. z. tusschen die kromme en c) slechts krommen der tweede soort kunnen verloop, en *binnen* een in den sector gelegen kromme der eerste soort slechts krommen der eerste soort.

Brengen we verder in den sector een zoo ver mogelijk voortgezette welgeordende reeks van elkaar omsluitende krommen der tweede soort aan, dan convergeert die, hetzij tot een kromme der tweede soort, hetzij tot twee krommen der derde soort en een daartusschen gelegen eindige of aftelbaar oneindige verzameling van elkaar *niet* omsluitende, en *niet* in onbepaalde nabijheid van c komende krommen der eerste soort.

Kunnen we oneindig veel zulke reeksen aanbrenge, die elkaar niet omsluiten, dan zijn daaronder, die slechts een deelgebied, zoo klein als men wil, van den sector afsnijden, en tegelijk daarmee daalt de maximumafstand, die zulk een reeks van c bereikt, onder elke eindige grens.

En analoog, brengen we in den sector een zoo ver mogelijk voortgezette welgeordende reeks van elkaar omhullende krommen der eerste soort aan, dan convergeert die hetzij tot een kromme der eerste soort, hetzij tot twee krommen der derde soort en een daartusschen gelegen eindige of aftelbaar oneindige verzameling van elkaar *niet* omsluitende, en *niet* in onbepaalde nabijheid van P komende krommen der tweede soort.

Kunnen we oneindig veel van zulke reeksen aanbrenge, die elkaar niet omhullen, dan zijn daaronder, die slechts een deelgebied, zoo klein als men wil, van den sector omsluiten, en tegelijk daarmee daalt de maximumafstand, die zulk een reeks van P bereikt, onder elke eindige grens.

Hieruit volgt, dat we voor de sectoren der eerste categorie twee gevallen krijgen te onderscheiden:

Eerste geval. Er liggen krommen der tweede soort in onbepaalde nabijheid van P . Dan wordt het gebied van de krommen der tweede soort begrensd door de beide basiskrommen, die den sector begrenzen, en een eindig of aftelbaar oneindig aantal van elkaar *niet* omsluitende, en *niet* in onbepaalde nabijheid van c komende krommen der eerste soort, in wier binnengebieden, die we de *bladen* van den sector noemen, slechts krommen der eerste soort kunnen loopen.

Het gebied buiten de bladen vullen we als volgt met elkaar niet kruisende krommen der tweede soort op: We brengen er eerst een

aan, die zich zoo ver mogelijk van c en de grens der bladen verwijdert; zoo worden twee deelgebieden bepaald, in elk waarvan we deze tusschevoeging herhalen; met dit proces gaan we onbepaald voort, en voegen ten slotte de grenskrommen toe. Dat dan het

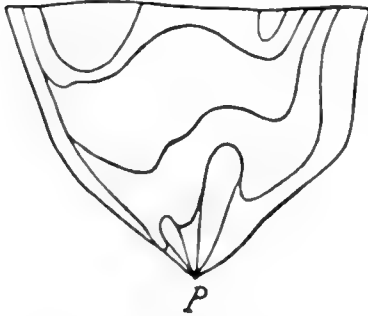


Fig. 3. Hyperbolische sector.

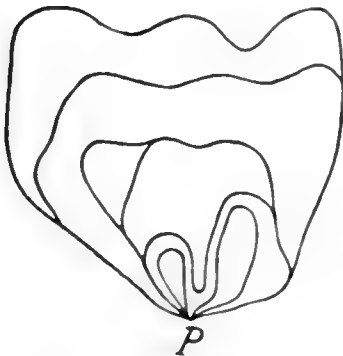


Fig. 4. Elliptische sector.

gebied buiten de bladen geheel bedekt is, blijkt door de in § 2 gevolgde redeneering.

En op dezelfde wijze vullen we elk der bladen met elkaar niet kruisende krommen der eerste soort op. Het geheel der den sector opvullende raakkrommen krijgt ten slotte de in fig. 3 aangegeven gedaante. De in het besproken eerste geval verkeerende sectoren noemen we *hyperbolische sectoren*.

Tweede geval. Er liggen geen krommen der tweede soort in onbepaalde nabijheid van P . Dan worden de door deze krommen bedekte gebieden door een eindig of aftelbaar oneindig aantal van elkaar *niet* omsluitende, en *niet* in onbepaalde nabijheid van P komende krommen der tweede soort van den sector afgesneden. Deze gebieden nemen we van den sector af (wijzigen dus dienovereenkomstig een boog van c), en houden een nieuwen sector over, be-

grendsd door dezelfde basiskrommen als de oude, doch bestaande uit een enkel *blad*, waarbinnen slechts krommen der eerste soort loopen. Dit blad kunnen we overeenkomstig de methode van het eerste geval opvullen met elkaar niet kruisende krommen der eerste soort (zie fig. 4).

Deze in het tweede geval verkeerende, tot een enkel blad gereduceerde sectoren noemen we *elliptische sectoren*.

We gaan over tot het onderzoek van een willekeurigen sector der *tweede categorie*, waarvan we, om de gedachten te bepalen, aannemen, dat hij door twee positieve basiskrommen wordt begrensd.

Beschouwen we de verzameling van in den sector of op zijn grens gelegen punten, waardoor de basiskrommen niet kruisende krommen der tweede soort kunnen worden getrokken. Deze puntverzameling kan niet in onbepaalde nabijheid van P komen, daar ze anders

aanleiding zou geven tot een de basiskrommen niet kruisende negatieve kromme der derde soort, wat is uitgesloten.

Op dezelfde wijze als voor de elliptische sectoren vernietigen we de door deze puntverzameling bedekte gebieden, en we houden een door een gewijzigden boog van c begrensden sector der tweede categorie over, waarbinnen geen de basiskrommen niet kruisende krommen der tweede soort kunnen worden getrokken.

In den gewijzigden sector beschouwen we nu de verzameling der punten, waardoor de basiskrommen niet kruisende krommen der eerste soort kunnen worden getrokken, en het is duidelijk, dat deze puntverzameling niet in onbepaalde nabijheid van de kromme c , zooals die zooeven is gewijzigd, kan komen. De door haar bedekte gebieden worden dus begrensd door een eindig of aftelbaar oneindig aantal van elkaar *niet* omsluitende, en *niet* in onbepaalde nabijheid van c komende krommen der eerste soort, en het door elk daarvan omsloten gebied vormt een *blad*, dat zich van de bij de hyperbolische sectoren optredende niet onderscheidt.

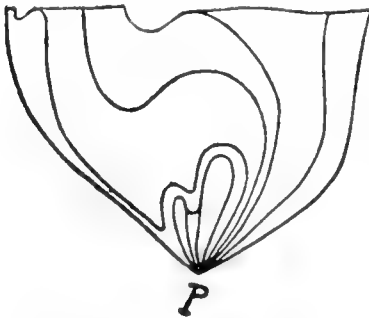


Fig. 5. Parabolische sector.
parabolische sectoren.

In bijzondere gevallen kan het geheele binnengebied van c zich tot een enkelen positieven (resp. negatieven) parabolischen sector reduceeren. Een daartoe aanleiding gevend nulpunt noemen we een *bronpunt* resp. *verdwijnpunt*.

§ 4.

De structuur van het veld in de omgeving van een geïsoleerd singulier punt. Tweede hoofdgeval.

In dit geval ligt binnen elke omgeving van P een enkelvoudige gesloten raakkromme, waar P binnen ligt. Dan kunnen we een tot P convergeerende fundamentealreeks c, c', c'', \dots van enkelvoudige gesloten raakkrommen construeeren, waarvan elke volgende binnen elke voorgaande ligt, en we kunnen op de volgende wijze het binnengebied van c met elkaar niet kruisende raakkrommen opvullen.

In elk tusschen twee krommen $c^{(n)}$ en $c^{(n+1)}$ ingesloten ringgebied kiezen we een punt, dat van de grens van dat gebied een zoo groot mogelijken afstand heeft, en brengen daardoor een binnen het ringgebied verloopende raakkromme. Volgens § 1 is die of gesloten, of geeft aanleiding tot twee in het ringgebied met zijn grens verloopende gesloten raakkrommen, waarin ze uitloopt, of waartoe ze spiraalvormig convergeert. (Deze gesloten raakkrommen kunnen in bijzondere gevallen geheel of gedeeltelijk met $c^{(n)}$ of $c^{(n+1)}$ samen-vallen). Het ringgebied wordt dus of enkelvoudig samenhangend gemaakt, of verdeeld in twee of drie (ringvormige of enkelvoudig samenhangende) deelgebieden.

In elk der nu opgetreden gebieden kiezen we weer een punt, dat van de grens een zoo groot mogelijken afstand heeft, en brengen daardoor weer een raakkromme. Een enkelvoudig samenhangend gebied wordt door haar zeker in twee enkelvoudig samenhangende gebieden verdeeld; op een ring-gebied heeft ze de zoeven ge-noemde uitwerking.

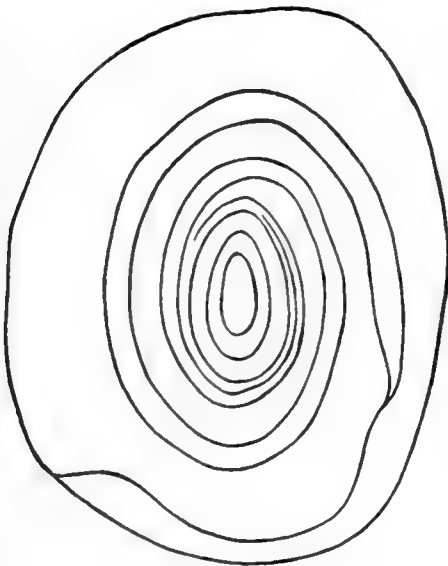


Fig. 6. Draaipunt.

Een in het tweede hoofd-
val verkeerd nulpunt noemen we een *draaipunt*.

We kunnen dus uitspreken :

STELLING 4. *Een geïsoleerd singulier punt is of een draaipunt, of een omgeving er van laat zich verdeelen in een eindig aantal hyperbolische, elliptische en parabolische sectoren.*

De opvulling der omgeving van een niet-singulier punt in § 2 levert in deze terminologie twee hyperbolische, en twee parabolische sectoren.

We moeten de opmerking toevoegen, dat in het meest algemeene geval, waar de raakkromme ook door een niet-singulier punt niet eenduidig bepaald is, aan een in het tweede hoofdgeval verkeerende omgeving somtijds door een gewijzigde constructiemethode de structuur van het eerste hoofdgeval kan worden gegeven.

Zelfs behoeft dan de sectorverdeling in het eerste hoofdgeval niet eenduidig bepaald te zijn. Uit de redeneeringen der volgende § kan echter worden afgeleid, dat, indien wijzigingen in de sectorverdeling mogelijk zijn, daarbij het verschil van het aantal elliptische en het aantal hyperbolische sectoren steeds hetzelfde blijft.

§ 5.

De reductie van een geïsoleerd singulier punt.

Voor het volgende is het wenschelijk, de kromme c te vervangen door een nergens buiten c komende, eveneens P omhullende, enkelvoudige gesloten kromme c' , die uit bogen van raakkrommen en orthogonaalkrommen is samengesteld. In het tweede hoofdgeval is dit reeds bereikt, en in het eerste hoofdgeval behoeven we alleen de deelbogen van c , die de hyperbolische en parabolische sectoren begrenzen, passend te wijzigen.

In een hyperbolischen sector wordt dit uitgevoerd, door op elk der beide begrenzende basiskrommen een willekeurig punt aan te nemen, en uit die punten H en K elkaar niet snijdende orthogonaalbogen binnenwaarts den sector in te trekken. Er is dan zeker een kromme der tweede soort, die een punt B van den eenen orthogonaalboog met een punt C van den anderen orthogonaalboog verbindt, en we begrenzen den gewijzigden sector door de orthogonaalbogen HB en CK , en den raakboog BC .

Wordt een parabolische sector begrensd door de basiskrommen k en k' , dan is het altijd mogelijk, daartusschen een eindig aantal basiskrommen k_1, k_2, \dots, k_n te kiezen zoodanig, dat telkens k_p en k_{p+1} binnen den sector doch buiten de daarin gelegen bladen door een orthogonaalboog kunnen worden verbonden. Door die orthogonaalbogen, en de hun uiteinden verbindende bogen van basiskrommen begrenzen we den gewijzigden sector.

De zoo verkregen enkelvoudige gesloten kromme c' heeft, behoudens een eindig aantal rechthoekige knikken, een overal continu varieerende raaklijnrichting. Bij een bepaalden omloopszin van c' , dien we den positieven zullen noemen, behoort in elk punt van c' een bepaalde raakvector, en bij een volten omloop van c' legt die raakvector een positieven hoek 2π af.

We beschouwen nu twee op elkaar volgende parabolische sectoren

π_1 en π_2 , waarvan (voor den positieven omloopszin) de eerste positief, dus de tweede negatief is, en onderstellen ze gescheiden door een hyperbolischen sector r . Op de tot de grens van π_1 behoorende orthogonaalbogen maakt dan de gegeven vector met den raaklijnvector een (in positieven zin gemeten) hoek $\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi$, op de tot de grens van π_2 behoorende orthogonaalbogen een hoek $\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

De overgang geschiedt langs den tot de grens van r behoorenden raakboog, door een negatieve draaiing over een hoek π van den gegeven vector ten opzichte van den raaklijnvector.

Hetzelfde blijft het geval, als we π_1 negatief, π_2 positief onderstellen.

Maar onderstellen we, dat r een elliptische sector is, dan heeft de zooeven bedoelde overgang plaats langs den r begrenzen raakboog door een positieve draaiing over een hoek π van den gegeven vector ten opzichte van den raaklijnvector.

Daar nu de totale hoek, dien de gegeven vector bij een vollen omloop van c' ronddraait, gelijk is aan den totalen hoek, dien de raaklijnvector draait, plus den totalen hoek, dien de gegeven vector ten opzichte van den raaklijnvector draait, is eerstgenoemde hoek gelijk aan $\pi(2 + n_1 - n_2)$, waarin n_1 het aantal elliptische, n_2 het aantal hyperbolische sectoren voorstelt.

Zij verder j een willekeurige enkelvoudige gesloten kromme, die P omhult, maar geen tweede singulier punt omhult, dan kunnen we c' door continue wijziging, waarbij steeds P , doch geen ander singulier punt omhuld wordt, in j overvoeren. Beschouwen we voor elk der overgangskrommen den totalen hoek, dien de gegeven vector bij een omloop in positieven zin ronddraait, dan kan die hoek eenerzijds slechts continue wijzigingen ondergaan, en moet anderzijds een veelvoud van 2π blijven. Hij blijft dus onveranderd, en we kunnen formuleeren:

STELLING 5. *De totale hoek, dien de vector bij omloop in bepaalden zin van een enkelvoudige gesloten kromme, die slechts één nulpunt omhult, ronddraait in den zin van dien omloop, is gelijk aan $n = \pi(2 + n_1 - n_2)$, waarin n_1 het aantal elliptische, n_2 het aantal hyperbolische sectoren voorstelt, dat optreedt bij het oprullen van een omgeving van het nulpunt met elkander niet kruisende raakkrommen.*

In het bijzonder is voor bronpunten, verdwijnpunten en draaipunten de bedoelde hoek gelijk aan $\pm 2\pi$.

We omgeven nu P met een enkelvoudige gesloten kromme α , die zoo klein kan worden gedacht, als men wil, en we laten de vector-

distributie buiten α en op α onveranderd, doch wijzigen haar binnen α op de volgende wijze:

Nemen we eerst aan, dat bij positieven omloop van α de vector een positieven hoek $2n\pi$ doorloopt. Uit een willekeurig punt Q binnen α trekken we dan n elkaar niet snijdende enkelvoudige kurvenbogen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, die in deze volgorde een positieven omloopszin bepalen, naar α . Noemen we α_p den tusschen β_p en β_{p+1} liggenden boog van α , en G_p het door β_p, α_p en β_{p+1} begrensde gebied. Langs β_1 brengen we een willekeurige, nergens nul wordende, continue vectordistributie aan, die op α in de oorspronkelijke overgaat; vervolgens langs β_2 een zoodanige, op α en in Q aan de bestaande aansluitende, dat langs de positief omloopen grens van G_1 de vector een positieven hoek 2π draait. Daarna langs β_3 een zoodanige aan de bestaande aansluitende, dat langs de positief omloopen grens van G_2 de vector een positieven hoek 2π draait, enzovoort.

Daar de door den vector bij een positieven omloop van α doorloopen hoek gelijk is aan de som der bij positieve omloopen van de grenzen der gebieden G_1, G_2, \dots, G_n doorloopen hoeken, blijkt dan ten slotte ook bij positieven omloop van G_n de vector een positieven hoek 2π te doorloopen.

Binnen elk der gebieden G_p met grens α_p kiezen we een α_p niet snijdende enkelvoudige gesloten kromme c_p , waarvan de vergelijking in een passend coördinatensysteem kan worden geschreven in den vorm $x_p^2 + y_p^2 = r^2$. Binnen en op c_p brengen we een alleen in het punt $(0,0)_p$ nul wordende eindige continue vectordistributie aan, die langs de lijnen $\frac{y_p}{x_p} = \alpha$, en van het punt $(0,0)_p$ af, is gericht. Deze vector draait langs c_p , evenals de reeds bestaande langs α_p , een positieven hoek 2π rond. Vullen we dus volgens SCHOENFLIES het ringgebied tusschen α_p en c_p met elkaar omhullende, en als baankrommen van een cyclischen parameter continu in elkaar overgaande, enkelvoudige gesloten krommen op, dan kunnen we bij dien overgang tegelijk de vectordistributie langs α_p continu laten overgaan in die langs c_p , en zoo aan het ringgebied tusschen α_p en c_p een eindige continue, nergens nul wordende vectordistributie geven. Binnen α_p hebben we zoo een eindige continue vectordistributie verkregen, die slechts één nulpunt heeft, n.l. het punt $(0,0)_p$, en wel een bronpunt van zeer eenvoudige structuur, dat we *straalpunt* zullen noemen.

En het binnengebied van α is met een eindige continue vectordistributie overdekt, die op α in de oorspronkelijke overgaat, en binnen α , in plaats van het oorspronkelijke nulpunt P , n straalpunten bezit.

Nemen we vervolgens aan, dat by positieven omloop van z de vector een negatieven hoek $2n\pi$ doorloopt. We verdeelen dan op analoge wijze als boven het binnengebied van z in n deelgebieden G'_p met grenzen z_p , en brengen langs elk van deze grenzen een zoodanige vectordistributie aan, dat bij een positieven omloop van z_p de vector een negatieven hoek 2π doorloopt.

De krommen c_p worden weer als boven aangebracht, doch binnen en op c_p brengen we nu een alleen in het punt $(0,0)_p$ nul wordende eindige continue vectordistributie aan, die langs de lijnen $x_p y_p = \alpha$ is gericht. Deze vector draait bij positieven omloop van c_p een negatieven hoek 2π rond, evenals de vector langs z_p bij positieven omloop doet.

Het ringgebied tussehen z_p en c_p is dus op analoge wijze als zoo-even met een eindige continue nergens nul wordende vectordistributie op te vullen, en de geheele distributie binnen z_p bezit dan slechts één nulpunt, n.l. het punt $(0,0)_p$, dat vier zeer eenvoudig gebouwde hyperbolische sectoren bezit (de vier scheidende parabolische sectoren reduceeren zich elk tot een enkele lijn), welke structuur we karakteriseeren door den naam van *stootpunt*.

Hierna is het binnengebied van z met een eindige continue vectordistributie overdekt, die op z in de oorspronkelijke overgaat, en binnen z , in plaats van het oorspronkelijke nulpunt P , n stootpunten bezit.

Onderstellen we ten slotte, dat bij een omloop van z de totale draaiingshoek van den vector nul is. Dan kunnen we binnen z een zoodanige enkelvoudige gesloten kromme c kiezen, dat in een passend coördinatensysteem haar vergelijking kan worden geschreven in den vorm $x^2 + y^2 = r^2$. Binnen en op c brengen we dan een nergens nul wordende eindige continue vectordistributie aan, die langs de lijnen $y = \alpha$ is gericht. De totale draaiingshoek van dezen vector langs c is nul, evenals die van den vector langs z . Het ringgebied tussehen z en c is dus op dezelfde wijze als in de beide vorige gevallen met een zoodanige eindige continue vectordistributie op te vullen, dat de geheele distributie binnen z nu vrij is van nulpunten.

We kunnen dus formuleeren:

STELLING 6. Een eindige continue vectordistributie met een eindig aantal nulpunten laat zich door wijzigingen zoo klein als men wil binnen omgevingen der nulpunten, die men zoo klein kan kiezen als men wil, omzetten in een nieuwe eindige continue vectordistributie, die als eenige nulpunten een eindig aantal straalpunten en een eindig aantal stootpunten bezit.

En wel worden daarbij die nulpunten, waarvoor bij een positieven omloop de draaiingshoek van den vector positief is, ontleed in straalpunten; die, waarvoor hij negatief is, in stootpunten; terwijl die, waarvoor hij nul is, verdwijnen.

Deze stelling zullen we in een volgende mededeeling tot distributies met een (aftelbaar of continu) oneindig aantal nulpunten uitbreiden.

§ 6.

Opmerkingen over de raakkrommen en singuliere punten op den bol.

Hebben we op den bol een eindige continue vectordistributie met een eindig aantal singuliere punten, dan voeren de redeneeringen van § 1 met geringe wijzigingen tot:

STELLING 7. *Een raakkromme aan een eindige continue vectordistributie met een eindig aantal singuliere punten op den bol is of een enkelvoudige gesloten kromme, of een buiten de einden enkelvoudige kurvenboog, waarvan zoowel de vervolgende als de teruglopende tak of eindigt in een nulpunt, of uitloopt in een enkelvoudige gesloten raakkromme, of spiraalvormig convergeert tot een omtrek, die uit een of meer enkelvoudige gesloten raakkrommen bestaat.*

Hieruit volgt, dat ook op een bol een raakkromme niet in onbepaalde nabijheid van een harer punten, na zich eenmaal op eindigen afstand daarvan verwijderd te hebben, kan terugkeeren, tenzij dan, om zich in dat punt te sluiten.

Uit de redeneeringen van § 1 laat zich verder zonder moeite afleiden, dat een fundamenteaalreeks van gesloten raakkrommen zoodanig, dat van de twee door een willekeurige daarvan bepaalde gebieden het eene geen punten van de voorafgaande, het andere geen punten van de volgende raakkrommen bevat, of tot een enkel singulier punt convergeert, of tot den uit enkelvoudige gesloten raakkrommen bestaanden buitenomtrek van een gebied of gebiedsverzameling.

Zij nu gegeven een willekeurige eindige continue vectordistributie op den bol. Volgens § 5 reduceeren we haar door onbepaald kleine wijzigingen tot een „gereduceerde distributie”, die als singuliere punten slechts straalpunten en stootpunten bezit, en onderzoeken de raakkrommen dier gereduceerde distributie.

Een gesloten raakkromme kan geen straalpunten, maar wel stootpunten op zich bevatten (haar raaklijnrichting vertoont daar een rechthoekigen knik).

Aan den anderen kant kan een raakkromme slechts in een straalpunt eindigen.

We beschouwen nu een willekeurige raakkromme: volgens stelling 7 is ze of een enkelvoudige kurvenboog, die twee draalpunten verbindt, of ze geeft aanleiding tot een enkelvoudige gesloten raakkromme j_0 , die den bol in twee gebieden, G en G' , verdeelt.

Op j_0 kan dan geen draalpunt liggen, maar we beweren, dat er zoowel in G , als in G' een draalpunt moet.

Lag n.l. in G geen draalpunt, dan konden we binnen G een nieuwe raakkromme beschouwen, en deze moest, daar ze niet in een punt binnen G kon eindigen, volgens stelling 2 aanleiding geven tot een nieuwe enkelvoudige gesloten raakkromme j_1 , die een deelgebied G_1 van G omsluit. Binnen G_1 konden we weer een willekeurige raakkromme beschouwen, en zouden zoo komen tot een enkelvoudige gesloten raakkromme j_2 , die een deelgebied G_2 van G_1 omsluit.

Dit proces onbepaald voortzettende, construeeren we een fundamenteaalreeks van gesloten raakkrommen $j_0, j_1, j_2, j_3, \dots$; deze kan niet tot een enkel singulier punt convergeeren, daar noeh een draalpunt, noeh een stootpunt, gesloten raakkrommen, die geheel in zijn onbepaalde nabijheid liggen, bezit. Volgens de in het begin dezer § gemaakte opmerking moet er dus minstens één door een enkelvoudige gesloten raakkromme j_n begrensde gebied G_n bestaan, dat in alle gebieden G_1, G_2, G_3, \dots bevat is.

Binnen G_n zouden we op dezelfde wijze weer een deelgebied G_{n+1} begrenzend gesloten raakkromme j_{n+1} kunnen construeeren, en dit proces tot *elken* index der tweede getalklasse kunnen voortzetten, wat andererseits onmogelijk is, daar de verzameling der gebieden $G - G_1, G_1 - G_2, \dots, G_n - G_{n+1}, \dots, G_n - G_{n+1}, \dots$ aftelbaar moet blijven.

We formuleeren dus ten slotte:

STELLING 8. *Een gereduceerde distributie op den bol bezit minstens twee draalpunten.*

ERRATUM.

In de eerste mededeeling over dit onderwerp, deze Verslagen XVII 2,

p. 896 r. 13 v. o. in plaats van: bolschijf, te lezen: bolsegment.

p. 897 r. 22 v. b. „ „ „ A_0P , „ „ „ A_0Q .

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer H. J. E. BETH: „*De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen.*” (Tweede gedeelte).

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOOTE).

$$S = 4. ^1)$$

§ 14. In dit geval blijven de gewone reeksontwikkelingen geldig, zoolang $\frac{\varrho}{n_1}$ groot is ten opzichte van $\left(\frac{h}{R_1}\right)^2$ (zie de genoemde verhandeling van Prof. KORTEWEG, pag. 7). De moeilijkheid ontstaat, zoodra $\frac{\varrho}{n_1}$ tot de orde $\left(\frac{h}{R_1}\right)^2$ gedaald is. Daar de berekeningen hier niet eenvoudiger worden bij de afwezigheid van een relatierest, zullen we dadelijk het bestaan eener relatierest van de orde h^2 aannemen.

Wanneer de relatie

$$n_2 + \varrho = 3n_1$$

bestaat, en we met het oog hierop gaan onderzoeken, welke termen in (2) (p. 635 dezer Verslagen) storend worden in den in § 3 bedoelden zin, dan zien we gemakkelijk in, dat geen termen van de orde h^2 onder de storende voorkomen. Bij het bepalen van de eerste benadering kunnen we dus de termen van de orde h^3 in de vergelijking van het oppervlak, welke termen overeenkomen met de genoemde termen van de orde h^2 , weglaten. Dan wordt zij:

$$z = \frac{1}{g} (c_1 x^2 + c_2 y^2 + e_1 x^3 + e_2 x^2 y + e_3 x y^2 + e_4 x y^3 + e_5 y^4);$$

immers behoeven wij voor de eerste benadering in de bewegingsvergelijkingen geen termen op te nemen van hooger orde dan h^3 .

De verkorte bewegingsvergelijkingen, alleen termen van de orde h bevattende, luiden nog:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2c_1 x &= 0, \\ \ddot{y} + 2c_2 y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Nu zijn weer

$$n_1 = \sqrt{2c_1} \quad , \quad n_2 = \sqrt{2c_2}$$

de principale trillingsgetallen.

Dus

¹⁾ Voor het geval $S = 3$ zie men het eerste gedeelte, pag. 634—650, dezer Verslagen.

$$2e_3 = (3n_1 - \varrho)^2.$$

We veranderen de verkorte vergelijkingen in:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + n_1^2 x &= 0, \\ \ddot{y} + 9n_1^2 y &= 0; \end{aligned} \right\}$$

maar moeten dan in de functie R opnemen een term:

$$3n_1 \varrho y^3.$$

De kannonieke oplossing der verkorte vergelijkingen is:

$$x = \frac{\sqrt{a_1}}{n_1} \cos(n_1 t + 2n_1 \beta_1),$$

$$y = \frac{\sqrt{a_2}}{3n_1} \cos(3n_1 t + 6n_1 \beta_2).$$

Om te vinden welke functien de a 's en β 's van t zijn, moeten we nagaan, welke gedaante de functie R nu aanneemt.

§ 15. Daar de storende termen in de bewegingsvergelijkingen van de orde h^3 zijn, kunnen $\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{\beta}_1$ en $\dot{\beta}_2$ nooit grooter zijn dan van de orde h . Hiervan kunnen we gebruik maken om de termen van de orde h^3 , die $\ddot{x}, \ddot{y}, \dot{x}^2$ en \dot{y}^2 bevatten, te vereenvoudigen. We kunnen n.l. in die termen:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &\text{ door } a_1 - n_1^2 x^2, \\ \dot{y}^2 &\text{ ,, } a_2 - 9n_1^2 y^2, \\ \ddot{x} &\text{ ,, } -n_1^2 x \end{aligned}$$

en

$$\ddot{y} \text{ ,, } -9n_1^2 y$$

vervangen.

Dan worden de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + n_1^2 x + 4e_1 x^3 + 3e_2 x^2 y + 2e_3 x y^2 + e_4 y^3 + \\ + \frac{n_1^4}{g^2} (a_1 + 9a_2) x - \frac{2n_1^6}{g^2} (x^2 + 81 y^2) x &= 0. \\ \ddot{y} + 9n_1^2 y - 6n_1 \varrho y + e_5 x^3 + 2e_6 x^2 y + 3e_7 x y^2 + 4e_8 y^3 + \\ + \frac{9n_1^4}{g^2} (a_1 + 9a_2) y - \frac{18n_1^6}{g^2} (x^2 + 81 y^2) y &= 0. \end{aligned}$$

De termen van de orde h^3 zijn nu alle storend, behalve $e_4 y^3$ in de eerste en $3e_7 x y^2$ in de tweede vergelijking; deze laatste termen laten we dus weg.

De termen $3e_2 x^2 y$ in de eerste en $e_5 x^3$ in de tweede vergelijking danken hunne storende eigenschap aan de relatie.

De overige termen zijn steeds storend, ook als geen relatie bestaat.

Om nu de vergelijkingen tot zoodanige gedaante te brengen, dat de storende termen als afgeleiden zijn te beschouwen van éénzelfde functie, resp. naar x en y , beschouwen we den term met xy^2 in de eerste en dien met x^2y in de tweede vergelijking. Wanneer we de boven als eerste benadering genomen uitdrukkingen voor x en y in deze termen substitueeren, ontstaan er, na de ontwikkeling van de produkten en machten der cosinussen, o.a. ook termen, die alleen in coëfficiënt verschillen van de bedoelde uitdrukkingen voor x en y ; de overige termen, die ontstaan, zijn niet storend. Hieruit volgt dat we mogen vervangen:

$$\begin{aligned} \text{in de eerste vergelijking: } xy^2 & \text{ door } \frac{1}{18} \frac{\alpha_2}{n_1^2} x, \\ \text{,, ,, tweede ,, } : x^2y & \text{ ,, } \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{n_1^2} y. \end{aligned}$$

Hierdoor kunnen de vergelijkingen geschreven worden:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + n_1^2 x + \left(4e_1 - \frac{2n_1^6}{g^2}\right) x^3 + 3e_2 x^2 y + \left(\frac{e_3}{9n_1^2} \alpha_2 + \frac{n_1^4}{g^2} \alpha_1\right) x &= 0, \\ \ddot{y} + 9n_1^2 y + \left(4e_5 - \frac{1458n_1^6}{g^2}\right) y^3 + e_2 x^3 + \\ &+ \left(-6n_1 \varrho + \frac{e_3}{n_1^2} \alpha_1 + \frac{81n_1^4}{g^2} \alpha_2\right) y = 0. \end{aligned} \right\}$$

Men ziet dus, dat zij de gedaante aannemen:

$$\left. \begin{aligned} x + n_1^2 x - \frac{\partial R}{\partial x} &= 0, \\ \ddot{y} + 9n_1^2 y - \frac{\partial R}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \right\}$$

alwaar:

$$\begin{aligned} -R = & \left(e_1 - \frac{n_1^6}{2g^2}\right) x^4 + \left(e_5 - \frac{729n_1^6}{2g^2}\right) y^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{e_3}{9n_1^2} \alpha_2 + \frac{n_1^4}{g^2} \alpha_1\right) x^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(-6n_1 \varrho + \frac{e_3}{n_1^2} \alpha_1 + \frac{81n_1^4}{g^2} \alpha_2\right) y^2 + e_2 x^3 y. \end{aligned}$$

§ 16. We moeten nu R gaan schrijven als functie van de α 's en β 's door in de verkregen uitdrukking x en y te vervangen door de uitdrukkingen, waardoor zij bij eerste benadering worden voorgesteld, en alleen die termen te behouden, in welke t niet expliciet optreedt. Zoo komen we tot:

$$-R = \frac{1}{2} a a_1^2 + b a_1 a_2 + \frac{1}{2} c a_2^2 + \varrho' h^2 a_2 + m_1 a_1^{\frac{3}{2}} a_2^{\frac{1}{2}} \cos \varphi,$$

waarin :

$$a = \frac{3e_1}{2n_1^4} - \frac{n_1^2}{4\varrho^2},$$

$$b = \frac{e_2}{18n_1^4},$$

$$c = \frac{e_3}{54n_1^4} - \frac{9n_1^2}{4\varrho^2},$$

$$m_1 = \frac{e_4}{24n_1^4},$$

$$\varrho' = -\frac{\varrho}{6n_1 h^2},$$

$$\varphi = 6n_1 (\beta_1 - \beta_2).$$

Het stelsel vergelijkingen, dat de veranderlijkheid der a 's en β 's met den tijd aangeeft, is nu :

$$\frac{da_1}{dt} = 2Nm_1 a_1^{\frac{3}{2}} a_2^{\frac{1}{2}} \sin \varphi,$$

$$\frac{da_2}{dt} = -2Nm_1 a_1^{\frac{3}{2}} a_2^{\frac{1}{2}} \sin \varphi,$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = a a_1 + b a_2 + \frac{3}{2} m_1 a_1^{\frac{1}{2}} a_2^{\frac{1}{2}} \cos \varphi,$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} = b a_1 + c a_2 + \varrho' h^2 + \frac{1}{2} m_1 a_1^{\frac{3}{2}} a_2^{\frac{1}{2}} \cos \varphi;$$

(17)

waarin $N = 3n_1$ gesteld is.

Uit het stelsel volgt onmiddellijk :

$$\frac{da_1}{dt} + \frac{da_2}{dt} = 0,$$

dus

$$a_1 + a_2 = \text{constant}.$$

Daarom stellen we :

$$a_1 = R_0^2 n_1^2 h^2 \xi, \quad a_2 = R_0^2 n_1^2 h^2 (1 - \xi).$$

Voorts is volgens § 4 :

$$\frac{1}{2} a a_1^2 + b a_1 a_2 + \frac{1}{2} c a_2^2 + \varrho' h^2 a_2 + m_1 a_1^{\frac{3}{2}} a_2^{\frac{1}{2}} \cos \varphi = \text{constant}$$

een integraal van het stelsel.

Door invoering van ζ krijgt deze integraal de gedaante:

$$\zeta \sqrt{\zeta(1-\zeta)} \cos \varphi = p\zeta^2 + q\zeta + r, \dots \dots \dots (18)$$

waarin:

$$p = \frac{1}{m_1} \left(-\frac{1}{2} a + b - \frac{1}{2} c \right),$$

$$q = \frac{1}{m_1} \left(-b + c + \frac{\varrho'}{n_1^2 R_0^2} \right),$$

$$r = \frac{1}{m_1} \left(-\frac{1}{2} c - \frac{\varrho'}{n_1^2 R_0^2} + \frac{C}{n_1^4 R_0^4} \right),$$

als C een constante voorstelt, afhankelijk van den initiaaltoestand.

De eerste vergelijking van (17) wordt door invoering van ζ :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2}{9} m_1 R_0^2 N^3 h^2 \cdot \zeta \sqrt{\zeta(1-\zeta)} \cdot \sin \varphi. \dots \dots \dots (19)$$

Door eliminatie van φ tusschen (18) en (19) komen we tot:

$$\sqrt{\zeta^3(1-\zeta) - (p\zeta^2 + q\zeta + r)^2} = \pm \frac{2}{9} m_1 R_0^2 N^3 h^2 \cdot dt.$$

Zij nu

$$f(\zeta) \equiv \zeta^3(1-\zeta) - (p\zeta^2 + q\zeta + r)^2,$$

dan is $f'(\zeta) > 0$ voor de initiaalwaarde van ζ , doch $f'(\zeta) < 0$ voor $\zeta = 0$ en $\zeta = 1$, dus wordt $f(\zeta)$ nul voor twee waarden ζ_1 en ζ_2 , tusschen 0 en 1 gelegen.

ζ zal dus in het algemeen tusschen 2 grenzen periodiek veranderen. Zij kan met behulp van elliptische functien in den tijd worden uitgedrukt, waarna ook β_1, β_2, x en y als functien van den tijd bekend zijn.

Voor de uiterste waarden nul en één van den modulus κ der elliptische functien ($\kappa = \sqrt{\frac{(\beta-\alpha)(\zeta_2-\zeta_1)}{(\beta-\zeta_2)(\alpha-\zeta_1)}}$, als de vergelijking $f(\zeta) = 0$, behalve ζ_1 en ζ_2 , nóg twee bestaansbare wortels α en β heeft) krijgen we bijzondere gevallen.

Osculeerende krommen.

§ 17. Voor eerste benadering hebben we gevonden:

$$x = \frac{\sqrt{a_1}}{n_1} \cos(n_1 t + 2n_1 \beta_1),$$

$$y = \frac{\sqrt{a_2}}{3n_1} \cos(3n_1 t + 6n_1 \beta_2),$$

waarin de a 's en β 's langzaam veranderen met den tijd.

Door invoering van ζ en φ en verandering van den oorsprong van tijd vinden we, dat we de vergelijking eener osculeerende kromme kunnen bepalen door t te elimineeren tusschen:

$$x = R_0 h \sqrt{\zeta} \cos n_1 t$$

en

$$y = \frac{1}{3} R_0 h \sqrt{1-\zeta} \cos (3n_1 t - \varphi).$$

Voor ζ en φ moeten worden ingevuld de waarden, die deze grootheden hebben op het oogenblik, waarvoor men de osculeerende kromme kennen wil.

De osculeerende krommen zijn Lissajous'sche figuren, beantwoordend aan de waarde $\frac{1}{3}$ voor de verhouding van de beide perioden der trillingen. Zij zijn beschreven in de rechthoeken, die tot zijden hebben $2 R_0 h \sqrt{\zeta}$ en $\frac{2}{3} R_0 h \sqrt{1-\zeta}$. Daar ζ tusschen twee grenzen verandert, liggen de rechthoeken, waarin de krommen beschreven worden, tusschen twee uiterste. De hoekpunten liggen op den omtrek eener ellipsis, die $2 R_0 h$ en $\frac{2}{3} R_0 h$ tot assenlengten heeft.

De gedaante der kromme, in een bepaalden rechthoek beschreven, is nog afhankelijk van de waarde van φ . φ is de waarde van het phaseverschil op het oogenblik der grootste uitwijking naar rechts. Aan een willekeurige waarde van φ beantwoordt de welbekende Lissajous'sche kromme met twee dubbelpunten van fig. 8. Voor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ of $\frac{3\pi}{2}$ is de kromme symmetrisch ten opzichte van de assen; de dubbelpunten liggen in de X -as aan weerszijden van O op afstanden $\frac{1}{2} R_0 h$ (fig. 9). Voor $\varphi = 0$ of π krijgen we een kromme, die heen en terug doorloopen wordt en door O gaat (fig. 10).

In fig. 11 vindt men voor een bepaald bewegingsgeval eenige van die osculeerende krommen voorgesteld: twee die behooren bij $\varphi = \pi$; twee voor $\varphi = \frac{\pi}{2}$, en één voor een willekeurige waarde van φ ($> \frac{\pi}{2}$).

Uit (19) volgt, dat $\frac{d\zeta}{dt} = 0$ voor $\sin \varphi = 0$. In de uiterste rechthoeken worden dus de krommen beschreven, die we hebben voor $\varphi = 0$ of π . Nu is er een aantal verschillende gevallen mogelijk, waarvan we een duidelijk beeld krijgen door verg. (18), op poolcoördinaten voor te stellen. In fig. 12 zijn eenige der zoo verkregen

lijnen voorgesteld, alwaar φ genomen is als poolhoek, $\sqrt{1-\zeta}$ als voerstraal. De verschillende gedaanten der krommen hangen samen met de wortels van de vergelijking:

$$\zeta^3(1-\zeta) - (p\zeta^2 + q\zeta + r)^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

De gevallen zijn:

1°. De kromme, in de figuur aangewezen door ---, blijft rechts of links van O_1 . φ verandert tusschen 2 grenzen; de grenzen zijn gelijk en tegengesteld; de positieve is kleiner dan $\frac{\pi}{2}$. Voor de uiterste waarden van ζ is φ of beide malen 0, of beide malen π .

2°. De kromme — — — snijdt de rechte $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in twee punten boven O_1 en 2 punten beneden O_1 , en bestaat uit één trek. Voor de uiterste waarden van ζ is φ weer of beide malen 0, of beide malen π .

3°. De dubbele trek (dóórgetrokken in de figuur) omgeeft O_1 . Nu doorloopt φ alle waarden. Voor de uiterste waarden van ζ is éénmaal $\varphi = 0$ en éénmaal $\varphi = \pi$.

Het overgangsgeval tusschen 2 en 3 is voorgesteld door den trek — . — . — .

Fig. 11 heeft betrekking op het 2^{de} geval; voor de beide uiterste waarden van ζ is $\varphi = \pi$.

Bijzondere gevallen.

§ 18. Deze hebben we voor de uiterste waarden van den modulus κ der elliptische functien; van verg. (20) zijn 2 wortels samengevallen.

1. $\kappa = 1$. De elliptische functien gaan over in hyperbolische. De zoeven besproken meetkundige voorstelling van de betrekking tusschen ζ en φ , reeds zoeven als overgangsgeval tusschen het tweede en derde geval vermeld, heeft een dubbelpunt, gelegen op de as der hoeken. De bewegingsvorm nadert asymptotisch tot een bewegingsvorm, behoorend bij $\varphi = 0$ of $\varphi = \pi$.

2. $\kappa = 0$. De elliptische functien gaan over in goniometrische. De kromme van fig. 12 wordt een geïsoleerd punt C (bijzonder geval, behoorend bij het 1^{ste} geval van § 17 als grensgeval), of bestaat uit een geïsoleerd punt en een gesloten trek (bijzonder geval, behoorende bij het 3^{de} geval van § 17 als grensgeval). Valt de initialwaarde van ζ samen met den tweevoudigen wortel van (20), dan blijft ζ standvastig; φ is voortdurend 0 of π . Er wordt dus een zelfde kromme voortdurend doorloopen.

Willekeurig mechanisme met 2 vrijheidsgraden, waarvoor $S = 4$.

§ 19. In het geval dat $n_2 = 3n_1 + 9$ kunnen in de bewegingsvergelijkingen de termen van de orde h^2 geen storende termen opleveren.

Dus kunnen we schrijven:

$$U = \frac{1}{2} n_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} n_2^2 q_2^2 + U_4,$$

waarin U_4 een homogene functie van den 4^{den} graad in q_1 en q_2 voorstelt. Voorts is:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} P_1 \dot{q}_1^2 + P_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} P_3 \dot{q}_2^2,$$

waarin:

$$P_1 = a_1 q_1^2 + a_2 q_1 q_2 + a_3 q_2^2,$$

$$P_2 = b_1 q_1^2 + b_2 q_1 q_2 + b_3 q_2^2,$$

$$P_3 = c_1 q_1^2 + c_2 q_1 q_2 + c_3 q_2^2;$$

de a 's, b 's en c 's zijn constanten.

De vergelijkingen van LAGRANGE worden:

$$\ddot{q}_1 + n_1^2 q_1 = -P_1 \ddot{q}_1 - P_2 \ddot{q}_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 - \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial P_3}{\partial q_1} - \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2^2 - \frac{\partial U_4}{\partial q_1}.$$

$$\ddot{q}_2 + n_2^2 q_2 = -P_2 \ddot{q}_1 - P_3 \ddot{q}_2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial P_1}{\partial q_2} - \frac{\partial P_2}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1^2 - \frac{\partial P_3}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial P_3}{\partial q_2} \dot{q}_2^2 - \frac{\partial U_4}{\partial q_2}.$$

Op dezelfde wijze als dat in § 15 gedaan is kunnen we weer in de termen van de orde h^3 \ddot{q}_1 , \ddot{q}_2 , \dot{q}_1^2 en \dot{q}_2^2 vervangen door andere.

Nu komt echter in de 1^{ste} verg. voor een term $-a_2 q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2$, dien we afzonderlijk hebben te beschouwen (in de 2^{de} verg. komen ook termen voor, die $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ bevatten, maar deze zijn niet storend).

We voeren hiervoor een nieuwe veranderlijke q'_1 in, zoodanig dat:

$$q'_1 = q_1 + \frac{1}{4} a_2 q_1^2 q_2.$$

Dan is:

$$\ddot{q}'_1 = \ddot{q}_1 + \frac{1}{4} a_2 q_1^2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} a_2 q_2 (q_1 \ddot{q}_1 + \dot{q}_1^2) + a_2 q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

waarin \ddot{q}'_1 en \ddot{q}_2 in de termen van de orde h^3 weer te vereenvoudigen zijn.

Van de termen, die nu in de bewegingsvergelijkingen voorkomen, zijn in de 1^{te} vergelijking storend die met $h^3 q_1$, q_1^3 , $q_1^2 q_2$ en $q_1 q_2^2$,

in de 2^{de} die met h^2q_2 , q_1^3 , q_2^3 , en $q_1^2q_2$. Nu kunnen evenals in § 15 de termen met $q_1q_2^2$ in de 1^{ste} vergelijking, die met $q_1^2q_2$ in de 2^{de} vergelijking nog vereenvoudigd worden.

Voeren we deze berekeningen uit, dan komen we er toe, dat de termen van de orde h^3 , die we moeten opnemen in de vergelijkingen, zijn te brengen tot de gedaante:

$$\begin{aligned} Ph^2q_1 + eq_1^2q_2 + cq_1^3 & \text{ in de 1ste vergelijking.} \\ Qh^2q_2 + fq_1^3 + dq_2^3 & \text{ ,, ,, 2de ,,} \end{aligned}$$

Hierin zijn P en Q homogene kwadratische functien van $\sqrt{a_1}$ en $\sqrt{a_2}$, en

$$e = \frac{1}{4} (3n_1^2 - n_2^2) a_2 + b_1 n_2^2 - 3l.$$

$$f = -\frac{1}{2} n_1^2 a_2 + 3b_1 n_1^2 - l.$$

(De termen $-3l$ in e en $-l$ in f komen voort uit den term $lq_1^2q_2$, die in U_4 voorkomt).

In de termen van hooger orde kunnen we in de coëfficiënten n_2 vervangen door $3n_1$. Dan wordt:

$$\begin{aligned} e &= 3 \left\{ \left(-\frac{1}{2} a_2 + 3b_1 \right) n_1^2 - l \right\}, \\ f &= \left(-\frac{1}{2} a_2 + 3b_1 \right) n_1^2 - l. \end{aligned}$$

Dus vinden we dat

$$e = 3f.$$

De bewegingsvergelijkingen zijn nu te schrijven:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + n_1^2 q_1 &= \frac{\partial R}{\partial q_1}, \\ \ddot{q}_2 - n_2^2 q_2 &= \frac{\partial R}{\partial q_2}, \end{aligned}$$

waarin

$$R = \frac{1}{2} Ph^2q_1^2 + \frac{1}{2} Qh^2q_2^2 + fq_1^3q_2 + \frac{1}{4} eq_1^4 + \frac{1}{4} dq_2^4.$$

Zij krijgen dus dezelfde gedaante als voor het eenvoudige mechanisme, zoodat ook in het geval $S=4$ de horizontale projectie van het over het oppervlak bewegende punt als beeldpunt te beschouwen is voor een willekeurig mechanisme met 2 vrijheidsgraden.

$$S = 2.$$

§ 20. We onderstellen dus, dat de relatie bestaat:

$$n_1 = n_2 + q,$$

waarbij $\frac{q}{n_1}$ van de orde $\left(\frac{h}{R_1}\right)^2$ is. Aangezien we echter bij de gevallen $S = 3$ en $S = 4$ reeds gezien hebben, op welke wijze zulk een relatierest in rekening kan worden gebracht, door in de functie R een term op te nemen met qa_2 , bepalen we ons hier tot het geval, dat de relatierest nul is, dus

$$n_2 = n_1 = n.$$

Voor het oppervlak is het laagste punt een ombilicaalpunt. Hiertoe behoort als bijzonder geval het omwentelingsoppervlak met de Z -as als omwentelingsas, welk geval men door Prof. KORTEWEG behandeld vindt aan het slot van de meermalen aangehaalde verhandeling.

De termen van hooger orde dan h^4 weglatende, omdat we in de bewegingsvergelijkingen geen termen opnemen van hooger orde dan h^3 , en de termen van de orde h^3 weglatende, omdat in de bewegingsvergelijkingen geen termen van de orde h^2 storend kunnen zijn, kunnen we de vergelijking van het oppervlak schrijven:

$$z = \frac{1}{g} (c_1 x^2 + c_2 y^2 + e_1 x^4 + e_2 x^3 y + e_3 x^2 y^2 + e_4 x y^3 + e_5 y^4),$$

waarin we er van gebruik maken, dat men door een draaiing van het coördinatenstelsel om de Z -as er voor zorgen kan, dat de coëfficiënten van xy^3 en x^3y gelijk worden.

De oplossing bij eerste benadering is:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{a_1}}{n} \cos (nt + 2n\beta_1), \\ y &= \frac{\sqrt{a_2}}{n} \cos (nt + 2n\beta_2); \end{aligned}$$

waarin $n = \sqrt{2c_1} = \sqrt{2c_2}$.

§ 21. Gaan we over tot de vereenvoudiging van de bewegingsvergelijkingen. Overeenkomstig hetgeen in § 15 voor het geval $S = 4$ gezegd is, kunnen we hier in de termen van de orde h^3 der bewegingsvergelijkingen vervangen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &\text{ door } a_1 - n^2 x^2, \\ \ddot{y} &\text{ ,, } a_2 - n^2 y^2, \\ \ddot{x} &\text{ ,, } - n^2 x, \\ \ddot{y} &\text{ ,, } - n^2 y. \end{aligned}$$

De vergelijkingen worden:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + n^2 x + 4e_1 x^3 + 3e_2 x^2 y + 2e_3 x y^2 + e_5 y^3 + \frac{n^4}{g^2} (\alpha_1 + \alpha_2) x - \frac{2n^6}{g^2} (x^2 + y^2) x &= 0. \\ \ddot{y} + n^2 y + e_1 x^3 + 2e_3 x^2 y + 3e_2 x y^2 + 4e_5 y^3 + \frac{n^4}{g^2} (\alpha_1 + \alpha_2) y - \frac{2n^6}{g^2} (x^2 + y^2) y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Hierin kunnen we geen termen weglaten, want alle termen van de orde h^3 zijn storend. De vergelijkingen zijn als volgt te schrijven:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + n^2 x - \frac{\partial R}{\partial x} &= 0, \\ \ddot{y} + n^2 y - \frac{\partial R}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \right\}$$

waarin we moeten nemen:

$$\begin{aligned} -R &\equiv e_1 x^4 + e_2 x^3 y + e_3 x^2 y^2 + e_2 x y^3 + e_5 y^4 + \\ &\quad + \frac{n^4}{2g^2} (\alpha_1 + \alpha_2) (x^2 + y^2) - \frac{n^6}{2g^2} (x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

§ 22. Substitueeren we de voor eerste benadering aangenomen uitdrukkingen voor x en y in de functie R , en behouden we alleen de termen, welke t niet expliciet bevatten, dan komen we tot:

$$-R \equiv \frac{1}{2} a a_1^2 + b a_1 a_2 + \frac{1}{2} c a_2^2 + f a_1 a_2 \sin^2 \varphi + f_1 (a_1 + a_2) \sqrt{a_1 a_2} \cos \varphi,$$

waarin:

$$a = \frac{3e_1}{4n^4} + \frac{n^2}{8g^2},$$

$$b = \frac{3e_3}{8n^4} + \frac{n^2}{8g^2},$$

$$c = \frac{3e_5}{4n^4} + \frac{n^2}{8g^2},$$

$$f = -\frac{e_3}{4n^4} + \frac{n^2}{4g^2},$$

$$f_1 = \frac{3e_2}{8n^4},$$

$$\varphi = 2n (\beta_1 - \beta_2).$$

Het stelsel differentiaalvergelijkingen, dat de veranderlijkheid der α 's en β 's met den tijd aangeeft, wordt:

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} &= -4nf_1a_1a_2 \sin \varphi \cos \varphi + 2nf_1(a_1 + a_2) \sqrt{a_1a_2} \sin \varphi \\
 \frac{da_2}{dt} &= +4nf_1a_1a_2 \sin \varphi \cos \varphi - 2nf_1(a_1 + a_2) \sqrt{a_1a_2} \sin \varphi, \\
 \frac{d\beta_1}{dt} &= aa_1 + ba_2 + fa_2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2}f_1 \left(3\sqrt{a_1a_2} + a_2 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \right) \cos \varphi, \\
 \frac{d\beta_2}{dt} &= ba_1 + ca_2 + fa_1 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2}f_1 \left(a_1 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} + 3\sqrt{a_1a_2} \right) \cos \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Uit het stelsel volgt onmiddellijk:

$$\frac{da_1}{dt} + \frac{da_2}{dt} = 0,$$

dus

$$a_1 + a_2 = \text{constant}.$$

Een andere integraal is volgens § 4:

$$\frac{1}{2}aa_1^2 + ba_1a_2 + \frac{1}{2}ca_2^2 + fa_1a_2 \sin^2 \varphi + f_1(a_1 + a_2) \sqrt{a_1a_2} \cos \varphi = \text{const.}$$

§ 25. De uitkomsten worden voor het algemeene geval zeer ingewikkeld. Dit is blijkbaar het gevolg daarvan, dat in de functie R voorkomen $\cos \varphi$ en $\sin^2 \varphi$, of met andere woorden $\cos \varphi$ en $\cos 2\varphi$. Het vraagstuk wordt belangrijk vereenvoudigd als we $f_1 = 0$ denken, dus $e_2 = 0$, wat hierop neerkomt, dat we onderstellen, dat voor het oppervlak de XZ en YZ vlakken symmetrievlakken zijn.

Voeren we dan weer ζ in, zóódat

$$a_1 = R_0^2 h^2 \zeta, \quad a_2 = R_0^2 h^2 (1 - \zeta),$$

dan is de laatste integraal te schrijven in den vorm:

$$\sqrt{\zeta(1-\zeta)} \cos \varphi = p \zeta^2 + q \zeta + r,$$

zoodat we weer alle integraties in eindigen vorm kunnen uitvoeren, en x en y als functien van den tijd te vinden zijn.

Osculeerende krommen.

§ 24. We keeren tot het algemeene geval terug, en zullen nagaan wat er wordt van de osculeerende krommen. Het zijn ellipsen, wier vergelijking gevonden wordt door tusschen

$$x = \frac{\sqrt{a_1}}{n} \cos (nt + 2n\beta_1)$$

en

$$y = \frac{\sqrt{a_2}}{n} \cos (nt + 2n\beta_2)$$

t te elimineeren.

Door verandering van den oorsprong van tijd vinden we, dat we voor een bepaalde osculeerende de vergelijking ook kunnen vinden door eliminatie van t tussehen:

$$x = \frac{\sqrt{a_1}}{n} \cos nt$$

en

$$y = \frac{\sqrt{a_2}}{n} \cos (nt - \varphi),$$

dus stelt φ het phaseverschil voor.

Heeft φ een willekeurige waarde, dan heeft de ellips een willekeurige gedaante en ligging.

Is $\varphi = 0$ of π , dan wordt een rechte doorloopen, die door O gaat.

Is $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dan liggen de assen der ellips langs de coördinatenassen.

De ellipsen worden beschreven in rechthoeken, die hun zijden evenwijdig met de assen hebben en wier hoekpunten, zooals uit

$$a_1 + a_2 = constant$$

blijkt, liggen op een cirkelomtrek.

Om de verandering van gedaante en ligging na te gaan, kunnen we de bekende betrekkingen neerschrijven, die dienstig kunnen zijn om de assen der ellips en den hellingshoek van de lange as met de X -as te berekenen. Zijn Ah en Bh de halve groote en kleine as en θ de bedoelde hoek, dan worden die betrekkingen:

$$\frac{1}{A^2 h^2} + \frac{1}{B^2 h^2} = \frac{n^2 R_0^2 h^2}{a_1 a_2 \sin^2 \varphi}, \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{1}{A^2 B^2 h^4} = \frac{n^4}{a_1 a_2 \sin^2 \varphi}, \dots \dots \dots (2)$$

$$tg 2\theta = \frac{2 \sqrt{a_1 a_2}}{a_2 - a_1} \cdot \cos \varphi. \dots \dots \dots (3)$$

Uit (1) en (2) leiden we nu onmiddellijk af: De som van de kwadraten van de assen der ellips is standvastig.

§ 25. Uit het zoeven gevondene kan nu gemakkelijk bewezen worden, dat voor het geval het oppervlak een omwentelingsoppervlak is de osculeerende ellips een onveranderlijke gedaante heeft.

Dan wordt namelijk:

$$-R = \frac{1}{2} a (a_1 + a_2)^2 + f a_1 a_2 \sin^2 \varphi,$$

waarin:

$$a = \frac{3e_1}{4n^4} + \frac{n^2}{8g^2},$$

$$f = -\frac{e_1}{2n^4} + \frac{n^2}{4g^2}.$$

Daar nu:

$$\frac{1}{2} a (a_1 + a_2)^2 + f a_1 a_2 \sin^2 \varphi = \text{constant},$$

en ook

$$a_1 + a_2 = \text{constant},$$

is

$$a_1 a_2 \sin^2 \varphi = \text{constant}.$$

Uit (2) volgt dan

$$ABh^2 = \text{constant},$$

waaruit in verband met het slot van § 24 kan besloten worden tot:

$$Ah = \text{const.} \quad Bh = \text{const.},$$

waarmede het bewijs geleverd is.

Wanneer we nu, blijvende in het geval van het omwentelingsoppervlak, willen nagaan op welke wijze θ verandert, dan hebben we de differentiaalvergelijkingen neer te schrijven, die de veranderlijkheid der a 's en β 's geven. Zij worden nu:

$$\frac{da_1}{dt} = -4nf a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\frac{da_2}{dt} = 4nf a_1 a_2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = a(a_1 + a_2) + f a_2 \sin^2 \varphi,$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} = a(a_1 + a_2) + f a_1 \sin^2 \varphi.$$

We zien dat in $\frac{d\beta_1}{dt}$ en $\frac{d\beta_2}{dt}$ een gelijke standvastige term $a(a_1 + a_2) = aR_0^2 h^2$ voorkomt. Dit wil zeggen dat het trillingsgetal n gewijzigd wordt met een bedrag $2naR_0^2 h^2$.

Wanneer we nu de betrekking

$$\tan 2\theta = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_2 - a_1} \cos \varphi$$

naar t differentieeren, dan komen we na eenige herleiding tot:

$$\frac{d\theta}{dt} = - 2 f n^3 A B h^2 ,$$

waaruit blijkt, dat de ellips met standvastige hoeksnelheid ronddraait.

Deze uitkomsten zijn ook quantitatief volkomen in overeenstemming met de door Prof. KORTEWEG gevondene.

§ 26. De verandering in ligging en gedaante der osculeerende kromme schijnt voor het algemeene geval $n_2 = n_1$ niet eenvoudig te worden.

Bepalen we ons daarom tot het geval $e_2 = 0$; dan zijn XZ - en YZ -vlak symmetrievlakken voor het oppervlak.

De eerste vergelijking van (21) wordt nu:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = - 4 n f \alpha_1 \alpha_2 \sin \varphi \cos \varphi .$$

Of, door invoering van ζ :

$$\frac{d\zeta}{dt} = - 4 n f R_0^2 h^2 \zeta (1-\zeta) \sin \varphi \cdot \cos \varphi .$$

De betrekking tusschen ζ en φ wordt:

$$\cos^2 \varphi = \frac{p\zeta^2 + q\zeta + r}{\zeta(1-\zeta)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (22)$$

ζ gaat weer periodiek veranderen tusschen een grootste en een kleinste waarde. Nu kan echter $\frac{d\zeta}{dt} = 0$ worden voor $\sin \varphi = 0$ en voor $\cos \varphi = 0$. Er zijn dus, afgezien van bijzondere gevallen, 3 algemeene gevallen:

1°. Voor de uiterste waarden van ζ is $\cos \varphi = 0$. Dan worden in de uiterste rechthoeken ellipsen beschreven met de assen langs de X -as en Y -as (fig. 13).

2°. Voor de uiterste waarden van ζ is $\sin \varphi = 0$. In de uiterste rechthoeken worden rechten beschreven (fig. 14).

3°. Voor één der uiterste waarden van ζ is $\sin \varphi = 0$, voor de andere is $\cos \varphi = 0$. (fig. 15).

Bijzondere gevallen.

§ 27. Deze hebben we weer voor de uiterste waarden van den modulus \varkappa (\varkappa heeft dezelfde gedaante als in § 16) der elliptische functiën; dan zijn er 2 wortels samengevallen van de vergelijking:

$$f(\zeta) \equiv (p\zeta^2 + q\zeta + r) \{ \zeta(1-\zeta) - (p\zeta^2 + q\zeta + r) \} = 0 .$$

Het bijzondere geval, dat overeenkomt met B van § 9 en het 2^{de} van § 18 is hier ook te vinden, en wel op twee manieren. Het zijn de gevallen, dat voortdurend dezelfde rechte beschreven wordt (voortdurend $\sin q = 0$; wanneer het oppervlak omwentelingsoppervlak is, dan is deze bewegingsvorm in iederen meridiaan mogelijk;) en dat voortdurend dezelfde ellips beschreven wordt ($\cos q = 0$; dit wordt voor het omwentelingsoppervlak de eenparige beweging in een parallelcirkel.)

Het bijzondere geval, dat overeenkomt met A van § 9 en met het 1^{ste} van § 18 bestaat hier eveneens. De bewegingsvorm nadert asymptotisch tot de beweging in een bepaalde ellips.

Omhullende der osculeerende krommen.

§ 28. Er zijn twee gevallen aan te wijzen, waarin de omhullende een eenvoudige gedaante aanneemt.

1°. Voor $p = -1$, $q = 1$ in (22), het geval van een omwentelingsoppervlak. De omhullende is gedegeneerd tot twee concentrische cirkels.

2°. Voor $p = 0$ en $q = 0$ in (22) is de omhullende tot twee paren evenwijdige lijnen, die een rechthoek insluiten, gedegeneerd.

Willekeurig mechanisme met 2 graden van vrijheid, waarvoor $S = 2$.

§ 29. De vergelijkingen van LAGRANGE krijgen hier volkomen dezelfde gedaante als voor $S = 4$. In de termen van de orde h^3 kunnen we weer op de gewone wijze de termen met \ddot{q}_1 , \ddot{q}_2 , \dot{q}_1^2 en \dot{q}_2^2 door andere vervangen. Vervolgens hebben we te herleiden de termen $-\frac{\partial P_1}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2$ en $-\frac{\partial P_2}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2$. Hiervoor voeren we q'_1 en q'_2 in, zóódanig dat:

$$q'_1 = q_1 + \frac{1}{4} a_2 q_1^2 q_2 + \frac{1}{2} a_1 q_1 q_2^2 .$$

$$q'_2 = q_2 + \frac{1}{4} c_1 q_1 q_2^2 + \frac{1}{2} c_2 q_1^2 q_2 .$$

Het blijkt nu na deze herleidingen dat de termen van de orde h^3 in de 1^{ste} vergelijking de gedaante aannemen:

$$\left\{ -a_1 \frac{\alpha_1}{n^2} + (a_3 - b_2 + c_1) \frac{\alpha_2}{n^2} \right\} q_1 + \left(\frac{1}{2} c_2 - 2b_3 \right) \frac{\alpha_2}{n^2} q_2 + \\ + 2a_1 q_1^3 + \left(\frac{1}{2} a_2 + b_1 \right) q_1^2 q_2 - (a_3 - 2b_2 + c_1) q_1 q_2^2 - \left(\frac{1}{2} c_2 - 3b_3 \right) q_2^3.$$

We vervangen nu $B^2 h^2 q_2$ door $\frac{4}{3} q_2^3$. Dit is geoorloofd, omdat we bij substitutie van $q_2 = Bh \cos(nt + \lambda)$ in $\frac{4}{3} q_2^3$, behalve een term $B^2 h^2 q_2$, termen krijgen, die niet storend zijn.

We willen onderzoeken of de storende termen in de beide vergelijkingen weer afgeleiden zijn eener zelfde functie. Daarvoor hebben we in de eerste vergelijking niet de termen met q_1 en q_1^3 , in de tweede niet die met q_2 en q_2^3 te beschouwen. De overige termen worden in de eerste vergelijking:

$$\left(\frac{1}{2} a_2 + b_1 \right) q_1^2 q_2 - (a_3 - 2b_2 + c_1) q_1 q_2^2 + \frac{1}{3} \left(b_3 + \frac{1}{2} c_2 \right) q_2^3.$$

In de tweede:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a_2 + b_1 \right) q_1^3 - (a_3 - 2b_2 + c_1) q_1^2 q_2 + \left(b_3 + \frac{1}{2} c_2 \right) q_1 q_2^2.$$

We vinden dus ten slotte dat de storende termen afgeleiden zijn van een zelfde functie R , dus worden de vergelijkingen:

$$\ddot{q}_1 + n^2 q_1 - \frac{\partial R}{\partial q_1} = 0,$$

$$\ddot{q}_2 + n^2 q_2 - \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0,$$

waarin:

$$R = Ph^2 q_1^2 + Qh^2 q_2^2 + U_4,$$

als P en Q homogene kwadratische functien zijn van $\sqrt{\alpha_1}$ en $\sqrt{\alpha_2}$ en U_4 een homogene functie van den 4^{den} graad van q_1 en q_2 . De voor het eenvoudige mechanisme gevonden resultaten zijn dus geldig voor een willekeurig mechanisme met 2 vrijheidsgraden.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER doet eene mededeeling over:
„De Camera silenta¹⁾ van het Physiol. Lab. te Utrecht.”

De uitbreiding van het verkeer roept bijkans overal in meerdere of mindere mate de nadeelen te voorschijn, die aan de voortdurende aanwezigheid van rumoer verbonden zijn. Hieruit ontstond de behoefte aan geluidvrije vertrekken en wel het eerst in die gevallen, waarin het aanhoudend bestaan van storende geluiden een onoverkomelijke belemmering vormt. Zulke gevallen doen zich voor:

a. bij acustische proefnemingen, wanneer de waarnemingen in de nabijheid van het minimum perceptibile moeten plaats hebben;

b. in oorheelkundige poliklinieken, waar door het af- en aangaan van patienten nimmer de vereischte stilte heerscht en een grooter frequentie van het bezoek het onmogelijk worden van elk fijner onderzoek beteekent, dientengevolge ook onzekerheid van diagnose, van advies en van beslissing in geval van keuring;

c. in modern gebouwde klinieken, die met hare gladde wanden, naakte vloeren, constructie van steen en ijzer, enz. sterk resonanceeren en door hare vele technische inrichtingen nimmer rustig kunnen zijn; het gevolg is de onuitvoerbaarheid van een werkelijk doeltreffend, percutorisch en auscultatorisch onderzoek.

Sinds 1904 is in het Physiologisch Laboratorium te Utrecht ²⁾ ten behoeve van het in sub a genoemde doel een camera silenta (2,28 × 2,28 × 2,20 M.) ingericht geworden en sedert is mijn raad bij den bouw van nieuwe laboratorien, poliklinieken en ziekenhuizen hier te lande en elders, bij herhaling gevraagd. In verband met het laatste veroorloof ik mij hier de overtuiging uit te spreken, dat een geluidvrij kamertje, dat men tot een der 3 straks genoemde doeleinden mocht willen construeeren, aan drie voorwaarden zal hebben te voldoen, wil men niet teleurgesteld uitkomen. Deze voorwaarden zijn:

1°. Moet de binnenvlakte van het vertrek bekleed zijn met een stof, die het geluid niet terugkaatst; immers verzuimt men dit, dan zullen niet alleen de onwillekeurige geluiden, die men zelf maakt,

¹⁾ Silentus, stil, adj. voorkomend bij GELLIIUS, in een fragment van LAEVIUS aan „loca” toegevoegd, verdient wegens de korthed de voorkeur boven silentiosus.

²⁾ Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1905, Deel I, p. 571. Zeitschr. f. Ohrenheilk. Bd. 54, p. 247.

reeds storen, maar men zal bovendien gehinderd worden door de kleine geluidsrest, die wegens onvolkomenheden der constructie nog mocht overblijven; de resonantie der afgesloten ruimte zelf zal uit het weinige rumoer, dat ontstaat of binnendringt, bepaalde bestanddeelen grijpen en in versterkte mate ten gehoor brengen.

2°. Moet de isolering tot stand worden gebracht door een dubbelwand, met lucht-tusschenruimte van zoo geringe dikte, dat resonantie van hoorbare tonen uitgesloten is en daarenboven tusschen de beide wanden geen ander contact over blijft dan van eenige smalle loodverbindingen.

3°. Moet de isolering van den buitenmuur van het gebouw en van den bodem zoo volkomen mogelijk zijn; eerstgenoemde isolering heeft door een opzettelijk aangebrachte nevenvertrek te geschieden.

De eerste voorwaarde is in ons Laboratorium vervuld door een bekleeding met eenige centimeters dik paardenhaar (trichopiëse), gelijk dit in telefooncellen wordt gebezigd. Ik dank de kennismaking met deze stof, die daarenboven een voortreffelijke geluidsisolatie verschaft, aan Dr. BILTRIS te Gent.

Aan de tweede voorwaarde is te Utrecht voldaan door gebruik te maken ter bevestiging van het trichopiëse van een muur van poreusen steen en aanbrenging daarbuiten van een tweeden wand, bestaande uit kurksteen van Duitsch fabrikaat. Nog beter zouden, althans in acustisch oogpunt, turfmosplaten uit Klasiënaveen in Drenthe voldaan hebben.

De derde voorwaarde eindelijk eischt het zuiver gebruik van loodcontacten. Vooral den bodem heeft men te verzorgen. Te Utrecht zijn in dit opzicht fouten ingeslopen, die slechts ten deele verholpen konden worden door de latere aanbrenging eener extra-bekleeding.

De zooeven genoemde hoofdvoorwaarden vooropgesteld, komt weldra de vraag te beantwoorden, zal een geluidvrij vertrek ondergronds of gelijkvloers, dan wel op een verdieping moeten worden aangelegd. Mijn antwoord is beslist op een verdieping, want de geleiding van het uit den bodem komend geluid vormt het moeilijkst te overwinnen bezwaar. Een doeltreffende bodemisolatie zal op een verdieping veel gemakkelijker kunnen worden bereikt dan op een fundeering. In het eerste geval heeft men slechts voor loodcontacten met de steunbalken te zorgen, die zelf bovendien niet rechtstreeks met den bodem in verbinding staan, terwijl men in het tweede geval op

zijn gunstigst van korte, veellagige zuilen gebruik kan maken, die dan toch steeds rechtstreeks naar den bodem geleiden.

Wat de verschillende tonen betreft, blijken de lage tonen het moeilijkst weg te houden. Onhoorbare trillingen van zeer langzame periodiek zijn in onze camera silenta zelfs in het geheel niet uitgesloten, zoodat een gevoelige microfoon afgeleid naar een gouddraad-snaargalvanometer niet tot rust blijkt te komen, ook zelfs niet, wanneer bij volkomen adaptatie van het gehoororgaan geen spoor van geluid waarneembaar is. Dit stoort acustisch niet, maar een iets sneller periodiek zou hinderlijk zijn geweest.

Een geluidvrij vertrek behoort verder poreuse wanden te hebben, want kiest men volmaakt impermeabele muren, dan zal bij langdurige proeven eene ventilatie noodig blijken, die weer de aanbrenging van ventilatiekanalen, dus van geluidslekken, zou vorderen. Voor dubbeldeur en dubbel-venster (het laatste hygienisch m. i. onmisbaar) zijn uit den aard der zaak bijzondere inrichtingen noodig, die veel zorg en voortdurende controle vereischen. Bij acustische proeven geschiede de geluidstoevoer uit buiten het vertrek geplaatste geluidsbronnen midden door een looden stop, opdat aan het beginsel, dat de beide wanden van den dubbelwand geen ander dan loodcontact zullen hebben, geen afbreuk worde gedaan¹⁾. Electricisch licht, telefoonbediening, aanvoer van aanblaasluucht voor orgelpijpen en sirenes door een enge looden buis en de noodige geleidraden naar den galvanometer leveren geenerlei technische moeilijkheden op.

Een toevallig nevenvoordeel van een acustisch vertrek met dubbelen wand, dubbelen deur en dubbel venster, behoorlijk door nevenvertrekken van de buitenmuren van het gebouw afgegrensd, is nog dit, dat het een calorimeter vormt. De camera silenta te Utrecht blijft zonder bewoner tot op 2 decigraden constant van temperatuur. Door de trichopiëse-wanden met eenige meters uiterst fijn koperdraad (0.1 m.M.) te bedekken kan men zich met een in een nevenvertrek geplaatste Wheatstonesche brug en galvanometer een bolometer inrichten, waarmee men de temperatuursverhooging, die de ruimte door een bewoner ondergaat, meet. De warmteproductie, die dit teweegbrengt wordt empirisch bepaald (d'ARSONVAL). Tot respiratie-calorimeter is het geluidvrij vertrek echter niet bruikbaar. Dit is onmogelijk, omdat de wanden poreus zijn en geeft men dit laatste op, dan is het voor langdurige proeven niet meer geluidvrij.

Een menigte onderzoekingen kunnen in de camera silenta plaats

¹⁾ De looden stoppen hebben 4 cM. dikte en bezitten een centrale boring, die op zijn nauwst een engte van 0,4 cM. mag hebben; verg. Onderz. Physiol. Lab. Utrecht (5) VI p. 138.

hebben. Die welke in de afgelopen zes jaren zijn uitgevoerd, zijn wel niet zoo talrijk en uitgebreid als ik zou wenschen, maar een opsomming met literatuuroopgaaf der publicaties moge toch volgen om als voorbeeld te dienen van hetgeen o.a. in een geluidvrij vertrek te bereiken is.

1°. Kan men experimenteeren over de gewaarwording van stilte; daarbij neemt men, tenzij een perforatie van het trommelvlies voorhanden is, beiderzijds een suizen waar, waarin zich bij nadere analyse een zacht geruisch als van den wind in de toppen der boomen, naast een zeer hoog fluiten ($\pm g^6$) laat onderscheiden; personen, bij wie dit physiologisch oorsuizen onduidelijk is, bespeuren een gevoel van druk¹⁾.

2°. Kan de invloed der adaptatie worden nagegaan; onder meer blijkt dan een geleidelijke vermindering van het physiologisch oorsuizen, dat na 3 uur verblijf in het geluidvrij kamertje geheel verdwenen is (BORTOLOTTI), terwijl in denzelfden tijd het gevoel van druk, indien aanwezig, steeds meer en meer toeneemt (MINKEMA); men zou hieruit geneigd zijn af te leiden, dat het physiologisch oorsuizen geheel of gedeeltelijk het karakter van een nabeeld bezit²⁾.

3°. Kan het verschijnsel van accommodatie, dat HENSEN ontdekte, nader worden bestudeerd, doordat men aan een buiten de camera silenta geplaatst persoon door beengeleiding een stemvorktoon toevoert, die dan uit diens oor door een hoorbuis in het kamertje wordt geleid; telkens wanneer een buiten het vertrek geplaatste metronoom tikt, accommodeert de proefpersoon en hoort de waarnemer een versterkt geluid (QUIX).

4°. Kan uit den kortsten expositietijd het kleinst waarneembaar aantal geluidstrillingen in een van buiten toegeleiden stemvork- of orgeltoon worden afgeleid; conform BODE blijkt dit getal op typische wijze in de toonladder te varieeren (DE GROOT³⁾ en VAN MENS).

1) Voor mijn oor kan het physiologisch oorsuizen worden onderdrukt: *a.* door het tikken van een horloge, *b.* door een stemvorkgeluid van *c'*-toonshoogte en een geluidsterkte van 68.10^{-3} Erg per cm^2 en per sec. (Erg. d. Physiol. 1905 p. 452).

2) Volgens BORTOLOTTI komt het geruisch terstond terug, wanneer men een oogenblik buiten is gegaan en in de camera silenta terugkeert.

3) H. DE GROOT, Ztschr. f. Sinnesphysiol. Bd. 44 p. 18 en Onderz. Physiol. Lab. (5) X p. 137.

5°. Kan het minimum perceptibile gedurende de eenheid van tijd door de toonladder worden vastgesteld (MINKEMA¹).

6°. Kan ook de drempel van onderscheid worden opgespoord en de typische variatie, welke deze in de toonladder ondergaat (DEENIK²).

7°. Kan de gewaarwording van knal, door HENSEN bij het plotseling inzetten of afbreken van sirenetonen opgemerkt, met behulp van het plotseling openen of sluiten van een telefooncontact of plotseling openen of sluiten van een bijzonder gebouwde loodkraan, aan tonen van allerlei oorsprong en toonhoogte worden gedemonstreerd.

8°. Kan de verbreiding van het geluid om een stemvork met de ligging der bekende interferentievlakken nauwkeurig worden nagegaan, zonder dat men in de fouten vervalt, die in vertrekken met terugkaatsende wanden noodzakelijk ontstaan.

9°. Kan de resonantiewerking der gewòndene molluskenschelpen voor geruischen rechtstreeks worden bewezen.

10°. Kan de geluiddoovende werking van verschillende isolatiemiddelen met volkomen strengheid worden nagegaan, voor knallen door stalen kogels op een stalen plaat³) te doen vallen (valphonometervan ZOTTI), voor tonen door zuiver gestemde klokjes electrisch aan te slaan, in beide gevallen het instrument opgenomen in een kleine niet resonerende ruimte; de wanden dezer ruimte worden met de te onderzoeken stoffen bekleed en eenerzijds de aanslagenergie, anderzijds de afstand, waarop gehoord wordt, vastgesteld; het volkomenst isoleert bij gelijke wanddikte het paardenhaar (trichopiëse), dan volgt de turfmosplaat uit Klasiënaveen, daarna het kurksteen; andere materialen, die wij onderzochten, hadden aanmerkelijk geringere geluiddooving.

1) H. F. MINKEMA, Onderz. Physiol. Lab. (5) VI. p. 134.

2) Zittingsverslag dezer Academie van 3 Nov. 1905.

3) Ter voorkoming van resonantie moet de stalen plaat op een zwaar stuk lood gesoldeerd worden.

Wiskunde. — De heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan getiteld: „*Over puntenparen, die met betrekking tot een vlakke kubische kromme geassocieerd zijn.*”

1. Door de symbolische vergelijking

$$a_x^3 = 0$$

wordt een vlakke kubische kromme c^3 voorgesteld. Zijn de punten X , Y en Z verbonden door de betrekking

$$a_x a_y a_z = 0,$$

dan ligt elk hunner op de (gemengde) poolrechte der andere twee, en elke twee dier punten worden harmonisch gescheiden door de poolkegelsnede van het derde punt; zij vormen een pooldriehoek van c^3 .

Beschouwen we nader het geval dat de drie punten in een rechte l liggen: Z is dan het snijpunt van l met de poolrechte van X en Y .

Blijkbaar vormen de op l gelegen drietallen X , Y , Z een kubische involutie van den tweeden rang, I_2^3 , welke de snijpunten P, Q, R van c^3 met l tot drievoudige elementen heeft.

Volgens een bekende eigenschap der I_2^3 vormen P , Q en R tevens een groep der I_2^3 . Dit is trouwens rechtstreeks in te zien; immers, de poolkegelsnede van P snijdt l in P en in het punt H , dat door Q en R harmonisch van P wordt gescheiden; de poolrechte van Q t. o. v. die kegelsnede gaat dus door R .

Tot I_2^3 behoort een neutraal paar, U , V , dat met elk punt van l een drietal vormt, dus l tot poolrechte moet hebben. De poolkegelsneden der op l gelegen punten vormen een bundel; twee dier kegelsneden u^2 en v^2 raken l in de punten V en U .

We zullen U en V *geassocieerde punten* noemen.

Elk punt U is blijkbaar met twee punten V geassocieerd, n.l. met de punten welke de poolrechte en de poolkegelsnede van U gemeen hebben. De geassocieerde paren zijn dus in een involutorische verwantschap (2, 2) gerangschikt.

Wordt l raaklijn van c^3 , dan vereenigen zich in het raakpunt L twee drievoudige elementen der I_2^3 met de beide neutrale punten U , V . Immers alle poolkegelsneden wier polen op l liggen, gaan nu door L , en een van die krommen raakt l in L . Dus is c^3 coincidentie-kromme der (2, 2).

2. We zullen onderzoeken of er punten U zijn, waarvoor de overeenkomstige punten V weer een geassocieerd paar vormen, zoodat

men een drietal punten heeft, die twee aan twee geassocieerd zijn. Nemen we de drie punten tot hoekpunten van een assen-driehoek, dan zullen hun poolkegelsneden door

$a_1 x_1^2 + b_1 x_2 x_3 = 0$, $a_2 x_2^2 + b_2 x_1 x_3 = 0$, $a_3 x_3^2 + b_3 x_1 x_2 = 0$
voorgesteld worden: immers elk dier punten heeft de verbindingslijn der andere twee tot raakkoorde t. o. v. zijn poolkegelsnede.

Is $u = 0$ de vergelijking van c^3 , dan worden de drie poolkegelsneden ook voorgesteld door

$$\frac{du}{dx_1} = 0, \quad \frac{du}{dx_2} = 0, \quad \frac{du}{dx_3} = 0.$$

Hieruit volgt vooreerst dat de factoren b_1, b_2, b_3 even groot moeten zijn. Verder blijkt gemakkelijk, dat de vergelijking van c^3 is

$$a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 3 b x_1 x_2 x_3 = 0.$$

De coördinatendriehoek is dus een inflexiedriehoek, d. w. z. een driehoek, waarvan elke zijde drie buigpunten van c^3 bevat. Daar er vier inflexiedriehoeken zijn, bevat de verwantschap (2,2) der geassocieerde punten vier involutorische drietallen.

3. We zullen nu de m. pl. bepalen van de geassocieerde paren, die met een gegeven punt D collineair zijn.

Vooreerst is D een dubbelpunt der m.pl.; de met D geassocieerde punten D en D' zijn de snijpunten der poolkegelsnede d^2 van D met de poolrechte d van D . De m.pl. is dus een nodale biquadratische kromme d^4 .

De raaklijnen uit D aan c^3 zijn tevens raaklijnen aan d^4 , want in hun raakpunten vallen telkens twee geassocieerde punten samen.

Dus is d^2 de kegelsnede van BERTINI van d^4 . Bij een willekeurige nodale c^4 bevat deze kegelsnede, behalve de zes raakpunten, de snijpunten van c^4 met de rechte, welke de beide tangentialpunten van het dubbelpunt verbindt, en de raaklijnen in die „fundamentaalpunten” aan de kegelsnede komen samen in het dubbelpunt¹⁾.

De kromme d^4 is een bijzondere kromme, omdat haar fundamentaalpunten met de tangentialpunten D en D' samenvallen, zoodat deze tevens de raakpunten van een dubbelraaklijn zijn.

4. Het is gemakkelijk de vergelijking van d^4 te vinden.

De poolkegelsnede van Z t. o. v. $a_x^3 = 0$ wordt voorgesteld door $a_x a_x^2 = 0$, de poolrechte door $a_x^2 a_x = 0$. Voor de raaklijnen uit Z naar die kegelsnede heeft men dus

¹⁾ Zie mijn verhandeling „La quartique nodale” (Archives Teyler t. IX, p. 263).

$$a_z a_y^2 b_z^3 = a_z^2 a_x b_z^2 b_y.$$

Als deze het gegeven punt Y bevatten, is Z een punt der bij Y behoorende kromme d^4 . Deze heeft dus tot vergelijking (in loopende coördinaten z)

$$a_y^2 a_z b_z^3 = a_y b_y a_z^2 b_z^2.$$

Hieruit blijkt opnieuw, dat de poolrechte van D dubbelraaklijn is en d^4 aanraakt in de tangentialpunten D' en D'' ; immers door combinatie met $a_y^2 a_z = 0$ vindt men $a_y a_z^2 \cdot b_y b_z^2 = 0$. Hetzelfde verkrijgt men door combinatie met $b_z^3 = 0$; hierdoor wordt bevestigd dat d^4 in haar snijpunten met de poolkegelsnede van D door c^3 en de poolrechte d wordt aangeraakt.

Uit

$$a_y^2 a_z b_z^3 - a_y b_y a_z^2 b_z^2 - b_y^2 b_z a_z^3 - b_y a_y b_z^2 a_z^2$$

volgt, dat de vergelijking van d^4 kan vervangen worden door

$$\frac{1}{2} (a_y a_z b_z^2 - b_y b_z a_z^2) (a_y b_z - a_z b_y) = 0,$$

dus ook door

$$(a_y b_z - a_z b_y)^2 a_z b_z = 0.$$

Nu is

$$a_y b_z - a_z b_y = (a_1 b_2) (y_1 z_2) + (a_2 b_3) (y_2 z_3) + (a_3 b_1) (y_3 z_1).$$

Stelt men dus de coördinaten der rechte YZ door ξ_k voor, dan gaat de bovenstaande vergelijking over in

$$(ab\xi)^2 a_z b_z = 0.$$

Deze vergelijking drukt uit dat de poolkegelsnede van Z door de rechte YZ wordt aangeraakt. ¹⁾

5. Tevens blijkt hieruit, dat de rechte (ξ) haar poloconica in twee punten van d^4 snijdt. Dit wordt nader bevestigd door de opmerking, dat de poloconica van (ξ) de m.pl. is van de punten wier poolkegelsneden aan (ξ) raken, waaruit volgt dat ze (ξ) in twee geassocieerde punten snijdt.

De kromme d^4 kan derhalve voortgebracht worden door de snijpunten van elken der stralen s uit D met de aan hem toegevoegde poloconica σ te bepalen. De poloconica doorloopt daarbij een stelsel met index 2. Immers, als σ door eenig punt X gaat, dan wordt de poolkegelsnede van X door s aangeraakt. En daar twee stralen s aan die voorwaarde voldoen, ligt X op twee krommen σ . Deze voortbrenging van d^4 met behulp van een stelsel kegelsneden met index 2 en een daarmee projectieven waaier is kenmerkend voor de nodale biquadratische kromme. ²⁾

¹⁾ CLEBSCH, Leçons sur la géométrie, t. II, p. 278.

²⁾ BOBEK, Denkschriften der Akad. in Wien Bd. 53, S. 119.

6. Elke nodale biquadratische kromme d^4 , waarvan de dubbel-puntsraaklijnen door de raakpunten D' en D'' van een dubbelraaklijn d gaan, staat op de bovengevonden wijze in betrekking tot een c^3 .

De poolkromme d^3 van D heeft in D met d^4 de raaklijnen l en l'' gemeen en snijdt haar in de raakpunten R der zes raaklijnen die in D samenkomen. Van de 16 punten welke d^4 gemeen heeft met het samenstel van d^3 en d liggen er zes in D , vier in D' en D'' , zes in de punten R . De raaklijnen l en l'' bevatten acht van die punten; de overige acht liggen dus in een kegelsnede (kromme d^2 van BERTINI).

Deze kegelsnede d^2 vereenigt de zes punten R met de punten D' en D'' .

Beschouwen we nu den bundel bepaald door d^4 en de dubbel gelegde kegelsnede d^2 ; daartoe behoort een exemplaar dat samengesteld is uit de dubbelraaklijn d en een kubische kromme c^3 . Hieruit volgt, dat d^4 door c^3 wordt aangeraakt in de raakpunten R der zes uit D aan d^4 getrokken raaklijnen.

Daar d^2 door de punten R gaat, is ze de poolkegelsnede van D t. o. v. c^3 ; omdat D' en D'' de fundamentealpunten zijn, zoodat DD' en DD'' door d^2 in D' en D'' worden geraakt, is d de poolrechte van D t. o. v. d^2 en van c^3 . Dus is d^4 de m. pl. der met D collineair gelegen, t. o. v. c^3 geassocieerde, punten.

7. Wordt d^4 voorgesteld door

$$x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 x_3^2 - c^3 x_3 = 0,$$

waar

$$c^3 = (c_1 x_1 + c_2 x_2)^{(3)}$$

is, dan worden l , l'' en d door $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ en $x_3 = 0$ aange-
wezen en d^2 door $2x_1 x_2 x_3 - c^3 = 0$. Uit

$$(x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 x_3^2 - c^3 x_3) - x_3 (2x_1 x_2 x_3 - c^3) = 0$$

volgt dan voor d^2 de vergelijking

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0,$$

en uit

$$(x_1 x_2 - x_3^2)^2 - (x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 x_3^2 - c^3 x_3) = 0$$

vindt men voor c^3

$$c^3 - 3x_1 x_2 x_3 + x_3^3 = 0.$$

Voor de poolkegelsnede η^2 van Y t. o. v. c^3 volgt hieruit

$$c_y c_x^2 - y_1 x_2 x_3 - y_2 x_1 x_3 + y_3 (x_3^2 - x_1 x_2) = 0,$$

voor de poolrechte van D t. o. v. η^2

$$2y_3 x_3 - y_1 x_2 - y_2 x_1 = 0,$$

dus voor de raaklijnen uit D naar de poolkegelsnede η^2

$$4y_3 \{c_y c_x^2 - y_1 x_2 x_3 - y_2 x_1 x_3 + y_3 (x_3^2 - x_1 x_2)\} = (2y_3 x_3 - y_1 x_2 - y_2 x_1)^2.$$

Als een dezer raaklijnen door Y gaat, heeft men

$$4y_3 (c_y^3 - 3y_1 y_2 y_3 + y_3^3) = (2y_3^2 - 2y_1 y_2)^2,$$

of

$$y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2 y_3^2 - c_y^3 y_3 = 0.$$

Hieruit blijkt opnieuw, dat de door deze vergelijking aangewezen kromme de m.pl. is der met D collineair gelegen, t. o. v. c^3 geassocieerde, punten.

Deze bijzondere nodale d^4 wordt gekenmerkt door de eigenschap, volgens welke ze door een kubische kromme wordt aangeraakt in de zes punten wier raaklijnen in het dubbelpunt samenkomen. Immers, uit de beschouwing van den bundel, welke door d^4 met de dubbel gelegde kegelsnede van BERTINI wordt bepaald, blijkt onmiddellijk, dat de overige op deze kegelsnede gelegen punten van d^4 raakpunten zijn van een dubbelraaklijn, welke dan tevens op de dubbelpunts-raaklijnen moeten liggen.

8. We zullen nu nagaan waarin een rechte (ξ) wordt omgezet door de verwantschap der geassocieerde punten. Daartoe elimineeren we y_k uit de drie vergelijkingen

$$\xi_y = 0, \quad a_y a_x^2 = 0 \quad \text{en} \quad a_y^2 a_x = 0.$$

Uit de eerste twee vindt men

$$y_1 : y_2 : y_3 = (a_2 \xi_3) a_x^2 : (a_3 \xi_1) a_x^2 : (a_1 \xi_2) a_x^2.$$

Substitutie in de derde levert dan

$$(ab\xi)(ac\xi) a_x b_x^2 c_x^2 = 0.$$

Een rechte ξ wordt dus omgezet in een kromme ξ^5 van den vijfden graad. Dit was te voorzien, want de beide op ξ gelegen geassocieerde punten gaan bij de transformatie in elkaar over, terwijl de drie snijpunten van ξ en c^3 met zich zelf overeenkomen.

Als het punt U de rechte ξ doorloopt, omhult zijn poolrechte u de poloconica ξ^2 , terwijl zijn poolkegelsnede u^2 een bundel beschrijft. Hieruit volgt dat ξ^5 wordt voortgebracht door een kegelsnedenbundel en een daarmee projectief verwant stralenstelsel van index 2. Bijgevolg heeft ξ^5 dubbelpunten in de vier basispunten van dien bundel, en vormen de met U geassocieerde punten de paren der op ξ^5 voorkomende fundamentele pareninvolutie ¹⁾. In verband hiermee wordt ξ^5 door de poloconica ξ^2 in vijf punten aangeraakt (l. c. p. 48).

¹⁾ Zie mijn opstel „Ueber Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten” (Sitz. Akad. Wien Bd. 104, S. 47).

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Eenige opmerkingen naar aanleiding van een antwoord van den Heer KOHNSTAMM.*”

(Mede aangeboden door den Heer SCHREINEMAKERS).

In het Akademiesverslag van 6 Januari 1910 komt een antwoord voor van den Heer KOHNSTAMM op mijne opmerkingen naar aanleiding van een Verhandeling van de Heeren TIMMERMANS en KOHNSTAMM. Hoewel ook ik zeer ongaarne de discussie voortzet, zoo voel ik mij toch verplicht, teneinde verder misverstand te vermijden, kortelijk voor de laatste maal op de zaak terug te komen.

Ik wil dus even constateeren, dat de Heer KOHNSTAMM geheel zwijgt over het *cardinale* punt, mijner opmerkingen, vervat in punt *a* tweede gedeelte, punt *e* en punt *f*; nl. dat de Heeren T. en K., tengevolge van het niet in aanmerking nemen van de laatste vijf mijner zeven verhandelingen over het bewuste onderwerp, ten onrechte hebben beweerd dat het „abnormale” Type III niet bij *normale* stoffen zou kunnen voorkomen, en dat dit zou liggen aan mijne beperkende onderstelling $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$. Alleen om *dit* misverstand weg te nemen — daar ik toch precies het tegengestelde had beweerd — schreef ik mijn voorgaand stukje.

Daarentegen wordt in het antwoord wel uitvoerig ingegaan op een paar ondergeschikte kwesties, te weten de kwestie $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ en $\frac{d^2 b}{d\sigma^2} = 0$. Ik moet hierbij opmerken, dat waar ik telkens sprak van van het „geheel algemeene” geval $a_2 \lesseqgtr a_1$, $b_2 \lesseqgtr b_1$, deze uitdrukking „geheel algemeen” voor een ieder duidelijk als *tegenstelling* is bedoeld van het vroeger in de eerste twee Verhandelingen door mij behandelde speciale geval $a_2 \lesseqgtr a_1$, $\underline{b_2 = b_1}$, en dat de door mij bedoelde „algemeenheid” *blijkens den geheel en al* mijner stukken natuurlijk alleen geldig is *binnen den nu eenmaal aangenomen kring der* (BERTHELOT'sche) *onderstelling* $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$. Want deze onderstelling stelde ik in al mijn stukken met nadruk voorop, en werd door mij meermalen herhaald (l. c.).

Wat nu de kwestie zelf betreft van de onderstelling $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ (waarover de strijd thans echter niet loopt), zoo zij het mij vergund den Heer K even te herinneren aan een stuk van hem in het Zeitschr. f. physik. Ch. **36**, p. **41** (1901), waar aan het slot (p. 62) o.a. voorkomt: „So weit ich aus dem mir bekannten Material zu schlieszen

vermag, scheinen mir jedoch die Tatsachen sehr zu Gunsten der (BERTHELOT'sche) Annahme zu sprechen . . .". Ik wil hier bijvoegen, dat ook ik inderdaad de onderstelling $a_{1,2} = \sqrt{a_1 a_2}$ zeer waarschijnlijk acht, en dat schijnbare afwijkingen van die onderstelling door mij aan de vorming van verbindingen e. d. worden toegeschreven. Maar hierover hoop ik later nog wel eens uitvoeriger te schrijven.

Ik toonde nu aan, dat zelfs met die eenvoudige onderstelling het abnormale type III bij *volkomen normale* stoffen kan voorkomen. En *dit* bestreed de Heer K. — daar mijne latere stukken over dit onderwerp, waarin het door mij werd bewezen, blijkbaar aan zijne aandacht waren ontsnapt.

Wat de onderstelling $\frac{d^2b}{dx^2} = 0$ betreft, hierbij wijst de Heer K. op een uitspraak van mij, dat „kwalitatief alles hetzelfde zal blijven als b niet onafhankelijk van v en T wordt aangenomen." Dit echter heeft niets met de kwestie te maken of de onderstelling $\frac{d^2b}{dx^2} = 0$ al of niet van invloed is op mijn uitkomsten; v en T zijn toch niet hetzelfde als x . Ik handhaaf ten volle mijn bewering, en de Heer K. zal wel begrijpen dat die afhankelijkheid van v en T alleen door mij werd vermeld, omdat de latere onderzoeken van VAN DER WAALS hebben aangetoond, dat b nog van deze grootheden afhangt. Maar daarover hebben wij het thans niet.

Echter wil ik gaarne erkennen, dat ik bij het schrijven van de door den Heer K. geciteerde regels aangaande het zich weer sluiten van de lengteplooi niet voldoende heb doen uitkomen, dat de afwijkende uitkomst alleen berustte op de onderstelling $\frac{d^2b}{dx^2} = 0$. Ik wist toch, dat reeds VAN DER WAALS in zijn Continuïteit II, p. 24, deze kwestie had te berde gebracht. Toch blijf ik op grond van theoretische overwegingen volhouden, dat in de nabijheid van het grensvolume, dus bij zeer hooge drukken, $\frac{d^2b}{dx^2} = 0$ moet zijn.

En hiermede meen ik mijnerzijds voldoende het Antwoord van den Heer KOHNSTAMM te hebben toegelicht, zoodat verder misverstand bijna onmogelijk schijnt.

Baarn, 21 Februari 1910.

Scheikunde. De Heer HOLLEMAN biedt, mede namens de Heeren T. VAN DER LINDEN en J. J. P. VALETON, eene mededeeling aan: „*Over eene methode ter quantitative analyse van ternaire mengsels.*”

Bij het onderzoeken der producten, welke bij de invoering van een tweeden substituent in het monogesubstitueerd benzol ontstaan, is in vele gevallen gebleken, dat slechts twee van de drie mogelijke isomeren daarin voorkomen. Bij de nitratie van toluol ontstaan echter de drie isomeren. Ten einde deze quantitatief te bepalen gebruikte VAN DEN AREND (Rec. **28**, 415 vlg.) eene benaderingsmethode, die toen kon worden toegepast, omdat de hoeveelheid van een der isomeren (nl. meta) in het nitratiemengsel zeer gering was. Het was echter wenschelijk, eene methode te bezitten, die veroorlooft de drie isomeren in het algemeen quantitatief te bepalen; en dit werd zelfs noodzakelijk toen de Heer VAN DER LINDEN bij zijn onderzoek omtrent de produkten der halogeneering der monohalogenbenzolen bewees, dat daarin alle drie isomere dihalogenbenzolen aanwezig waren, over welk onderzoek te zijner tijd nader zal worden bericht.

De Heer VAN DER LINDEN werkte daarom eene algemeene methode ter quantitative analyse van ternaire mengsels uit, die hij op zijn speciaal onderwerp toepaste. Het toeval wilde, dat ik ongeveer ter zelfder tijd aan den Heer VALETON opdroeg, het ternaire smeltvlak van de drie nitranilinen te bepalen in verband met een onderzoek over de nitratie van aniline en enkele zijner derivaten, hetgeen in mijn laboratorium in gang is. De Heer VALETON, (die over het genoemde, door hem geconstrueerde smeltvlak in de hierna volgende mededeeling bericht), bracht aan de methode die door den Heer VAN DER LINDEN was gevonden, nog eene wijziging aan, die in een aantal gevallen met vrucht zal kunnen worden toegepast, zooals eerstgenoemde bewees bij de bepaling der samenstelling van eenige hem onbekende mengsels der drie nitranilinen.

Het komt mij wenschelijk voor, de methoden ter quantitative analyse van ternaire mengsels, zooals zij door genoemde heeren zijn uitgewerkt en toegepast, reeds nu mede te deelen.

1. Methode VAN DER LINDEN.

Op den voorgrond zij gesteld:

De drie componenten vormen noch mengkristallen, noch verbindingen en geven een homogene smelt. Het ternaire smeltvlak heeft in dit geval zijn eenvoudigsten vorm, Fig. 1. Voor het gemak zal

ik de drie componenten para, ortho en meta noemen; het kunnen natuurlijk even goed drie willekeurige stoffen zijn.

Het punt A in deze figuur stelt een homogeen vloeibaar mengsel der drie componenten voor. Bij afkoeling zet zich in B vast para af. B noemen we het begin- of eerste stolpunt. Bij verdere afkoeling zet zich steeds meer para af en de samenstelling van de bijbehorende vloeistof verschuift langs BC , aangezien de relatieve hoeveelheden ortho en meta in de vloeistof dezelfde blijven. BC is een gedeelte van de doorsnede van de ternaire smeltfiguur met het vlak $PCDLp$, in welke doorsnede de verhouding ortho : meta constant is. In C zet zich een mengsel van para en ortho af, waardoor evenals in B , weer een knik in de afkoelingskurve ontstaat: het tweede stolpunt. Bij nog verdere afkoeling verschuift de samenstelling van de vloeistof langs CE , totdat in E , het ternaire eutecticum, alles vast wordt. 't Is duidelijk, dat alle mengsels, wier beginstolpunt op de lijn PC ligt, waarin dus de verhouding van ortho en meta dezelfde is, doch de hoeveelheden para zeer uiteen kunnen loopen, hetzelfde tweede stolpunt C hebben. Het tweede stolpunt is dus onafhankelijk van de hoeveelheid van den component, die zich bij het eerste stolpunt afzet, doch hangt alleen af van de verhouding waarin de beide andere componenten aanwezig zijn.

Bepaalt men nu de tweede stolpunten, behorende bij diverse verhoudingen van ortho en meta, en brengt men deze waarden in tekening, waarbij men de percentages ortho en meta, betrokken op hun som, op de abscissenas afzet en de tweede stolpunten op de ordinaat, dan krijgt men een kurve als in fig. 2, dus van den vorm van een gewone binaire stollijn. In deze figuur behoort bij 100% ortho het punt E_1 , d. w. z. het eutectische punt van para-ortho; bij 100% meta E_2 , het eutectische punt van para-meta. E' geeft de temperatuur en de verhouding van ortho en meta in het ternaire eutecticum aan. Wanneer ortho of meta de bij het eerste stolpunt uitvriezende component is, krijgt men natuurlijk twee dergelijke lijnen. Heeft men nu in een bepaald geval aan kunstmengsels van ortho, meta en para twee dergelijke stollijnen bepaald, dan kan men met behulp daarvan de samenstelling van ieder willekeurig mengsel afleiden.

Neem daartoe twee hoeveelheden van het mengsel. Voeg bij de eerste zooveel van een der componenten, bijv. para (welke, regelt zich natuurlijk naar omstandigheden), dat deze bij het beginstolpunt uitvriest; uit het tweede stolpunt vindt men met behulp van de daarvoor geldende kurve de verhouding van ortho en meta. Bij de tweede hoeveelheid wordt zooveel ortho (meta) toegevoegd, dat dit

bij het beginstolpunt uitvriest; het tweede stolpunt geeft nu de verhouding van para en meta (ortho). 't Is duidelijk dat hiermede de samenstelling van het mengsel gevonden is.

Bij de toepassing van deze methode kunnen zich praktische bezwaren voordoen, waarvan de voornaamste wel daarin bestaat, dat tweede stolpunten vaak zeer moeilijk te bepalen zijn, omdat zij óf bij te lage temperatuur liggen, óf doordien de eerste component in zulke hoeveelheid uitkristalliseert, dat roeren onmogelijk wordt; dikwijls zal men zich in zoodanig geval kunnen helpen door toevoeging van een bekende hoeveelheid van een der componenten.

Bij vele ternaire stelsels, zooals die bij de invoering van een tweeden substituent in het monogesubstitueerd benzol ontstaan, laat zich bovenstaande methode nog vereenvoudigen. Voor het gemak beschouw ik een substitutiemengsel waarin hoofdproduct, ortho en meta bijproduct zijn. Stel, wat dikwijls zoo is, dat para bij het beginstolpunt uitvriest. Een mengsel met een beginstolpunt als in B moet een samenstelling hebben, gegeven door een der punten van lijn HK (fig. 1), doorsnede van het ternaire smeltvlak met het door B aangebrachte horizontale vlak. Stel dat B het beschouwde mengsel voorstelt. De samenstelling van het mengsel wordt dan gegeven door de lijnen oG , pG en fG . In sommige gevallen nu mogen we, ter berekening van de hoeveelheid para, het werkelijk waargenomen punt B vervangen door H , d. w. z. juist doen alsof de hoeveelheid ortho + meta alleen uit ortho bestond en dus uit de binaire stollijn van para-ortho direct het percentage aan para aflezen. Uit het tweede stolpunt, dat nu in hetzelfde mengsel wordt waargenomen, vinden we de verhouding van ortho en meta. De samenstelling van het ternaire mengsel is daardoor bekend.

Men mag deze vereenvoudiging steeds toepassen wanneer aan de volgende voorwaarde is voldaan: Het snijlijntje BH (dat in fig. 1 als rechte geteekend is, omdat het bij de hier behandelde gevallen óf een rechte is óf zeer weinig van een rechte verschilt) moet evenwijdig loopen aan het vlak $OomM$, want alleen in dat geval valt het met H corresponderende punt G samen met het met B corresponderende punt, dat de hoeveelheid para in het mengsel aangeeft. Past men de methode toe, als BH een hoek maakt met dat vlak, dan krijgt men een afwijking van de juiste waarde. 't Is duidelijk dat deze afwijking des te geringer zal zijn naar mate ten eerste de hoek, ten tweede de afstand BH kleiner is. Van dien hoek en dien afstand zal dus in een gegeven geval de nauwkeurigheid der methode afhangen.

Aan bovengenoemde voorwaarde zal wel meestal worden voldaan,

wanneer de para-takken van de stollijnen para-ortho en para-meta, bij teekening in eenzelfde vlak, langs elkaar vallen. Dit geschiedt steeds wanneer we te doen hebben met ideale smeltkurven. Maar ook al vallen de takken slechts voor een gedeelte samen, dan is de methode nog te gebruiken, wanneer slechts gezorgd wordt, dat het beginstolpunt in dat gedeelte van den para-tak ligt. Dit geheel of gedeeltelijk samenvallen der stollijnen vindt men dikwijls bij isomeren. Een mooi voorbeeld hiervan vertoonen de stollijnen der isomere tribroomtoluolen van JAEGER¹⁾. Bovendien vormen isomeren slechts zeer zelden mengkristallen, zoodat bovenstaande vereenvoudigde analyse-methode wel in de meeste gevallen toepassing zal kunnen vinden bij mengsels van isomeren. In ieder bepaald geval zal het natuurlijk noodig zijn aan eenige kunstmengsels na te gaan of werkelijk de vereenvoudiging de juiste waarden oplevert.

2. Methode VALETON.

De heer VALETON heeft nu nog eene wijziging der zooeven beschreven methode voorgesteld, waardoor de bepaling van de samenstelling van een ternair mengsel uit twee beginstolpunten kan gevonden worden, hetgeen wel een voordeel oplevert, daar deze laatste meestal scherper dan de tweede stolpunten zijn te bepalen.

Deze wijziging is enkel dan van toepassing als men met ideale smeltvlakken te doen heeft (zie hierover nader de volgende mededeeling). In dit geval toch is de vriespuntsverlaging, die para b.v. ondergaat door toevoeging van eene zekere hoeveelheid ortho, gelijk aan de verlaging, die bij toevoeging van ortho + meta ontstaat, als ortho + meta samen evenveel procent bedragen als eerst ortho alleen.

Daardoor wordt de analyse zeer eenvoudig. Men bepaalt dan nl. eerst het beginstolpunt van het mengsel, waaraan zooveel para bijv. is toegevoegd, dat dit bij genoemd punt zich afscheidt. Uit de stollijn para-ortho of para-meta is dan de hoeveelheid para in het ternaire mengsel af te leiden. Thans voegt men bij een ander deel van het ternaire mengsel zooveel ortho bijv., dat dit isomeer bij het beginstolpunt uitkristalliseert. De bepaling van dit punt voert terstond tot de kennis der hoeveelheid ortho, die in het systeem aanwezig is, waarmede zijne samenstelling is gevonden.

Om uit te maken of men met smeltvlakken te doen heeft, die voldoende nabij de ideale liggen om deze methode te kunnen toepassen, is het geenszins noodig het geheele ternaire smeltvlak eerst te construeeren, zooals nader uit onderstaande mededeeling blijkt.

Men zal kunnen volstaan met de bepaling van eenige beginstol-

¹⁾ Zeitschr. f. Krystall. XXXVIII, Band 6, 588.

punten van mengsels, wier hoofdbestanddeel een der drie isomeren is, en waaraan de twee andere isomeren in zoodanige hoeveelheid zijn toegevoegd, dat hun totaal procentcijfer in het ternaire mengsel steeds gelijk blijft. Zijn dan de beginstolpunten steeds dezelfde, dan kan de methode VALETON worden aangewend.

Welke der hier beschreven methoden in elk concreet geval het beste kan worden aangewend, hangt van de meerdere of mindere gemakkelijheid af, waarmede de stolpunten te bepalen zijn, van de ligging der binaire eutektische punten, van de gemakkelijheid, waarmede de isomeren toegankelijk zijn, alsmede van andere omstandigheden, en moet dus in elk geval afzonderlijk beslist worden.

Amsterdam, org. chem. Lab. d. Univ.

Februari 1910.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt namens den Heer J. J. P. VALETON eene mededeeling aan over: „*De smeltijgtuur bij het stelsel der drie isomere nitranilinen.*”

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGWERFF).

Door VAN LAAR¹⁾ is eene vergelijking afgeleid voor de smeltlijnen in een stelsel van twee componenten, waarbij de volgende onderstellingen werden gemaakt:

1°. Bij afkoeling van een vloeibaar mengsel scheidt zich aanvankelijk een der componenten zuiver af;

2°. de warmte die hierbij vrij komt is gelijk aan de (langs de geheele smeltlijn constante) smeltwarmte van die component, m. a. w. de mengwarmte van het vloeibare mengsel met de vloeibare zuivere component is = 0;

3°. de molekulairtoestand van elke component is in alle vloeibare mengsels dezelfde.

De vergelijking luidt dan²⁾:

$$t = \frac{T}{1 - \frac{RT}{q} l(1-x)} = \frac{T}{1 - \theta l(1-x)}$$

Hierin is t de absolute smelttemperatuur van een mengsel, T de absolute smelttemperatuur van de component die zich het eerst afscheidt, die we steeds de *eerste component* zullen noemen, q de smeltwarmte per

¹⁾ Deze Verslagen Januari 1903.

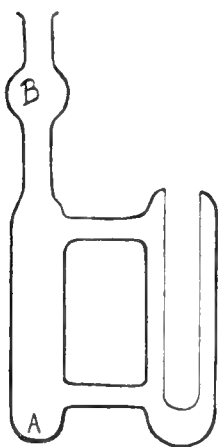
²⁾ Met l wordt hier de natuurlijke of Napiersche logarithme bedoeld.

gr. molecule, $1 - x$ de moleculaire concentratie van deze component, en R de gasconstante. De kromme heeft dus een logaritmisch verloop, dat geheel bepaald wordt door de constanten T en θ . Daar de aard van de tweede component in deze vergelijking niet wordt uitgedrukt, ondergaat het smeltpunt van de eerste component door toevoeging van gelijke hoeveelheden van verschillende stoffen dezelfde verlaging.¹⁾

Later²⁾ heeft VAN LAAR deze theorie uitgebreid tot de stelsels van drie componenten, die aan dezelfde voorwaarden voldoen. De vergelijking voor een ternair smeltvlak wordt dan:

$$t = \frac{T}{1 - \theta l (1 - x - y)}$$

waarin x en y de concentraties van de tweede en derde component voorstellen. Hun som $x + y$ speelt dus hier dezelfde rol als de toegevoegde hoeveelheid x in de binaire stelsels. De smeltvlakken zijn cylindervlakken; immers de isothermen zijn rechte lijnen, evenwijdig aan het overstaande zijvlak van het prisma. Ook hier hangt dus de smeltpuntsverlaging alleen af van de concentratie van de eerste component, onverschillig de verhouding, waarin de beide andere aanwezig zijn.



Een ternair stelsel, dat deze eenvoudige eigenschappen vertoont, is, voorzoover mij bekend, nog nooit bestudeerd. Het is mij nu gebleken, dat *de drie isomere nitranilinen* zulk een stelsel vormen.

De bepalingen werden aanvankelijk gedaan in het toestel van VAN EYK, later in een door Prof. SMITS bedacht en hiernaevens afgebeeld toestelletje, dat deze zoo welwillend was, tot mijne beschikking te stellen.³⁾

De binaire stelsels der nitranilinen.

De bepalingen werden op de bekende wijze van onderkoelen en

¹⁾ D. w. z. in 't algemeen door gelijke *moleculaire* hoeveelheden; bij de hier volgende beschouwingen, waar we steeds met *isomeren* te doen hebben, kunnen we natuurlijk evengoed *gewichts*verhoudingen nemen.

²⁾ Zeitschr. f. phys. Ch. Bd. 55 p. 63.

³⁾ Dit toestel berust op hetzelfde principe als het smeltpuntsapparaat van THIELE. Het wordt gevuld met zwavelzuur dat verwarmd wordt bij A. In het rechtsche been is een buis ingesmolten waarin de stolpuntsbuis geplaatst wordt. Bij B kan nog een thermometer ingebracht worden, om de temp. van het buitenbad af te lezen.

TABEL I. — BINAIRE MENGSELS.

a. Para met ortho.

$$T = 148.0 + 273 = 421.0$$

Nr.	$1-x$	$t-273$	$T-t$	θ_{para}	
33	0.901	141.0	7.0	0.162	
34	0.799	133.1	14.9	0.163	
35	0.699	124.5	23.5	0.165	
36	0.597	115.2	32.8	0.164	
37	0.497	104.2	43.8	0.166	
31	0.402	89.6	58.4	0.176	
40	0.350	81.1	66.9	0.180	
41	0.303	74.2	73.8	0.178	eindstolpunt 55.1
30	0.299	70.4	77.6	0.187	„ 55.6
39	0.250	61.0	87.0	0.188	„ 55.5
29	0.290	55.0	93.0	0.176	

b. Para met meta.

Nr.	$1-x$	$t-273$	$T-t$	θ_{para}	
8	0.904	141.5	6.5	0.155	
9	0.798	133.3	14.7	0.160	
10	0.699	124.9	23.1	0.162	
11	0.600	115.2	32.8	0.165	
12	0.599	103.4	44.6	0.171	
13	0.440	93.8	54.2	0.180	eindstolpunt 89.4
5	0.404	89.6	58.4	0.178	„ 89.5

c. Meta met para.

$$T = 111.8 + 273 = 384.8.$$

Nr.	$1-x$	$t-273$	$T-t$	θ_{meta}	
2	0.897	105.2	5.6	0.136	
3	0.799	100.4	11.4	0.136	
4	0.740	94.4	17.4	0.138	
12	0.697	93.2	18.6	0.141	eindstolpunt 89.7
14	0.687	93.1	18.7	0.136	„ 89.4

TABEL I. (Vervolg). — BINAIRE MENGSELS.

d. Meta met ortho.

Nr.	$1-x$	$t-273$	$T-t$	θ_{meta}	
21	0.893	105.1	6.7	0.157	
22	0.797	99.1	12.7	0.150	
23	0.699	92.6	19.2	0.147	
24	0.599	85.0	26.8	0.146	
25	0.499	76.0	35.8	0.148	
19	0.403	66.0	45.8	0.149	eindstolpunt 51.1
26	0.350	61.0	50.8	0.145	" 50.9
43	0.336	57.8	54.0	0.150	" 51.1
18	0.304	52.0	59.8	0.154	" 50.9

e. Ortho met meta.

$$T = 68.9 + 273 = 341.9$$

Nr.	$1-x$	$t-273$	$T-t$	θ_{ortho}
16	0.899	61.5	7.4	0.208
17	0.800	54.1	14.8	0.203

f. Ortho met para.

Nr.	$1-x$	$t-273$	$T-t$	θ_{ortho}
28	0.897	60.8	8.1	0.223

enten uitgevoerd, en elke bepaling herhaald, totdat twee opeenvolgende bepalingen hoogstens 0.2 verschilden. De waarnemingen zijn samengesteld in tabel I. (zie p. 757).

In de laatste kolom is de constante θ opgenomen, berekend volgens de formule van VAN LAAR. We kunnen deze aldus herleiden :

$$t = \frac{T}{1 - \theta l (1-x)}$$

$$t - t \theta l (1-x) = T$$

$$\theta = \frac{T - t}{-t l (1-x)}$$

Daar $(1-x)$ steeds negatief is, wordt de constante steeds positief. VAN LAAR heeft afgeleid dat de smeltkrommen geen buigpunt vertoonen, indien θ kleiner dan 0.5 is. Dit is bij de smeltlijnen der nitranilinen het geval, zooals uit de tabel blijkt, en de gevonden krommen zijn inderdaad over het geheele verloop met de holle zijde naar de x -as gekeerd.

Bij beschouwing van tabel I, blijkt dat de grootheid θ voor elke curve nagenoeg constant blijft en ook voor elk der beide curven van een zelfde component dezelfde waarde heeft. Het best is de overeenstemming bij de smeltlijnen van para, iets minder goed voor meta; van de orthocurven zijn maar enkele punten bepaald; deze zullen later nog met eenige bepalingen van ternaire mengsels kunnen worden aangevuld.

Bij de curven van para als eerste component en bij die van meta in het stelsel meta-ortho zien we dat de waarde van θ iets toeneemt in de buurt van het eutecticum, in 't bijzonder in het gebied waar de concentratie van de eerste component kleiner dan 50% wordt. Dit laat zich verklaren uit het feit dat de curven voorbij 50% merkbaar steiler gaan loopen, m. a. w. dat $\frac{dt}{dx}$ daar veel grooter wordt. Immers bij de methode van onderkoelen wordt het smeltpunt altijd iets te laag gevonden, omdat er een weinig vaste stof moet afgescheiden worden om de onderkoeling op te heffen; nu is echter door deze afscheiding de vloeistof iets in samenstelling veranderd, zoodat de temperatuur hoogstens nog kan stijgen tot een punt dat iets te laag ligt.

Deze fout hangt direkt samen met de grootte van $\frac{dt}{dx}$, want als er dx vaste stof afgescheiden is, moet het smeltpunt minstens een bedrag dt te laag worden gevonden; de fout wordt dus grooter naarmate de curve steiler loopt.

De bepalingen van tabel I zijn in teekening gebracht in fig. 1, 2 en 3. Beschouwt men daarin de curven van para in fig. 1 en 3, en die van meta in fig. 2, dan ziet men dat de punten voorbij 50% te laag liggen om opgenomen te worden in de vloeiende curve die men door de overige punten en door het eutecticum kan leggen. Immers de temperatuur van een eutecticum kan nauwkeuriger bepaald worden dan de eerste stolpunten van mengsels in de buurt daarvan, doordat bij het tweede stolpunt de temperatuur eenigen tijd constant blijft. We moeten de curven dus in elk geval zoo trekken dat ze elkaar in de eutectische temperatuur snijden. En daaruit blijkt, dat men de kleine stijging

in de waarde van θ (want een te laag stolpunt geeft een te groote θ , blijkens de formule) die in het steilere gedeelte der besproken curven zich voordoet, eerder moet toeschrijven aan toenemende onnauwkeurigheid van de waarnemingsmethode dan dat men moet concluderen tot een minder goede overeenstemming met de formule¹⁾.

Een andere grootte die invloed heeft op de nauwkeurigheid van de waarnemingen is de *smeltwarmte* van elk der componenten. Bij mengsels waarin ortho als eerste component optrad was het duidelijk merkbaar, dat er bij de bepaling der stolpunten een grootere onderkoeling noodig was en dat de thermometer dan na enten langzamer steeg dan bij mengsels met para of meta als eerste component. Dit is het gevolg van het feit dat de smeltwarmte van ortho veel kleiner is dan die van para en meta.

Immers

$$\theta = \frac{2T}{q} \text{ dus } q = \frac{2T}{\theta}.$$

Nu vinden we voor *para*:

$$q = \frac{2 \times 421}{0,16} = \pm 5300 \text{ cal.}$$

voor *meta*:

$$q = \frac{2 \times 385}{0,13} = \pm 5900 \text{ cal.}$$

en voor *ortho*:

$$q = \frac{2 \times 342}{0,21} = \pm 3300 \text{ cal.}$$

De smeltwarmten van para en meta zijn dus ongeveer gelijk, terwijl die van ortho slechts ongeveer $\frac{2}{3}$ van die der anderen is.

Ternaire mengsels der nitranilinen.

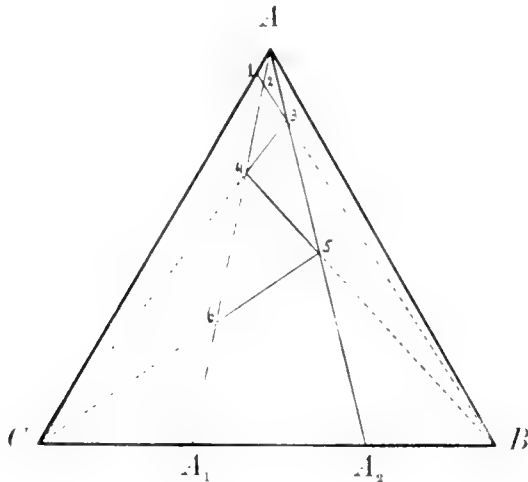
Uit het voorafgaande is gebleken dat de binaire smeltlijnen nagenoeg de gedaante van ideale smeltlijnen volgens VAN LAAR hebben.

¹⁾ De doorgetrokken lijnen in de fig. 1, 2 en 3 komen nagenoeg overeen met de exact geconstrueerde curven onder aanname van de waarden: $t_{para} = 0,16$, $t_{meta} = 0,13$ en $t_{ortho} = 0,21$. Het was aanvankelijk mijn plan, deze constanten als de juiste aan te nemen en de waarnemingen hieraan te toetsen. Maar daar de nauwkeurigheid van de bepalingen toch niet zoo groot is, dat we de volkomen juiste waarden van de t 's kunnen vaststellen en het hier hoofdzakelijk mijn doel is aan te toonen dat het bestudeerde smeltsysteem met vrij groote nauwkeurigheid aan de theorie van v. LAAR beantwoordt, heb ik mij bepaald tot de hier gegeven tabellen en figuren, waaruit dit m. i. duidelijk genoeg blijkt.

Indien zij inderdaad als zoodanig mogen beschouwd worden, heeft men alle reden om te verwachten dat de drie smeltvlakken ook aan de vergelijking van VAN LAAR zullen voldoen.

Dit zal nu in het volgende nader worden aangetoond.

Van elk der drie smeltvlakken werd een reeks punten op de volgende wijze bepaald.



Door het grondvlak ABC van het prisma werden doorsneden bepaald door elk der hoekpunten, dus bijv. van het smeltvlak van A de doorsneden AA_1 en AA_2 . Bepalen we nu elk van deze doorsneden in een afzonderlijke proefreeks dan moeten we, van zuiver A uitgaande, telkens de beide andere componenten in een bepaalde verhouding toevoegen. We kunnen echter de beide doorsneden ineens krijgen door beurtelings C en B toe te voegen.

Nemen we bijv. een mengsel 1, bestaande uit A met bijv. 5% C en voegen daaraan zooveel B toe tot we ongeveer in het punt 2 van de doorsnede AA_1 zijn gekomen. Nu bepalen we het eerste stolpunt van dit mengsel en voegen dan nog zooveel B toe tot we ongeveer in 3 zijn, dat op de doorsnede AA_2 ligt. Nu weer C toevoegen tot 4, op de doorsnede AA_1 , dan weer B tot 5, op de doorsnede AA_2 en eindelijk C tot 6 op de doorsnede AA_1 . Zoo kunnen we met één buis, waaraan telkens een zekere hoeveelheid van een der componenten wordt toegevoegd genoeg bepalingen van een smeltvlak doen.

Op dezelfde wijze wordt dan gehandeld voor de smeltvlakken van B en van C .

Deze bepalingen zijn samengesteld in tabel II. Uit deze bepalingen moet nu blijken dat het eerste stolpunt van een willekeurig ternair mengsel alleen afhangt van de concentratie van de eerste component,

onverschillig de verhouding van de beide andere componenten. Om dit te laten zien zijn in de fig. 4, 5 en 6 alle bepalingen van de tabellen I en II ondergebracht. In fig. 4 vindt men de punten der twee binaire curven van para en verder alle punten van het paravlak die bepaald zijn. In de figuur is dus alleen uitgedrukt de concentratie van para in deze mengsels. Ten opzichte van meta en ortho is hetzelfde te vinden in fig. 5 en fig. 6. Fig. 10 geeft de horizontale projectie van het smeltsysteem, waaruit de ligging van de mengsels van tabel II en de waarschijnlijke ligging van de eutectische lijnen en van het ternaire eutecticum te zien is.

Uit het samenvallen van de ternaire punten met de twee binaire curven en van deze laatste onderling, in verband met de constantheid van θ voor elke component blijktens tabel I, blijkt dus de juistheid van de bewering dat het smeltsysteem der drie nitranilinen vrij goed aan de theorie van VAN LAAR voldoet. Vooral bij het paravlak (fig. 4) is het samenvallen van alle waarnemingen op één curve zeer bevredigend.

De eutectische lijnen.

De drie smeltvlakken snijden elkaar twee aan twee volgens drie eutectische lijnen. Deze werden bepaald en in teekening gebracht volgens eene methode die in de voorafgaande mededeeling is uiteengezet. Van reeksen van mengsels wordt het tweede stolpunt bepaald — evenals het eerste door onderkoelen en enten — en deze stolpunten uitgezet als functie van de verhouding tusschen tweede en derde component. Alle mengsels van één reeks liggen dus op het smeltvlak van één der componenten, degene die in de figuur niet voorkomt. We krijgen zoo dus drie figuren.

De bepalingen zijn samengesteld in tabel III en uitgezet in de fig. 7, 8 en 9. Bij een paar mengsels is het gelukt het ternaire eutecticum als *derde stolpunt* te bepalen. (zie p. 763).

Het is niet zoo heel eenvoudig om deze bepalingen te toetsen aan de formule van VAN LAAR en daar de bepaling van tweede stolpunten bij ternaire mengsels veel minder nauwkeurig is uit te voeren dan die van eerste stolpunten mogen we hier geen zeer groote overeenstemming verwachten; ik heb deze berekeningen daarom hier niet mee gedeeld. Alleen moet er op gewezen worden dat de temperatuur van het *ternaire eutecticum* zeer fraai overeenkomt met de berekening. Nemen we voor de θ 's de volgende waarden aan ¹⁾

¹⁾ Verg. de noot op pag. 760.

TABEL II. — TERNAIRE MENGSELS.

a. Smeltvlak van *para*.

Nr.	Para	meta	ortho	$t-273$
67	0,923	0,020	0,057	152,5
68	0,866	0,080	0,054	138,3
69	0,740	0,068	0,202	127,3
70	0,591	0,245	0,164	113,9
66	0,495	0,127	0,378	103,7
65	0,395	0,152	0,453	89,8
64	0,302	0,176	0,522	70,8

b. Smeltvlak van *meta*.

Nr.	Meta	ortho	para	$t-273$
71	0,857	0,071	0,072	103,4
72	0,703	0,238	0,059	93,4
73	0,593	0,201	0,206	84,7
74	0,500	0,327	0,173	76,5

c. Smeltvlak van *ortho*.

Nr.	Ortho	para	meta	
75	0,906	0,056	0,038	62,1
76	0,859	0,053	0,088	58,6
77	0,803	0,114	0,083	53,9
78	0,735	0,105	0,160	47,4

$$\theta_{para} = 0,16$$

$$\theta_{meta} = 0,13$$

$$\theta_{ortho} = 0,21$$

dan vindt men voor de temperatuur van het ternaire eutecticum¹⁾

¹⁾ De berekening levert voor de samenstelling 12,7% para, 19,1% meta en 68,2% ortho. Deze waarden zijn voor de figuren 7, 8, 9 en 10 gebruikt.

(na aftrek van 273') de waarde $43^{\circ},5$, terwijl gevonden is $43^{\circ},35$. Deze bepaling beantwoordt dus volkomen aan de onderstelling dat het geheele smeltsysteem van de drie nitranilinen de ideale gedaante heeft.

Toepassingen.

Indien een ternair stelsel een ideaal smeltsysteem levert, zooals aan de nitranilinen is gedemonstreerd, kan men eene belangrijke vereenvoudiging brengen in de methode tot het bepalen van de samenstelling van ternaire mengsels die door den heer v. D. LINDEN in de voorafgaande mededeeling is uiteengezet.

Men kan nu namelijk uit een eerste stolpunt direkt het gehalte aan de eerste component aflezen uit de binaire smeltlijn van die component en vervolgens het gehalte aan een van de andere componenten bepalen door zooveel zuivere stof toe te voegen dat het mengsel op het smeltvlak van die component gebracht wordt en dan weer het eerste stolpunt te bepalen.

Eenige voorbeelden, uitgewerkt aan kunstmengsels, zullen dit nader toelichten en tevens het bewijs leveren, dat mengsels van de drie isomere nitranilinen met vrij groote nauwkeurigheid volgens deze methode kunnen geanalyseerd worden.

Voorbeeld I.

3,091 gr. van het mengsel werd in een stolpuntsbuis gebracht en bleek bij ongeveer 115° te smelten. Nu werd een nauwkeurige bepaling van het stolpunt gedaan, die $115^{\circ},2$ opleverde. Daar dit punt hooger ligt dan de smeltpunten van zuiver meta en zuiver ortho moet het mengsel op het paravlak gelegen zijn. Uit tabel *Ia* of *b* kunnen we het gehalte aan para vinden. Toevallig blijkt het stolpunt $115^{\circ},2$ in beide tabellen voor te komen, resp. met 59,7 en 60% para, zoodat interpoleren hier niet noodig is. Nemen we het gemiddelde, dan komen we op 59,85% para. Ter controle werd bij dit mengsel 2,066 gr. zuiver para gevoegd. Het eerste stolpunt werd nu $129^{\circ},9$. Door interpolatie tusschen de waarnemingen 34 en 35 of 9 en 10 krijgen we gemiddeld 76,0% para. De interpolaties zijn hier en ook verder lineair uitgevoerd. Nog iets nauwkeuriger maar veel bewerkelijker is het om de waarde van θ aan de tabel te ontleenen en dan door de formule van v. LAAR het gehalte uit te rekenen.

Het laatste mengsel van $3,091 + 2,066 = 5,157$ gr. bevat dus aan para:

$$0,76 \times 5,157 = 3,919 \text{ gr.}$$

TABEL III. — EUTECTISCHE LIJNEN.*a. Mengsels met para als 1e component.*

Nr.	meta	ortho	2e stolpunt	3e stolpunt
	1,000		89,7	
44	0,849	0,151	83,2	
45	0,690	0,301	76,6	
46	0,550	0,450	67,4	
47	0,402	0,598	53,6	
50	0,299	0,701	?	43,35
49	0,202	0,798	244,6	43,35
48	0,117	0,883	59,1	
		1,000	55,6	

b. Mengsels met meta als 1e component.

Nr.	para	ortho	2e stolpunt	3e stolpunt
	1,000		89,7	
51	0,850	0,150	85,8	
52	0,700	0,300	81,4	
53	0,545	0,455	74,5	
58	0,451	0,549	67,4	
59	0,350	0,650	57,5	
57	0,280	0,720	51,5	
55	0,201	0,799	?	42,9
56	0,201	0,799	?	43,1
54	0,097	0,903	47,4	
		1,000	51,1	

c. Mengsels met ortho als 1e component.

Nr.	para	meta	2e stolpunt	3e stolpunt
	1,000		55,6	
63	0,868	0,132	54,2	
62	0,647	0,353	50,5	
61	0,309	0,691	45,1	
60	0,146	0,854	48,7	
		1,000	51,1	

In het oorspronkelijke mengsel was dus

$$3,919 - 2,066 = 1,853 \text{ gr. para}$$

of

$$\frac{185,3}{3,091} = 59,9^{\circ}$$

Van hetzelfde mengsel werd 0,550 gr. afgewogen en hieraan 1,021 gr. meta toegevoegd. Het beginstolpunt was nu $93^{\circ},2$. Uit tabel I vinden we $70,25\%$ meta. Het laatste mengsel bevat dus

$$0,7025 \times 1,571 = 1,104 \text{ gr. meta}$$

dus het oorspronkelijke mengsel

$$1,104 - 1,021 = 0,083 \text{ gr. meta}$$

of

$$\frac{8,3}{0,550} = 15,1\%$$

Het gehalte aan ortho werd ter controle nog eens afzonderlijk bepaald:

Bij 0,334 gr. mengsel werd 2,173 gr. zuiver ortho gevoegd en van dit nieuwe mengsel het eerste stolpunt bepaald op $61^{\circ},5$. Dit geeft $89,9\%$ ortho, dus

$$0,899 \times 2,507 = 2,254 \text{ gr. ortho.}$$

Het oorspronkelijke mengsel bevatte dus

$$2,254 - 2,173 = 0,081 \text{ gr. ortho}$$

of

$$\frac{8,1}{0,334} = 24,2\% \text{ ortho}$$

Wij hebben dus:

werkelijke samenstelling:	analyse:
para 60,0%	59,9%
meta 15,2	15,1
ortho 24,8	24,2
<hr/> 100,0%	99,2%

Voorbeeld II.

Van een mengsel werd 1,457 gr. afgewogen. Uit een ruwe bepaling bleek dat het smeltpunt bij 85 à 87° lag. (Een nauwkeurige bepaling kan men niet doen voor men weet welke component men moet enten: men kan daartoe echter altijd te werk gaan zoals bij Voorbeeld III zal worden beschreven, dus Voorbeeld II is noodeloos omslachtig behandeld.) Er werd nu 0,080 gr. para toegevoegd om te zien of hierdoor het smeltpunt verhoogd of verlaagd werd. Dit was door een ruwe bepaling (zonder enten dus) niet duidelijk te zien. Daarom werd deze buis terzijde gelegd en in een nieuwe 0,430 gr. mengsel met 1,300 gr. para afgewogen. Nu was het eerste stolpunt $135^{\circ},9$ waaruit we met hulp van tabel I een gehalte

van 83,5% para afleiden. Hieruit berekent men gemakkelijk dat het oorspronkelijke mengsel bevat **33,5** % para.

Nu werd bij de eerste buis, die reeds 1,457 gr. mengsel en 0,080 gr. para bevatte, nog 1,504 gr. meta gevoegd. Dit gaf een stolpunt van 89°,3, waaruit volgt 65,2 % meta. Men vindt hieruit voor het oorspronkelijke mengsel **32,9** % meta.

Het gehalte aan ortho werd bepaald door bij 0,274 gr. mengsel 1,593 gr. ortho te voegen.

Eerste Stolpunt: 61°,7 waaruit volgt 90,2 % ortho. Dit geeft voor het oorspronkelijke mengsel **33,2** % ortho.

Werkelijke samenstelling:		Analyse:
para	34,2 %	33,5 %
meta	32,8	32,9
ortho	33,0	33,2
	100,0 %	<hr/> 99,6 %

Voorbeeld III.

Bij de vorige voorbeelden werd aan het onbekende mengsel eerst een ruwe bepaling van het smeltpunt gedaan. Dit is niet noodig. Men kan altijd de analyse uitvoeren in twee bepalingen, de een met een overmaat zuiver para, de ander met een overmaat zuiver meta. Ter controle kan een derde bepaling met veel ortho uitgevoerd worden. Van belang is, dat op deze wijze de analyse reeds uitgevoerd kan worden als men over een kleine hoeveelheid van het mengsel beschikt, bijv. 1 gram. Men maakt dan twee porties, voegt bij de een 2 gr. para en bij de ander 2 gr. meta en bepaalt de eerste stolpunten.

0,474 gr. mengsel met 1,466 gr. para had een beginstolpunt 133°,4, waaruit volgt 80,3 % para. Het oorspronkelijke mengsel bevat dan **19,4** % para.

0,557 gr. mengsel met 1,151 gr. meta gaf een beginstolpunt 97°,1. Dit beteekent 75,8 % meta; hieruit volgt voor het oorspronkelijke mengsel **25,8** % meta.

0,543 gr. mengsel met 1,352 gr. ortho had een beginstolpunt van 59°,3, waaruit volgt 87,0 % ortho; hieruit berekent men voor het oorspronkelijke mengsel **54,7** % ortho.

Werkelijke samenstelling:		Analyse:
para	19,9 %	19,4 %
meta	25,6	25,8
ortho	54,5	54,7
	<hr/> 100,0 %	<hr/> 99,9 %

Uit deze voorbeelden blijkt de graad van nauwkeurigheid waarmee de methode hier toe te passen is.

Aan het eind gekomen van de bespreking van dit onderwerp is het mij een aangename plicht mijn dank te betuigen aan Prof. HOLLEMAN, op wiens aanraden ik dit onderzoek ter hand nam en die mij welwillend in de gelegenheid stelde het in zijn laboratorium uit te voeren.

Amsterdam, Februari 1910.

Scheikundig laboratorium der Universiteit.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N^o. 114 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden : PIERRE WEISS en H. KAMERLINGH ONNES: „*Onderzoekingen over de magnetisatie bij zeer lage temperaturen.*”

§ 1. *Doel van het onderzoek, uitkomsten.*

a. Inleiding. De uitbreiding van de kinetische theorie van het magnetisme, die LANGEVIN¹⁾ opgesteld heeft, tot het geheel der ferromagnetische verschijnselen met behulp van de hypothese van het moleculaire veld²⁾ maakte het van groot belang de uitkomsten dier theorie aan proefondervindelijke gegevens te toetsen. De eerste uitkomsten van deze vergelijking waren zeer bemoedigend. In sommige opzichten toch werd eene merkwaardige overeenstemming gevonden. Zoo komt de berekende kromme voor de intensiteit der magnetisatie bij verzadiging in functie van de temperatuur zeer goed overeen met die, welke voor magnetiet bij temperaturen boven de gewone gevonden werd. Verder wordt de wet voor de susceptibiliteit *boven* het CURIE-punt³⁾, volgende uit de hypothese van het moleculaire veld, nauwkeurig over een temperatuurgebied van verscheidene honderdtallen van graden bevestigd door de proeven van CURIE en door waarnemingen, die eerlang zullen worden gepubliceerd. Eindelijk zijn de sprongen in

1) LANGEVIN. Ann. Chim. et Phys. 8 Sér. t. 5, p. 70; 1905.

2) P. WEISS. Journ. de Physique 4e Sér. t. VI, p. 661; 1907.

3) In deze Mededeeling zullen wij den naam CURIE-punt geven aan de temperatuur, waarbij het spontaan ferromagnetisme verloren wordt. Hierin ligt geenerlei tegenspraak met het door CURIE uitgesproken denkbeeld, dat de temperatuur van transformatie eene functie van de veldsterkte is, daar de temperatuur waarbij het *spontaan* ferromagnetisme verloren gaat, die is, welke men vindt door het veld tot nul te doen naderen.

de specifieke warmte bij het CURIE-punt in overeenstemming met de waarden, die daarvoor uit de magnetische gegevens berekend kunnen worden. Maar andere waarnemingen stemmen minder goed met de theorie overeen. Fig 1, Pl. I waarin de theoretische kromme voor de verandering van de magnetisatie bij verzadiging als functie van de temperatuur door een getrokken lijn *a* aangegeven is, bevat verder de waarnemingen betreffende magnetiet en de analoge kromme *b* voor de waarnemingen bij nikkel ¹⁾. De laatste kromme is op zulk een schaal geteekend, dat zij met de theoretische bij het CURIE-punt zoo goed mogelijk overeenstemt. In tegenstelling met wat bij magnetiet gevonden wordt, vertoont nikkel over de geheele kromme eene geleidelijk toenemende afwijking. IJzer en cobalt gedragen zich nagenoeg als nikkel. Wanneer men op dit alles let, dan krijgt de hypothese van het moleculaire veld het karakter van eene werkhypothese; de gedeeltelijke bevestiging wijst er op, dat die hypothese een kern van waarheid bevat en uit de afwijkingen zal men hebben af te leiden, hoe men haar met behoud van het wezenlijke heeft te wijzigen of uit te breiden.

Het is niet waarschijnlijk, dat deze wijzigingen de rol zullen aantasten, die aan de kinetische energie wordt toegeschreven als zich verzettende tegen het richten van het veld, of wel dat zij zullen strijden met de wijze waarop gebruik gemaakt wordt van de verdelingswet van MAXWELL-BOLTZMANN. Behalve dat deze voorstellingen van fundamenteele beteekenis zijn, worden zij ons ook nog opgedrongen door de ongedwongen wijze waarop zij rekenschap geven van de omgekeerde evenredigheid van de susceptibiliteit met de absolute temperatuur bij paramagnetische stoffen, een der, voor tal van stoffen, proefondervindelijk het best vastgestelde wetten. Wel is waar hebben H. DE BOIS en HONDA door hunne belangrijke onderzoekingen over de magnetisatie der elementen, waarvan zij in de laatste Zitting een overzicht hebben gegeven ²⁾, pas aangetoond, dat deze wet voor de afhankelijkheid van de susceptibiliteit van de temperatuur niet algemeen geldt en dat men ook paramagnetisme vindt, dat van de temperatuur onafhankelijk is of met stijgende temperatuur aangroeit. Maar het is er verre van af, dat de aangevoerde voorstellingen daarom verworpen zouden moeten worden; wat de proefneming in dit geval leert, wijst er alleen op, dat die voorstellingen niet voldoende zijn om het magnetisme geheel te verklaren. In 't bijzonder zal de hypothese van LANGEVIN, dat het magne-

¹⁾ Volgens voorloopige waarnemingen. Aan definitieve waarnemingen over de drie metalen en magnetiet wordt gewerkt.

²⁾ Zittingsversl. Jan. 1910, Deel XVIII, p. 666.

fisch moment van het molecuul onveranderlijk of althans quasi onveranderlijk is, alsook die omtrent den aard der onderlinge werking der moleculen, welke tot nog toe door het invoeren van het moleculaire veld werd uitgedrukt, herziening eischen. Voor de beoordeeling van de eene zoowel als van de andere hypothese zijn onderzoekingen bij zeer lage temperatuur van bijzonder veel waarde.

Want alleen bij het absolute nulpunt geeft de magnetisatie, daar de warmtebeweging haar dan niet meer belet haar volle bedrag te verkrijgen, de som der moleculaire magnetische momenten. En bij de lage temperaturen is ook de sterkste uiting van de onderlinge werking der moleculen te verwachten, omdat deze elkaar dan tot op uiterst kleine afstanden naderen.

b. Ferromagnetische stoffen. Wij hebben ons derhalve ten doel gesteld de krommen, die de magnetisatie als functie van de temperatuur aangeven, voor de drie ferromagnetische metalen en voor magnetiet tot in de nabijheid van het absolute nulpunt voort te zetten. Daar wij over de methoden en hulpmiddelen beschikten ¹⁾ om lang voortgezette nauwkeurige metingen bij standvastige temperaturen in het gebied van die van vloeibare waterstof te verrichten, hebben wij bij onze metingen met behulp van waterstof kokende onder atmosferischen druk tot 20°K. en met behulp van waterstof bij het smeltpunt tot 14° K. af kunnen dalen. Op de schaal der absolute temperaturen is het aantal graden, die deze waarnemingstemperaturen scheiden van het absolute nulpunt, slechts zulk een klein breukdeel van dat, hetwelk den afstand van het absoluut nulpunt tot het CURIE-punt uitdrukt, — zelfs voor nikkel bedraagt die afstand nog ongeveer 648 Kelvingraden — dat men, lettende op den loop der krommen, door onze waarnemingen de magnetisatie bij verzadiging bij het absoluut nulpunt bepaald mag achten. Dit alles natuurlijk onder voorbehoud, dat het verschijnsel in het gebied waarheen geëxtrapoleerd wordt niet tot beschouwing uit een ander gezichtspunt aanleiding geeft.

Daar het doel der meting het bepalen van de magnetisatie bij verzadiging was, scheen het aangewezen de proeven te richten op het verkrijgen van gegevens over de magnetisatie bij hooge veldsterkten en aan de hand daarvan de wet, volgens welke de magnetisatie tot hare grenswaarde nadert, te zoeken. Maar de voor de magnetische metingen gekozen methode, die bestaat in het bepalen van de maximum waarde van het koppel, door een magnetisch veld van veranderlijke richting op een ellipsoïd van de te onderzoeken stof

¹⁾ H. KAMERLINGH ONNES. Zitt.verslag Juni 1906. Comm. fr. the Leyden Laborat. N^o. 94f.

(zie § 2) uitgeoefend, was, zooals nader uiteengezet zal worden, minder geschikt voor deze bepaling van de naderingswet dan voor de vergelijkingen van de magnetisaties, die de stof in een zelfde veld bij verschillende temperaturen aanneemt. De gegevens voor de naderingswet zijn dus tot het onderwerp van een afzonderlijk onderzoek gemaakt.¹⁾

Dit heeft voor het verschil van de magnetisatie in een veld van 10000 gauss en die in het limiet geval gegeven bij

ijzer	0,08	percent
nikkel	0,1	„
cobalt in weeken toestand	1,1	„
magnetiet	0,19	„

Bij deze stoffen geschiedt de nadering in functie van de veldsterkte volgens een hyperbool, zoodat bij 20000 gauss, welke veldsterkte bij onze proeven bereikt werd, de opgegeven verschillen tot op de helft teruggebracht worden. De waarnemingen, bij verschillende waarden van het veld met de ellipsoidmethode bij lage temperatuur en bij gewone temperatuur verricht, hebben wel is waar niet veroorloofd de naderingswet te controleeren, maar zij toonden voldoende aan, dat er in dit opzicht bij de beide temperaturen geen wezenlijk verschil bestaat en dat niet, zooals zeer goed ondersteld kon worden, bij lage temperaturen de magnetische hardheid een buitensporige waarde verkrijgt doordat de moleculen elkaar in het zich richten belemmeren.

Met behulp van relatieve metingen is derhalve voor verscheidene veldsterkten van hoog bedrag de magnetisatie bij gewone en bij lage temperatuur vergeleken en werd gevonden, dat de verhouding van beide vrij wel onafhankelijk van het veld is. Zoo verkregen wij voor de verhouding van de intensiteit van magnetisatie bij 20° K. en bij de gewone temperatuur, van

nikkel	(17°.3 C.)	1.0546
ijzer	(20° C.)	1.0210
magnetiet	(15°.5 C.)	1.0569

Tusschen haakjes is het juiste bedrag der gewone temperatuur aangegeven. In § 5 wordt vermeld waarom de proeven bij cobalt niet tot eene uitkomst gevoerd hebben.

Het is moeilijk juist op te geven hoever de nauwkeurigheid van deze uitkomsten gaat. De experimenteele techniek was in alle deelen zoo uitgewerkt, dat eene nauwkeurigheid tot op een duizendste en

¹⁾ P. WEISS, Arch. des Sc. phys. et nat. fevrier 1910 et Journ. de Phys. 4e Sér. t. IX. mars 1910.

zelfs een hoogere verwacht kon worden. Maar als men let op de storingen, die zich bij de proeven met cobalt hebben voorgedaan, dan schijnt het onvoorzichtig — en dit geldt wel in 't bijzonder van de metingen betreffende magnetiet — om aan de uitkomsten een grootere nauwkeurigheid dan tot op 0,5 percent toe te schrijven, al ontbraken bij de andere stoffen ook bijna geheel de aanwijzingen, die de juistheid der metingen betreffende het cobalt in verdenking hebben gebracht en al staat het cobalt door het geheel zijner eigenschappen en in 't bijzonder door zijn buitengewoon groote magnetische hardheid duidelijk op zichzelf. Onze proeven geven, daar zij deze oorzaken van onzekerheid aanwijzen, den weg aan om, desgewenscht, tot een hoogere nauwkeurigheid te geraken. De thans bereikte nauwkeurigheid is overigens voldoende voor de behandeling van verscheidene vragen.

Bij ijzer en magnetiet zijn metingen tot bij 14° K. verricht. De verandering van de magnetisatie tusschen 20° K. en 14° K. is te gering om door getallen te worden uitgedrukt. De proeven bij het smeltpunt van waterstof breiden dus enkel het gebied van temperatuur, waar binnen de vermindering van de kinetische energie en de nadering der molekulen tot elkaar geen enkel nieuw verschijnsel te voorschijn roepen, naar beneden tot 14° K. uit.

De nieuw verkregen deelen van de krommen voor nikkel en magnetiet zijn in fig. 1 Pl. I gestippeld.

Het geval van magnetiet is van bijzonder belang wegens de volkomen overeenstemming van waarneming en theorie over het grootste deel van het gebied tusschen het CURIE-punt en het absolute nulpunt en wegens het uitsluitend bij lage temperatuur optreden van een afwijking tusschen beide krommen. Hier geeft de theorie voor de verhouding tusschen de magnetisaties 1.139 in plaats van de boven gegeven verhouding 1.057. De uitkomst, dat theorie en waarneming duidelijk afwijken, wordt gesteund door vroegere waarnemingen betreffende vier monsters van verschillende soorten magnetiet, twee afkomstig van natuurlijke kristallen, het derde van een omgesmolten natuurlijk kristal en het vierde van kunstmatig magnetiet. Deze hebben voor de verhouding van de magnetisatie bij de temperatuur van vast koolzuur (-79° C.) en die bij de gewone temperatuur gegeven:

1.033	gewone temperatuur 16° C.
1.042	$23^{\circ}.2$
1.042	24°
1.037	$21^{\circ}.5$
gemiddelde 1.039	$21^{\circ}.2$ C.

terwijl de theorie voor dezelfde temperaturen geeft 1.053.

Er schijnt dus analogie te bestaan met de samendrukbaarheid en de uitzetting door warmte, voor welke de theorie van VAN DER WAALS en diens wet der overeenstemmende toestanden in de nabijheid van het kritisch punt in den regel beter bevestigd worden dan bij lage gereduceerde temperaturen, waarbij het geschematiseerde molecuul en de geschematiseerde attractie de verschijnselen niet meer voldoende dekken en de verschillen in individueele eigenschappen der werkelijke moleculen tot uiting komen.

Het zou voor de hypothese, dat de moleculaire magneten in wezen onveranderlijk zijn, een bijzonder afdoende steun geweest zijn indien — gelijk dit met regelmatige verschillen opklommen van de magnetisatie bij verzadiging van de drie metalen kan doen vermoeden — er eenvoudige betrekkingen tusschen de magnetische momenten per atoom gerekend bestonden.

De volgende tabel

	Specif. verzadiging bij de temp. (° C.).	vergrooting bij overgang tot lage temp.	specif. verzadiging bij lage temp.	atoom gewicht of $\frac{1}{3}$ molec. g.	moment van het gramatoom
Ni	54.6 (17° C.)	1.0553	57.7	58.7	3382
Co	162 ()	1.01	163.6	59	9650
Fe	217 (20° C.)	1.020	221.6	56	12410
FeO $\frac{1}{3}$	90.75 (15° 8 C.)	1.057	95.9	77.33	7417

waarvan de getallen in de eerste kolom ontleend zijn aan de boven aangehaalde verhandeling ¹⁾ en waar de relatieve vermeerdering van cobalt geschat is naar analogie met ijzer en nikkel, bewijst dat dit niet het geval is.

Hierbij moet niet uit het oog worden verloren, dat al ontsnapt ons ook het bewijs langs dezen weg, dat de genoemde grootheid van primordiale beteekenis is, er toch niets is, dat een tegenovergestelde gevolgtrekking zou wettigen ²⁾.

¹⁾ P. Weiss, Arch. des Sc. phys. et nat. et Journ. de Phys. 1910.

²⁾ Wanneer wij letten op het geheel onzer metingen, zoo blijven wij geneigd vast te houden aan de hypothese, dat bij de ferromagnetische stoffen het magnetische atoom op zich zelf niet met de temperatuur verandert. Er waren wel redenen om de vraag te stellen, of deze onveranderlijkheid, gesteld, dat zij overigens bewezen was, ook bij uiterst lage temperaturen zou blijven bestaan. De galvanische weerstand der metalen, de phosphorescentie der zwavelverbindingen, de absorptie van het licht door de zouten der zeldzame aarden met of zonder veld, vertoonen bij zeer lage temperaturen eigenaardigheden, die men kan trachten te verklaren

c. *Vanadium, chroom, mangaan*. Men heeft zich dikwijls afgevraagd of er een niet te overbruggen verschil tusschen de ferromagnetische metalen van de ijzergroep eenerzijds en de paramagnetische van dezelfde groep anderzijds bestaat, dan wel de laatste door voldoende verlaging van temperatuur een zeer laag gelegen CURIE-punt zouden bereiken.

CH. ED. GUILLAUME¹⁾ zegt naar aanleiding van de alliages van Mn, Al, Cu en van Mn, Sn, Cu van HEUSLER, die ferromagnetisch zijn: De reden er van kan hierin gevonden worden, dat het aluminium of het tin in verbinding met het mangaan, het metaal uit de magnetische groep, de transformatietemperaturen er van, die in overeenstemming met een reeds door FARADAY uitgesproken hypothese zeer laag zouden liggen, verhoogden. Men kan inderdaad opmerken, dat Al en Sn de smeltpunten van verschillende alliages, welke zij met andere metalen aangaan, doen stijgen (de reeks van Al—Au, Al—Sb, Na—Sn) en geheel in 't algemeen de eigenschap schijnen te bezitten om transformatie temperaturen te verhoogden.

Wij mochten dus verwachten dat vanadium, chroom en mangaan bij zeer lage temperaturen of wel ferromagnetische eigenschappen (niet evenredigheid van de magnetisatie aan de veldsterkte, verzadiging, hysteresis) of wel een overeenkomstig de wet van CURIE sterk vergroot paramagnetisme zouden vertoonen. Bij de temperatuur van stollende waterstof moest volgens deze wet de susceptibiliteit ongeveer 20 maal grooter zijn dan bij de gewone temperatuur²⁾. Wij kenden toen nog

door ze toe te schrijven aan krachten, door de ponderabele stof op de electronen uitgeoefend, krachten, die dan op den voorgrond zouden moeten treden, wanneer de temperatuur tot bij die van de vloeibare waterstof daalt, en die in het bijzonder de electronen, welke in de metalen den stroom overbrengen, bij zeer lage temperaturen een belangrijke vermindering in aantal zouden moeten doen ondergaan, door ze bij die temperaturen aan de atomen onwrikbaar te binden en als 't ware te doen vastvriezen. (Verg. H. KAMERLINGH ONNES Comm. fr. the Leyden labor. Suppl. n^o. 9, p. 27 1904 en P. LENARD, H. KAMERLINGH ONNES en W. E. PAULI, Zitt. Versl. Juni 1909, Comm. fr. the Leyden Laborat. n^o. 111, p. 3, note 2 1909). Het zou in dezen gedachtengang mogelijk zijn, dat ook de bewegingen der electronen, die het magnetisme geven, terwijl zij bij andere temperaturen onveranderlijk waren, bij zeer lage temperaturen eene verandering begonnen te vertoonen.

Voor de beoordeeling van de zooveen genoemde voorstelling omtrent de aangehaalde verschijnselen en voor het onderscheiden van de groep van electronen, die het magnetisme geven, van groepen, die voor andere verschijnselen van belang zijn, is het negatieve resultaat, dat ook bij de allerlaagste temperaturen niets geschiedt, wat de onveranderlijkheid van het magne'isch atoom zelf in twijfel zou doen trekken, misschien niet zonder belang.

¹⁾ CH. ED. GUILLAUME. Actes de la Soc. helv. der Sc. nat. Vol. I p. 88. 1907.

²⁾ Een dergelijke onderstelling is het punt van uitgang geweest van een met het in

niet de uitkomsten, die de vorige maand door H. DE BOIS en HONDA ¹⁾ zijn medegedeeld, waarnaar volgt, dat het paramagnetisme omgekeerd evenredig aan de absolute temperatuur slechts een der mogelijke gevallen is. Om een denkbeeld te krijgen van de orde van grootte der te verwachten verschijnselen kan men zich voorstellen, dat het paramagnetische γ ijzer bij 14° K. nog bestaat met dezelfde constante van CURIE (product van de absolute temperatuur en susceptibiliteit). Dan vindt men voor de magnetisatie daarvan in een veld van 20000 Gauss ongeveer 400.

GEHARDT ²⁾ heeft onlangs de susceptibiliteit van mangaan bij de gewone temperatuur bepaald en gevonden $K = 322.10^{-6}$ (dichtheid 6.4). De zooeven gevolgde berekening geeft voor deze stof in dezelfde omstandigheden een magnetisatie van 134. En daar de uitwijkingen in onzen toestel evenredig zijn aan het vierkant van de magnetisatie, zou men een 18 of 160 maal kleiner uitwijking vinden dan bij ijzer op de gewone temperatuur. Daar deze 100 cm. bedroeg, zou zij dus nog zeer goed af te lezen zijn.

Toen wij nu achtereenvolgens in den toestel raw weg gevormde ellipsoiden van vanadium van MOISSAN en van chroom en mangaan van GOLDSCHMIDT brachten, deed zich een zeer merkwaardig verschijnsel voor. De uitwijking bleef in alle gevallen, bij de temperatuur van stollende waterstof zoowel als bij die van waterstof kokende onder atmosferischen druk, wat zij was bij de gewone temperatuur, d. w. z. eenige tiende millimeters. Deze zijn te wijten aan het magnetisme van de ophangingsinrichting. Er was dus geen sprake van ferromagnetisme en wij moesten voor deze stoffen kiezen tusschen de volgende twee hypothesen.

Wij hadden te doen, of wel met paramagnetisme van een nieuwe soort of wel met diamagnetisme, dat ook bij koper optreedt, terwijl toch de meeste zouten van dit metaal paramagnetisch zijn. De verhandeling van DEBOIS en HONDA, waarin deze drie metalen voorkomen onder degenen, wier paramagnetisme met de temperatuur aangroeit of onveranderlijk is, leert dat de eerste onderstelling de juiste is.

deze Med-deeling vervatte nauw samenhangend en gelijktijdig daarmee opgevat onderzoek van H. KAMERLINGH ONNES en A. PERRIER, dat weldra gepubliceerd zal worden. Volgens de methode van het maximum koppel en van de hydrostatische opstijging werden de magnetisaties van vloeibare zuurstof bij verschillende temperaturen en die van vaste zuurstof bij de temperaturen van kokende en stollende waterstof gemeten. De toename der magnetisatie bij de lage temperaturen bleek zeer sterk, doch niet zoo sterk als verwacht was, en er werd eene duidelijke afwijking van de wet van CURIE met een eigenaardig verloop gevonden

¹⁾ H. de Bois en Honda l. cit.

²⁾ Gehardt. Inaug. Dissert., Marburg 1909.

Het geval van koper deed ons de andere hypothese aannemelijk achten.

Men kon immers onderstellen dat het in 't algemeen aan het metallisch mangaan toegeschreven paramagnetisme het gevolg was van de aanwezigheid van zijn oxyden, die sterk magnetisch zijn, of van kleine hoeveelheden ijzer. Om deze hypothese op de proef te stellen hebben wij, uitgaande van zuiver chloruur van MERCK, waarvan de ijzervrijheid was aangetoond, zeer zuiver mangaan bereid door het zout aan electrolyse te onderwerpen tusschen een kathode van gedistilleerd kwik en een anode van iridium met 43% rhodium, welke niet door het chloorion wordt aangetast. Het op deze wijze verkregen amalgaam is in een stroom van zuivere drooge waterstof ontleed. Op die wijze wordt een grijs poeder verkregen, dat tot een vrij stevig staafje samenbakt wanneer het amalgaam in een glazen buis als vorm wordt geperst. Een staafje op deze wijze vervaardigd vertoonde paramagnetisme.

Ook een glazen buisje met poedervormig mangaan was paramagnetisch. Hetzelfde mangaan is daarop in den electrischen weerstandsoven gesmolten, in een schuitje van magnesia en een atmosfeer van waterstof. Zoo werd een gietstuk verkregen, dat met een licht geoxydeerde korst was bedekt. Het bleek onmogelijk deze met kwarts-poeder weg te slijpen, daar zij dezelfde hardheid als kwarts had. Amaril kon niet gebruikt worden omdat het magnetisch is. De onzuivere korst is daarop met een diamanten werktuigje afgedraaid, zoodat een cylindertje van zuivere stof werd verkregen.

Dit cylindertje bleek *ferromagnetisch* te zijn. Fig. 2 Pl. I geeft een hysteresecyclus van deze stof. De maximum waarde van de specifieke magnetisatie is ongeveer 100 maal zwakker dan van ijzer en het coëcitiëveld is 670 gauss, d.w.z. 10 maal sterker dan dat van voor het vervaardigen van permanente magneten zeer geschikt staal. Deze vreemdsoortige stof schijnt bovendien in 't oogvallend magnetokristalijne eigenschappen te hebben. Tusschen de polen van een magneet werd het staafje sterk aangetrokken, terwijl het zich loodrecht op de veldrichting stelde.

Mangaan van denzelfden graad van zuiverheid kan dus in twee toestanden voorkomen: paramagnetisch en ferromagnetisch. Uit de proeven van GEBHARDT vindt men een vijfmaal sterker susceptibiliteit dan die door DU BOIS werd waargenomen. Wanneer GEBHARDT's poeder dus niet onzuiver of geoxydeerd is geweest, is het mogelijk, dat er twee paramagnetische toestanden bestaan.

Wat het ferromagnetisme van mangaan betreft, dit werd reeds waargenomen door SECKELSON¹⁾ bij electrolytisch mangaan, dat bij

¹⁾ SECKELSON, Wied. Ann. t. LXVII, p. 37, 1899.

100° C. nit chloruur op een platinadraad was afgezet en bij een regulus, door BUNSEN, nitgaande van fluormangaan, bereid. De vrij onbestemde waarnemingen, die hij omtrent de magnetisatie mededeelt, zijn niet onvereinigbaar met onze metingen.

Wij hebben de afwezigheid van sterk magnetisme in vanadium, chroom en mangaan bij lage temperatuur door een meer directe proef gecontroleerd. Wij brachten daartoe de ellipsoiden der drie stoffen in een nauwe niet verzilverde vacuumbuis met uiterst geringen afstand tussehen de beide wanden, gestoken in een tweede dergelijke eveneens zoo nauw mogelijke met vloeibare lucht gevulde, en gingen na op welken afstand van de polen de ellipsoiden van den bodem af naar de polen van den magneet werden getrokken. Deze proef werd gedaan de eene maal terwijl de binnenbuis ledig, de andere maal terwijl de binnenbuis met vloeibare waterstof gevuld was.

Wij vonden voor:

	bij gewone temperatuur	in vloeibare waterstof
vanadium	geen aantrekking	
mangaan	aantrekking op 6 à 8 mm.	als bij
chroom <i>a</i>	„ „ 12 „	gewone
<i>b</i>	„ „ 60 „	temperatuur.

Chroom *b*, dat waarschijnlijk een splintertje ijzer bevat, moet verworpen worden.

Verder werd gevonden voor een

kristal van ferrosulfaat	aantrekking bij 25 mm.	aantrekking van af bijna den voet van den magneet
--------------------------	------------------------	---

Zoo is dus de zwakke magnetisatie der drie metalen vrij wel onveranderlijk gebleken, terwijl het ferrosulfaat een zeer groote toename der magnetische eigenschappen vertoonde.

Deze proef is wel geschikt om het karakteristiek verschil van de twee groepen van stoffen in het licht te stellen en een typisch voorbeeld van de beteekenis, die ook de allereenvoudigste proeven op het onontgonnen gebied der zeer lage temperaturen kunnen hebben.

§ 2. Methode en toestellen.

a. Discussie van de methode van het maximumkoppel. Wij hebben de intensiteit van magnetisatie gemeten door het koppel te bepalen,

dat op een langwerpige omwentelingsellipsoid van de te onderzoeken stof wordt uitgeoefend door een onder veranderlijken hoek met de groote as van het ellipsoid stelbaren electromagneet. De uitdrukking voor het koppel is

$$M = (N_1 - N_2) I^2 v \sin \varphi \cos \varphi$$

waar N_1 en N_2 de coëfficiënten van ontmagnetisatie van het ellipsoid zijn I , de intensiteit van magnetisatie van de stof, v het volume en φ de hoek van I met de groote as van het ellipsoid.

De maximumwaarde van dit koppel is

$$M = \frac{N_1 - N_2}{2} \cdot I^2 v$$

voor $\varphi = 45^\circ$. Om I te meten behoeft dus noch de veldsterkte, noch het azimut van de veldrichting, waarbij het maximum koppel verkregen wordt, bekend te zijn. Ten einde van deze methode gebruik te kunnen maken, wordt het ellipsoid opgehangen aan een torsieveer, waarvan de wringing door spiegellaezing wordt bepaald, en een electromagneet gebruikt, die draaibaar is om een verticale as. De methode is reeds vroeger beschreven ¹⁾. Hare voordeelen zijn de kleine uitgestrektheid over welke de sterke velden noodig zijn en het uiterst eenvoudige van de relatieve metingen. Wij zullen hier twee bronnen van fouten discussieeren, welke haar aankleven en die — al kan men ze in beginsel ook zoo klein maken als men wil — haar minder geschikt maken om de wet van nadering tot de verzadiging na te gaan maar aan hare geschiktheid om twee op elkaar volgende en weinig van elkander verschillende toestanden van dezelfde stof voor dezelfde waarde van het veld te vergelijken, geen afbreuk doen.

Invloed van het niet homogeen zijn van het veld.

Het ellipsoid wordt in het centrum van een magnetisch veld geplaatst, dat de symmetrie van een omwentelingslichaam heeft. De veldsterkte is in dit centrum een maximum voor eene verplaatsing in het aequatorvlak, y , en minimum voor eene verplaatsing in de richting van de as x . Zij wordt gegeven door de ontwikkeling

$$H = H_0 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_0 + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + \dots$$

welke, lettende op de vergelijking $\Delta V = 0$ voor de magnetische potentiaal V , wanneer men polairecoördinaten r en θ invoert, overgaat in

¹⁾ P. WEISS, Journ. de Phys. 4 sér. t. VI, p. 655, 1907.

$$H = H_0 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_0 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)$$

Nu is de energie van een volume-element dv van het ellipsoid, dat wij ons zeer lang en met gelijkmatige intensiteit I in de richting van het veld gemagnetiseerd denken,

$$W = - III dv$$

en derhalve het op dit element door het veld uitgeoefend moment

$$dM' = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{3}{2} dv \cdot I \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_0 r^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Het koppel door het veld H_0 op het ellipsoid uitgeoefend is

$$M = (N_1 - N_2) I^2 v \sin \varphi \cos \varphi$$

In zeer sterke velden is aan de voorwaarde, dat de magnetisatie evenwijdig is aan het uitwendige veld voldaan, niettegenstaande de ontmagnetiseerende krachten van het ellipsoid, en men heeft dan $\theta = \varphi$.

Het storend moment dM' verandert dus met het azimut van de stof evenals het hoofdkoppel M . De maximumwaarde van het koppel dM' is

$$dM' = \frac{3}{2} dv I \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_0 r^2,$$

hetgeen voor het geheele ellipsoid levert

$$M' = \frac{3}{10} I \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_0 r \cdot a^2,$$

waar a de halve groote as van het ellipsoid is.

Laten wij nu aannemen, dat het veld van de magneet gelijkvormig aan zichzelf verandert en noemen wij $(1 - \epsilon) H_0$ het veld op 1 cm. afstand van de as volgens de y -as, dan is

$$\epsilon H_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)$$

en dus

$$M' = \frac{6}{5} I \epsilon H_0 r \cdot a^2$$

en de verhouding van de maximum waarden der koppels

$$\frac{M'}{M} = \frac{6}{5} \epsilon a^2 \frac{H_0}{(N_1 - N_2) I}$$

Bij gelijkblijvende magnetisatie neemt dus volgens de voorlaatste vergelijking het storend koppel toe evenredig met de veldsterkte. In plaats van een horizontale asymptoot zal men in het III -diagram een hellende asymptoot vinden. Dit was zeer duidelijk bij eenige voorafgaande proeven gevonden. Bij gelijkblijvend veld neemt het storend

koppel toe met I . Wanneer het dus bij een bepaalden toestel niet in aanmerking komt voor de grootste waarden van I , bij welke de waarnemingen worden verricht, dan komt het a fortiori niet in aanmerking bij de kleinere. De laatste vergelijking toont aan, dat de *betrekkelijke* waarde van het koppel voor niet-homogeniteit van het veld toeneemt, wanneer de intensiteit afneemt. Het is dus vooral te vreezen wanneer men tot kleinere magnetisaties overgaat, en, om de gevoeligheid van den toestel te vergrooten, de veer door een zwakere vervangt.

Voor het doel van onze metingen is het voldoende zich een denkbeeld te vormen van de orde van grootte van de fout. Ten dien einde is de niet-homogeniteit van het veld voor drie waarden van y gemeten; zij werd evenredig aan y^2 gevonden met $\epsilon = 0,0087$ als factor.

Met $a = 0.15$ volgt hier uit $\frac{M'}{N} = 0,00023 \frac{H_0}{(N_1 - N_2) I}$. Voor de gebruikte ellipsoiden is $N_1 = 1.90$ $N_2 = 5.59$ en voor ijzer is $(N_1 - N_2) I$ dichtbij 6600 gauss, voor nikkel bij 1800 gauss. De correctie bedraagt dus nauwelijks een duizendste voor ijzer, voor nikkel klimt zij tot eenige duizendsten.

Terugwerking van het ellipsoid op de poolstukken.

Wanneer de toppen van het ellipsoid in de onmiddellijke nabijheid van de voorvlakken der polen van de magneet komen, krijgen zij een merkbaaren invloed op de verdeling van het magnetisme in de poolstukken en wordt het koppel er door vergroot. Dit feit was in 't licht gesteld door voorafgaande proeven met een grooteren electromagneet met platte poolstukken van 15 cm. diameter. Bij deze proeven was het koppel gemeten, dat op een ellipsoid werd uitgeoefend door een zelfde veld van 9770 gauss bij verschillende afstanden der polen verkregen door aan den stroom de telkens vereischte waarde te geven. Zoo werd gevonden voor een ijzeren ellipsoid van 9 mm. lengte en 4 mm. equatorialen diameter.

interferrum	maximum koppel
9 mm.	335.6
15 „	320.45
23 „	319.32
35 „	319.18
47 „	319.08

De wet, welke de verandering van deze grootheid volgt, toont aan, dat de verandering niet het gevolg is van de niet-homogeniteit van

het veld. Want juist wanneer de storing haar grootste waarde heeft, is, ten gevolge van het nader bij elkaar komen der vlakke poolstukken, het veld het meest gelijkmatig. Van af 23 mm. wordt de invloed onbeduidend en het koppel constant.

b. Electromagneet. Uit hetgeen omtrent den invloed van de nabijheid van de poolvlakken en het ellipsoïd is opgemerkt, volgt, dat de afstand der polen ongeveer drie maal de lengte van het ellipsoïd moet bedragen. De geheele dikte van de vier wanden van de buizen van DEWAR en van den drager (§ 2c) kon niet kleiner gemaakt worden dan 5 mm. Men komt dus, rekening houdende met de moeilijkheid eenerzijds om sterke velden van groote uitgebreidheid te verkrijgen en anderzijds om zeer kleine ellipsoïden tot den juisten vorm af te werken, tot een interferrum van 9 mm. en ellipsoïden van 3 mm. lengte.

In dit interferrum kan men betrekkelijk sterke velden (tot 25000 Gauss) opwekken met een magneet waarvan de kernen 9 cm. diameter hebben. De electromagneet van dit vermogen, die bij de proeven gebruikt is, heeft vroeger reeds dienst gedaan bij magnetische proeven bij hooge temperaturen. Hij werd reeds vroeger beschreven ¹⁾ en is schematisch afgebeeld in fig. 1 van Pl. II. Betrekkelijk licht (132 Kg.) en — zijn vermogen in aanmerking genomen — gemakkelijk vervoerbaar zijnde, kon hij in Zurich bestudeerd en in Leiden gebruikt worden. De poolstukken kunnen micrometrisch vooruit en achteruit gebracht worden met behulp van handwielmoeren E_4 , wier stand op verdeelde cirkels afgelezen wordt.

Hij kan draaien om een verticale as en loopt daartoe op een krans van kogeltjes in een cirkelvormige geul. Het azimut wordt met behulp van een vast merkteeken afgelezen op een cilindrische verdeling E_2 , die op het bewegelijke deel van het draagstuk aangebracht is. Elk der klossen heeft 1500 windingen draad van 2,5 mm. met een weerstand van 2 Ohm ongeveer. Daar de klossen zijn ingericht op een stroom van 10 Amp. voor gewoon gebruik en de stroom voor korten tijd tot 25 Ampère kon worden opgevoerd, beschikt men over een aantal Ampère windingen, dat tot 75000 kan gaan. De watereirculatie E_3 tusschen de dubbele wanden der klossen heeft al aanstonds dit voordeel, dat men een proef ongeveer dubbelzoolang kan voortzetten maar vooral is zij van belang omdat zij de poolstukken tegen verwarming beschermt. Zulk eene verwarming zou tot verschillende bezwaren aanleiding geven, waarvan wel het grootste is,

¹⁾ G. ZINDEL, Revue électrique 20 Juni 1909 en Elektrol. Zeitschr. t. XXX, p. 446, 1909.

dat de waarde van de veldsterkte merkbaar veranderen zou. Want de uitzetting der betrekkelijk lange kernen door de warmte kan een betrekkelijk kort interferrum merkbaar wijzigen.

c. Cryogene toestel. Daar het noodig was de ruimte, waarin het ellipsoïd draaibaar wordt opgehangen en waarin zich de vloeibare waterstof en haar damp bevindt, van de lucht af te sluiten, moest gebruik gemaakt worden van een vrij samengestelden cryogenen toestel, die in Pl. II fig. 1 schematisch en in fig. 3 in doorsnede is voorgesteld. De toestel bestaat hoofdzakelijk uit 3 coaxiale buisvormige deelen die van buiten naar binnen gaande zijn, het *omhulsel*, de *stelbuis* f en de *drager* b . Het omhulsel bestaat van beneden naar boven gaande uit de verzilverde vacuumbuis A , de messingbuis B , de glazenbuis C , en den kop D , die den toestel sluit.

Drager. Het ellipsoïd a (fig. 3 en 5) kan met den drager b , waarin het bevestigd is, om een verticale as draaien. Over 't grootste deel van zijne lengte bestaat de drager uit een buis b_2 van nieuwzilver, een weinig magnetische, stugge en de warmte slecht geleidende stof; aan het benedeneinde uit een staafje b_1 , van koper, hetgeen slechts een zeer zwak eigen magnetisme heeft. Hij is aan de stang k verbonden door de spiraalveer g_1 (g_1 heeft gediend voor ijzer en cobalt, de zwakkere veer, die bij nikkel en magnetiet gebruikt werd, is ter zijde als g_2 afgebeeld); om het evenwicht stabiel te maken en te voorkomen, dat het ellipsoïd naar de polen van de magneet wordt getrokken, wordt de drager beneden vastgehouden door een draadje platina-iridium van 0.1 m.m. diameter d , welks torsie slechts als correctie in aanmerking komt (§ 4).

De buis b_2 en de stang b_1 zijn zorgvuldig op de draaibank gericht, het ellipsoïd a (fig. 4) wordt er in bevestigd in een cylindervormige opening, welker doorsnede gelijk is aan den aequator van het ellipsoïd. Is dit laatste van nikkel of magnetiet dan kan men het met een weinig was bevestigen. In 't geval van ijzer en kobalt ondervindt het ellipsoïdje zoo sterke werkingen, dat het noodig was het vast te klemmen, door het met kracht in de opening te drijven na het met een zeer dun blaadje rood koper omhuld te hebben. De stang b_1 en het buisje b_2 van nieuwzilver met zeer dunne wanden brengen (fig. 3) de draaiing van het ellipsoïd¹⁾ over op het spiegeltje h , met behulp

1) Een kleine wringing van deze buis komt niet in aanmerking. Alleen het deel van den toestel, tusschen het spiegeltje en den kop speelt de rol van veer. De wringing van het deel van den toestel beneden het spiegeltje doet niet anders dan het koppel overbrengen, de eenige uitwerking er van is, dat het azimut van de magneet iets, en wel niet merkbaar, gewijzigd wordt.

waarvan men door de opening f'_{10} en het venster C_2 (fig. 1 en 3) de wringing van de veer g_1 alleest op een in halve m.m. verdeelde glazen schaal van 1.5 Meter, die op 4.325 M. afstand geplaatst was en verlicht werd met behulp van spherische spiegelstrooken¹⁾. De spanning van de veer wordt geregeld door de stang k (fig. 3), die door de pakkingbus D_2 van den kop D gaat. Het op en neer bewegen van k geschiedt door de moer D_4 te draaien terwijl men de beweging van D_5 tegenhoudt. De spanning wordt door de opening f'_{21} op de schaal b_{20} met behulp van den wijzer l afgelezen. Voordat de toestel gemonteerd is, heeft men door een bekend gewicht aan den spandraad te hangen, de deelstreep op de schaal b_{20} bepaald, die overeenkomt met de spanning, op welke men den toestel wil instellen.

De toestel is even als een gespannen snaar zeer geneigd onder den invloed van kleine schuddingen in trilling te geraken. Men heft ze op door den vleugeldemper b_3 (fig. 6 en fig. 3) te laten dompelen in een ringvormig oliebakje in verschillende kamertjes verdeeld door de schotjes b_{31} . De laatste zijn bevestigd op een cylinder, die met zachte wrijving in de stelbuis draaibaar is en die dus door de vleugeltjes b_{30} wordt medegevoerd wanneer de drager een ietwat groote draaiing moet ondergaan (§ 4)²⁾. De vleugeltjes moeten geheel onderdompelen in de olie om te voorkomen, dat capillaire werkingen tot koppels aanleiding geven (zie § 4), die niet verwaarloosd zouden mogen worden. In sterke velden worden de torsieslingeringen zeer goed door de FORCAULT'sche stroomen gedempt.

De geheele drager met veer hangt in de stelbuis f' , waarvan het bovendee is vastgeschroefd aan den kop D die ook de stang k draagt en zelf steunt op de glazen buis C . De doorsnede van de stelbuis, die uit de deelen f'_2, f'_3, f'_4, f'_5 bestaat, gaat drie keer in een kleinere over; het nauwe benedenste deel f'_5 omgeeft zoo na mogelijk de stang b_1 van den drager. Tegen den bodem f'_6 (fig. 5) steunt het kegeltje c , dat aan den draad d gesoldeerd is en dezen spant. Eene insnijding in den bodem veroorlooft het kegelvormige stukje op zijn plaats te brengen (fig. 5). Wanneer de toestel gemonteerd is, dompelt de stelbuis in de buis van DEWAR A met het dunne buisje f'_2 gecentreerd in het vernauwde deel. De stelbuis is even als de buis b_2 van den drager van nieuwzilver.

Om de stelbuis met den daarin aangebrachten drager in het omhulsel te monteeren, scaroeft men den kop D op den bronzen ring,

¹⁾ H. KAMERLINGH ONNES, Zitt. Versl. Apr. 1896, Comm. fr. the phys. Lab. Leiden, n°. 25.

²⁾ Het is noodig de olie vooraf van vluchtige stoffen te bevrijden en ook te voorkomen, dat er zich luchtbelletjes onder de olie bevinden, omdat de toestel na geheel gemonteerd te zijn luchtledig gepompt moet worden.

die aan het glazen buis C van het omhulsel gekit is, zet de schroeffjes D_7 vast en maakt de verbinding luchtdicht door den caoutchouc ring D_6 met caoutchouc oplossing en koperen trekdraden te bevestigen. Het beneden einde van de glazen buis C is gekit in een tweeden bronzen ring, gesoldeerd aan de messingbuis B van het omhulsel. In het midden draagt deze een ring B_3 , waarop de moeren B_{31} van de trekstangen B_4 rusten, die de vacuumbuis dragen.

De DEWAR buis zelf bestaat uit een nauw benedendeel A_2 dat geheel verzilverd is en een wijder bovendeel, dat tot A_3 verzilverd is (het bovenste deel is doorzichtig gelaten opdat men zich er van kan verzekeren, dat men niet te veel vloeibare waterstof in het glas schenkt).

Zij glijdt in de messingbuis B_1 en wordt beveiligd door een houten ring. De trekstangen B_4 houden de buis op hare plaats en wel op zulk een hoogte dat zij juist vrij blijft van de beveiligingsring. Fig. 7 geeft aan hoe de dunne messing ring B_5 , waaraan de trekstangen B_4 aangrijpen, op de vacuumbuis, beschermd door een laagje papier, door de trekschroef B_{50} geklemd wordt. Het benedendeel van de vacuumbuis heeft een buiten-diameter van 8 mm. en een binnen-diameter van 5 mm. De glazen wanden zijn 0,5 mm. dik, zoodat er voor den afstand der twee verzilverde wanden slechts 0,5 mm. overblijft.

Het centreeren van den toestel geschiedt door hem met behulp van den ring B_2 van het omhulsel te plaatsen op een hulpdrager. Terwijl de vacuumbuis nog niet is aangebracht richt men dan het nauwe deel f_5 van de stelbuis met behulp van een stelring in een verplaatsbare stelplaat. Dan neemt men uit de stelplaat den lossen stelring weg en plaats er een tweeden in dijer voege in, dat nu het nauwe benedendeel van de vacuumbuis in den nieuwen stelring past. Men brengt dezen juist op zijn plaats met behulp van de moeren B_{31} , en brengt de luchtdichte sluiting tot stand met de caoutchouc buis B_6 , waarbij men weder caoutchoucoplossing en koperen trekdraden te hulp neemt. Bij deze wijze van bevestiging van de vacuumbuis is vervorming van het omhulsel door luchtledig pompen niet te vreezen en zijn er slechts kleine wijzigingen noodig om den toestel, nadat deze luchtledig gepompt is, opnieuw te centreeren.

In de buis B is de stalen capillair θ_3 (fig. 1 en 3) van een helium-thermometer ¹⁾ met nieuwzilveren reservoir θ_1 (fig. 3 en 7) en glazen steel θ_4 , die met dit deel van het omhulsel een geheel uitmaakt, gesoldeerd. De hoeveelheid helium is zoo gekozen, dat het kwik bij het kookpunt van zuurstof beneden en bij het smeltpunt van waterstof

1) Vergelijk den toestel voor het vloeibaar maken van helium. H. KAMERLINGH ONNES Comm. phys. Lab. Leiden, N^o. 108.

boven in den glazen steel staat. Wanneer, gelijk in het geval van waterstof kokend onder den gewonen dampkringsdruk, de temperatuur zonder aflezing van den thermometer voldoende bekend is, is deze toch noodig als aanwijzer van den stand van het oppervlak van het vloeibare gas, welke beneden A_3 niet meer te zien is. Zoodra het niveau daalt onder het bovendee van het thermometerreservoir θ_1 , daalt ook het kwik in den steel θ_4 .

d. Men begint met den electromagneet te stellen, welke bewerking onafhankelijk is van het centreeren van de stelbuis, den drager en de vacuumbuis. De draaiingsas wordt verticaal gericht en het interferrium wordt gecentreerd op deze as, vervolgens wordt het centrum van het kogellager G_{10} (fig. 1, 2 en 3) in de draaiingsas van den magneet gebracht. Dit kogellager wordt gedragen door een plaat, die zelf weer met twee balken aan den hardsteenen pijler Θ bevestigd is.

Vervolgens brengt men het cryogene toestel van den hulpdrager over naar de daarvoor bestemde plaats door het bolvormige deel van het oppervlak van den ring B_2 in het concentrisch kogellager G_{10} te plaatsen en voltooit het centreeren van het nauwe deel van de vacuumbuis op de draaiingsas van den magneet met behulp van de vleugelschroeven aan den ring B_2 . Dit centreeren moet met groote nauwkeurigheid worden uitgevoerd, want de magneet moet vrij kunnen draaien en de ruimte tussehen de vacuumbuis en de poolvlakken is ter weerszijden niet grooter dan een halve millimeter. Het is trouwens gemakkelijk dit tot op 0,25 mm. nauwkeurig te doen.

e. De vloeibare waterstof wordt door het nieuw zilveren buisje B_7 (verg. Meded. n^o. 94^f) in den toestel gebracht. Het door verdamping gevormde gas stroomt door B_8 (fig. 3 en 4) en door de kranen K_1 , K_2 (fig. 1) naar een gazometer of naar een vacuumpomp. Met behulp van de kranen regelt men den dampdruk, die op den tevens als veiligheidsklep dienenden manometer H wordt afgelezen. Bij de proeven in de nabijheid van het smeltpunt van waterstof houdt men den druk een weinig boven den tripelpuntsdruk.

Voor dat de vloeibare waterstof door het buisje B_7 , dat met een caoutchoucbuisje met glazen stop gesloten is, in den toestel wordt gebracht is deze door K_2 luchtledig gepompt. Het is volstrekt noodig, dat de toestel luchtdicht sluit, want sporen lucht zouden in de vloeibare waterstof bevrozen en zich door de magnetische aantrekkingen in de nabijheid van het ellipsoïd ophoopen.

Om te voorkomen, dat de kokende waterstof het bovendee van den toestel, waar zich de torsieveer bevindt, afkoelt, zijn er in de

buis f_4 (fig. 3) een aantal groote openingen gemaakt, op zulk eene wijze geplaatst, dat aan den weerstand tegen wringing geen afbreuk wordt gedaan, en zijn ter hoogte van B_3 koperen schermen B_{11} aangebracht, waarin hij met zachte wrijving past. Het plotseling opkoken¹⁾ van de waterstof wordt verminderd door een weinig watten op den bodem van het vacuümglas te leggen en om de draagbuis te bevestigen.

Het bijvullen van de vloeibare waterstof geschiedt op dezelfde wijze als de eerste vulling. Meestal konden met een enkele vulling verscheidene reeksen van waarnemingen verricht worden. De punt van het vacuümglas, die niet verzilverd kon worden, wordt beschermd door een klein verzilverd vacuüm bekertje L met vloeibare lucht. Wanneer, nadat de toestel gevuld is, het deel van den toestel bij de diaphragma's B_{11} op de gewone temperatuur teruggekomen is, bemerkt men, tenzij de vloeistof boven A_3 staat, nauwelijks dat er vloeibare waterstof in den toestel is.

Op den langen duur slaat er een weinig vocht op de vacuümbuis neer. Door vloeipapier om de buis bij A_1 te wikkelen voorkomt men dat het tusschen de poolstukken vloeit. Ook wordt een stroom lucht op de buis tusschen de polen gericht. De poolstukken ondergaan derhalve geenerlei invloed van de cryogene bewerkingen.

f. De veeren zijn van phosphorbrons. Dit is niet magnetisch en vertoont slechts geringe nawerking. Men kan een veer met dezelfde constante maken door een spiraal van een dunnen korten of van een dikken en veel langeren draad te winden. Van deze twee veeren zal die, welke de meeste massa heeft, de kleinste soortelijke veranderingen ondergaan en dus meer volkomen veerkrachtig werken. Met deze omstandigheid is rekening gehouden. De veeren zijn in de richting van de as met verlengstukken voorzien en met schroefjes in den drager en in den stang k (fig. 3) bevestigd. De windingen raken elkaar niet aan. De temperatuur van de veer wordt gemeten met een kwikthermometer, die tegen den kop D geklemd is en samen met dezen in wol is ingepakt. De constanten der twee gebruikte veeren zijn 261000 en 22300 dynecentimeters per eenheidsboog. De correcties voor den invloed van den spandraad en voor de temperatuurverandering van de veer worden in § 4 behandeld.

De *ellipsoïden* van ijzer, nikkell en cobalt zijn 3 mm. lang en 1,333 mm. dik. Zij zijn met groote nauwkeurigheid bewerkt door de Société Gènevoise pour la Construction d'Instruments de physique. Het afdraaien is geschied onder een microscoop met 30 malige ver-

¹⁾ Heeft dit plaats, dan moet men zich er van overtuigen, dat de olie van den demper niet door opgeworpen spatten afgekoeld is.

grooting en voorzien van een camera lucida, waarin het beeld van het voorwerp en eene teekening op groote schaal op elkander konden worden gebracht. Eenige metingen met de verdeelmachine hebben bewezen, dat de vorm der ellipsoiden zeer nauwkeurig is.

Het ijzer werd verkregen door in een electrischen weerstandsoven zuiver electrolytisch ijzer van MERCK te smelten in een atmosfeer van stikstof en in een schuitje van magnesia. Het nikkel en het cobalt werden op dezelfde wijze verkregen uitgaande van uiterst zuiver nikkel- en cobaltpoeder, dat door MERCK bepaaldelijk met het oog op deze proeven bereid was. Het magnetiet werd verkregen door bij benadering een ellipsoid te vervaardigen uit een druppel zeer zuiver magnetiet, verkregen door zuiver sequioxyde van MERCK met de knalgasvlam te smelten. Daar de proef geleerd had, dat alleen bij zeer hooge temperaturen de laatste overmaat van zuurstof uitgedreven en werkelijk magnetiet ¹⁾ verkregen wordt, werd voor deze bewerking een iridium kroesje gebruikt.

Er werden ook ellipsoiden van benaderden vorm vervaardigd uit chroom en mangaan van GOLDSCHMIDT en uit vanadium van MOISSAN. Gelijk men gemakkelijk inziet is het voor vergelijkende proeven niet noodig, dat de ellipsoiden bijzonder nauwkeurig afgewerkt zijn, dit is overigens ook proefondervindelijk voor magnetiet aangetoond, daar van verschillende monsters, die ruw tot verschillende vormen van ellipsoiden waren afgewerkt, voor de thermische verandering bij hooge temperaturen krommen verkregen zijn, die met de theoretische en dus ook onderling samenvallen.

§ 3. *Gang der proeven.* Zoals in de inleiding vermeld werd, hebben wij ons niet ten doel gesteld absolute waarden van de magnetisatie in sterke velden bij de gewone temperatuur en bij die van vloeibare waterstof te bepalen, maar hare waarde bij deze beide temperaturen te vergelijken. Want wij konden verwachten, dat de verandering slechts een klein breukdeel van de te meten grootheid zelf zou zijn. Het had dan ook voor de hand gelegen bij een zelfde waarde van het veld waarnemingen bij beide temperaturen met elkaar af te wisselen. Het overgaan van de eene temperatuur tot de andere vereischt echter bewerkingen van te langen duur om op deze wijze te werk te gaan. Daarom begonnen wij gewoonlijk met een reeks van metingen bij de gewone temperatuur, waarbij aan het veld de gewenschte reeks van waarden werd gegeven. Ver-

¹⁾ Zie ook P. WEISS, Arch des Sc. phys. et nat. fevr. 1910 et Journ. de physique, 4e Sér. t. IX mars 1910.

volgens werd een analoge serie bij lage temperatuur verricht en daarna, werden, wanneer de toestel weder op de gewone temperatuur gekomen was, nog eens enkele waarnemingen herhaald om zekerheid te verkrijgen, dat de toestel geen verandering ondergaan had.

Elke waarnemingsreeks bestaat op zichzelf weer uit twee afdeelingen. Men begint tastenderwijs en bij insluiting voor al de waarden van het veld het azimut van den electro-magneet te bepalen, waarbij het koppel een maximumwaarde heeft. Op die wijze worden twee azimuts gevonden, die symmetrisch zijn ten opzichte van de groote as van het ellipsoid en bij welke koppels van tegengesteld teeken behooren. Deze bepaling kan tot op 1° tot $0,5^\circ$ nauwkeurig geschieden, wat zeer ruim voldoende is. Dan volgt de eigenlijke meting, welke daarin bestaat, dat men den magneet zonder stroom in de beide azimuts plaatst, den stroom sluit en onmiddellijk daarna den uitslag afleest. Zoodra dit geschied is verbreekt men den stroom, plaatst men den magneet in den symmetrischen stand, geeft men weer stroom en leest men den uitslag opnieuw af. Daar deze bewerkingen slechts een korten tijd in beslag nemen, komt de nawerking van de veer niet tot uiting. Het verschil der aflezingen op de schaal geeft het dubbele van het te meten koppel, onafhankelijk van het na het verbreken van den stroom overblijvend remanent magnetisme, dat trouwens slechts een niterst zwak koppel gaf. Het veld werd gegeven als functie van den stroom, die door den ampèremeter werd aangewezen. Bij de waarnemingen dient dezelfde ampèremeter (van SIEMENS en HALSKE zonder temperatuur coëfficiënt) met welke ook het magneetveld bestudeerd was. Deze wijze van aflezing van het veld was ruim voldoende voor het beoogde doel. De stand der poolstukken werd afgelezen op de verdeelde trommels van den magneet en gecontroleerd met behulp van juist op de gewenschte waarde van het interferrum afgepaste kalibers. De opgegeven velden zijn gecorrigeerd voor de ontmagnetiseerende velden van de ellipsoiden.

§ 4. *Correcties en contróles, hulpbepalingen.* Het eigen magnetisme van den drager is niet zoo zwak dat men de daaruit voortvloeiende correcties mag verwaarloozen. Er werd derhalve een reeks van metingen zonder ellipsoid in den drager bij gewone temperatuur en bij die van vloeibare waterstof verricht. Met de zwakste veer werd gevonden :

TABEL I.

Correctie voor het magnetisme van den drager.

	gewone temperatuur	$t = 20^\circ K$
4000 gauss	0.18 cm.	0.26
8000	0.29	0.48
12000	0.36	0.61
16000	0.43	0.73
20000	0.50	0.86
24000	0.57	0.98

Voor de sterkere veer worden deze correcties $\frac{22300}{261000}$ kleiner, zij zijn zeer gering. Directe metingen hebben geleerd, dat de op deze wijze berekende waarden juist zijn. Dat wil dus zeggen, dat het eigen magnetisme van den drager niet veranderd is door de verschillende bewerkingen van het monteeren.

Er moet nog eene correctie aan de verhouding der koppels worden aangebracht voor de verandering van de veerkracht van den spandraad onder aan den drager, wanneer die draad van de gewone temperatuur tot die van vloeibare waterstof overgaat. Ten behoeve van die correctie is de verhouding tusschen de torsieconstante van den platinumiridium draad en de zwakste der beide veeren van phosphorbrons bij de twee genoemde temperaturen bepaald. Dit geschiedde met een dergelijken toestel als wij beschreven hebben, maar waarbij de kop *D* ten opzichte van het omhulsel gedraaid kon worden. De stand van den kop werd afgelezen met behulp van een spiegel en een op 175.9 cm. afstand geplaatste schaal. De kop werd ongeveer 360° gedraaid en het juiste bedrag der draaiing werd op de zoeven genoemde schaal afgelezen. Deze draaiing is de som van de wringing van de veer en van den draad onder de werking van een zelfde koppel. De wringing van den draad werd met behulp van den spiegel van den drager afgelezen.

Zoo werd voor de verhouding van de constante van den draad tot die van de veer gevonden:

$$\begin{aligned} \text{bij gewone temperatuur} & 0.0125 \\ \text{in vloeibare waterstof} & 0.0144. \end{aligned}$$

De 4^e decimaal is onzeker, de correctie bedraagt dus twee duizendste voor de zwakke veer en twee tienduizendste voor de sterke. De temperatuur-coëfficiënt van de veer van phosphorbrons werd bepaald door den slingertijd van eenzelfde slingerend systeem te bepalen, terwijl de veer zich de eene maal op de gewone temperatuur de

andere maal in stoom van kokend water bevond. Met behulp van de gevonden temperatuur-coëfficiënt

$$k = -0,00053$$

zijn de waarnemingen tot een zelfde temperatuur teruggebracht.

Dat de temperatuur van het vloeistofbad in de vacuumbuis tot op 0,1 graad gelijkmatig was, werd vastgesteld door op verschillende hoogten in een dergelijk vat metingen met een platina weerstandsthermometer te verrichten. Naast den thermometer θ geplaatst, wees hij temperaturen aan, die overeenstemmen met de dampspanningen.

Capillaire werkingen in den oliedemper.

Er werd voor gezorgd het bakje van den demper hoog genoeg te vullen om den cilindrischen ring, die de dempende vleugeltjes draagt, in de olie te laten dompelen, zoodat op die vleugeltjes dus geen capillaire krachten werken. Maar wij hebben ons toch rekenschap willen geven van de orde van grootte, die bij capillaire storingen in 't spel zouden komen, en hebben deze daartoe belangrijk vergroot. Een demper zooveel mogelijk gelijk aan den onze werd slechts tot zoo hoog gevuld, dat de vleugeltjes en de dwarsschotjes het vloeistof oppervlak doorsneden. Het bewegelijke deel werd aan een platinum-iridiumdraad van 20 cm. lengte en 0,1 mm. diameter opgehangen en de afwijkingen met een spiegeltje op een schaal op 2 meter afstand afgelezen. Het oliebakje werd achtereenvolgens in twee azimuts gebracht, waarin de nadering der vleugeltjes tot de schotjes koppels van tegengestelden zin moest geven. De afwijking op de schaal bedroeg 5 cm. Het koppel is dus van de orde van twee duizendste van dat hetwelk op het nikkel ellipsoïd wordt uitgeoefend.

§ 5. *Detail der waarnemingen.*

Nikkel.

De eerste reeks van metingen werd verricht bij 17°.2 C.

TABEL II.

H in gauss	I^2 in cm. der schaal
2230	89.42
6250	89.97
10270	90.12
13280	90.34
17760	90.50
20300	90.66
21540	90.79
22760	90.81

De allezing op de schaal is steeds gecorrigeerd voor de verhouding

van de tangens van den dubbelen hoek tot den dubbelen hoek van uitwijking.

Het nulpunt, bepaald als gemiddelde der waarnemingen rechts en links, bleef tot op eenige tiende millimeters onveranderd. Na deze serie werd de toestel bij ongeluk beschadigd en daarom uit elkaar genomen en later weder in elkaar gezet. Dit bracht een kleine verandering in de grootte der afwijkingen te weeg. Daar de verandering van I^2 met H door bovenstaande reeks was vastgesteld, zijn verder bij gewone temperatuur voor en na de metingen in vloeibare waterstof slechts twee punten genomen.

TABEL III.

$t = 19^{\circ}.5$ C.		waterstof atm. druk (20° K.)	
H in gauss	I^2 in cm^2 van de schaal	H in gauss	I^2 in cm^2 van de schaal
	voor	1780	93.57
16100	91.74	5410	100.49
20540	92.09	5050	101.54
	na	11830	101.84
16100	91.79	16100	102.13
20540	92.20	19050	102.34
		20540	102.51
		22020	102.48
		22840	102.49

Het nulpunt opgemaakt uit het gemiddelde der waarnemingen rechts en links verliep ongeveer 2 mm.

$$\begin{aligned} \text{Voor } H = 16100 \text{ gauss } \frac{I_{20^{\circ} \text{ K.}}}{I_{19^{\circ}.5 \text{ C.}}} &= 1.0549 \\ \text{.. } H = 20540 \text{ .. } \text{..} & \text{..} \quad 1.0547 \\ \text{gemiddelde} & 1.0546 \end{aligned}$$

Cobalt.

De metingen betreffende cobalt hebben niet tot de gezochte uitkomst geleid. Het was de, uit voorloopige proeven gevonden, buitengewone moeilijkheid om de magnetisatie van cobalt tot verzadiging op te voeren, die geleid had tot de keuze van een toestel van zoo kleine afmetingen. Voor de andere stoffen had men met zwakkere velden kunnen volstaan en dus kunnen beschikken over een grooter interferrum.

Reeds bij de waarnemingen op gewone temperatuur deed zich iets onvoorziens voor. Terwijl het gemiddelde der aflezingen rechts en links het nulpunt van den toestel had moeten geven, werd al naar gelang

van het veld een ander punt verkregen. Deze veranderlijkheid bleek vervolgens bij de lage temperaturen ongeveer twee maal zoo groot. Zie hier eenige getallen, die dit doen uitkomen. (Bij de waarnemingen betreffende cobalt geven wij het uitwendige veld niet gecorrigeerd voor het ontmagnetiseerend veld van het ellipsoïd. Dit laatste wordt, als de verzadiging bereikt is, 5000 gauss).

TABEL IV.

Cobalt I bij gewone temperatuur.

H_c in gauss l^2 in cm^2 vande schaal berekend nulpunt

4025	17.16	76.73	
8050	38.14	77.47	het ware
12075	50.48	78.96	nulpunt is
19560	53.24	78.37	niet
23340	53.29	78.18	opgeteekend.
25650	53.30	78.63	

Cobalt I bij de temperatuur van stollende waterstof (14° K.).

4025	13.5	77.62	
8050	32.59	78.84	
15820	53.23	81.93	waar nulpunt
19560	54.33	81.40	78.26
21800	54.43	81.16	
23340	54.45	81.02	
24760	54.46	80.08	

Er komen dus behalve het hoofdverschijnsel storende dissymmetrische koppels tot uiting. Het is waarschijnlijk, dat wij hier te doen hebben met verschijnselen van kristalmagnetisme het gevolg daarvan, dat de kristallen-elementen van het cobalt in het kleine ellipsoïd niet groot genoeg in aantal zijn om door compensatie isotropie teweeg te brengen. Grootte en teeken van deze verschijnselen hangen niet van het hoofdverschijnsel af en zij zouden zelfs voor de twee azimuts van den magneet een tegengestelde uitwerking kunnen hebben. Zij kunnen een zeer belangrijken invloed verkrijgen wanneer de stof een meer of minder uitgesproken magnetisch vlak bezit en het voorbeeld van het pyrrhotine bewijst, dat zij bij lagere temperatuur sterker worden. Overigens komt de wet van nadering tot de verzadiging, die bij cobalt afwijkt van de voor de andere stoffen geldende, wel overeen met het bestaan van sterke magnetokristallijne-verschijnselen¹⁾.

Deze proeven zijn herhaald met een tweede ellipsoïd van cobalt. Daarbij deed zich dezelfde dissymmetrie in iets zwakkere mate voor.

¹⁾ P. WEISS, Arch. des Sc. phys. et nat. février 1910, Journ. de phys. mars 1910.

Maar nu is er een storing van ander karakter bijgekomen, welke wel aantoonst hoe zeer parasitische verschijnselen de meting van de magnetisatie kunnen storen: de magnetisatie bij lage temperatuur werd nu schijnbaar kleiner gevonden dan die bij gewone temperatuur. De volgende tabel bevat een uittreksel uit de waarnemingen met dit tweede ellipsoïd verricht.

TABEL V.

Cobalt II bij $t = 18^\circ C$.

H_c in gauss	I^2 in $cm.^2$ der schaal	berekend nulpunt	waar nulpunt
4025	20.33	77.56	
12075	54.16	76.49	77.70
23340	59.76	76.86	
25560	59.94	76.90	

Cobalt II in H_2 atm. druk ($20^\circ K$).

15080	53.53	76.61	
23340	58.09	77.07	78.90
25650	58.46	77.21	

Hetzelfde ellipsoïd is uit den drager verwijderd en weder er in geplaatst omgeven van Khotinsky kit. Men kon namelijk onderstellen dat een buitengewoon sterk verschijnsel van magnetostrictie teweeg gebracht was door het met kracht indrijven van het ellipsoïd in zijne montuur. Het ellipsoïd kon bij de nieuwe proef tevens onder een anderen hoek van draaiing om zijn lengte-as geplaatst worden. Het teeken van de nulpuntsafdwaling in functie van het veld is daarbij veranderd.

TABEL VI.

Cobalt II $t = 16^\circ.5 C$.

H_c in gauss	I^2 in $cm.^2$ der schaal	berekend nulpunt	waar nulpunt
8050	40.99	79.12	
19560	56.48	78.80	79.45
23340	57.07	78.89	
25650	57.34	78.90	

Cobalt II H_2 atm. druk ($20^\circ K$).

8050	34.07	78.88	79.20
19560	53.21	78.24	
23340	54.26	78.33	
25650	54.63	78.42	

De eenige gevolgtrekking, die men uit deze proeven betreffende cobalt schijnt te mogen trekken, is dat de toename van de magnetisatie van het cobalt tusschen de gewone temperatuur en die van vloeibare waterstof veel kleiner is dan die bij magnetiet en nikkel, want anders had zij niet door het storende verschijnsel bedekt kunnen worden.

TABEL VII.

*I*_{zer.}

<i>H</i> in gauss	<i>I</i> ² in cm ² van de schaal		
	<i>t</i> = 20° C.	<i>T</i> = 20° K. (H ₂ atmosf. druk)	<i>T</i> = 14° K. (H ₂ stollend)
1700	95.23	101.98	101.95
5675	98.47	102.58	
8680	98.65	103.01	
13160	98.91	103.31	
15700	99.04	103.31	103.23
16940	99.08	103.27	
18360	99.06	103.27	
19250	99.07	103.25	103.25
voor <i>H</i> = 19250		$\frac{I_{20^\circ K.}}{I_{20^\circ C.}} = 1.0209$	
	18360		1.0210
	16940		1.0209
	15700		1.0213
		gemiddelde	<u>1.0210</u>

Bij alle proeven voor ijzer bleef het nulpunt opgemaakt als gemiddelde der aflezingen merkwaardig constant. Het verplaatst zich in den regel slechts weinige tienden van millimeters in eenzelfde reeks en 6 mm. bij het overgaan van de eene serie tot de andere.

De weinige waarnemingen bij de temperatuur van stollende waterstof zijn voldoende om aan te toonen, dat er tusschen 20° K. en 14° K. niets bijzonders gebeurt.

Magnetiet.

Wij hebben vermeld, dat het bereiden van magnetiet door verhitting van het sesquioxyde een zeer hooge temperatuur eischt als men zeker wil zijn, dat de laatste overblijfselen van zuurstof geheel ontweken zijn. Een eerste ellipsoïd, afkomstig van niet voldoende verhit ijzeroxyde had iets meer dan de helft slechts van de magnetisatie, die verwacht werd, met een zeer duidelijke hysteresis, bij de

temperatuur van vloeibare waterstof ongeveer 3 maal zoo groot als bij de gewone, terwijl bij al de andere proeven met de andere stoffen de hysterese verschijnselen onbeduidend waren. Verder was voor deze stof de magnetisatie ongeveer dezelfde bij de gewone temperatuur en bij die van vloeibare waterstof, terwijl zij een maximum had tusschen die temperaturen gelegen.

Die bijzonderheden hebben zich niet voorgedaan bij een tweede ellipsoïd, dat gesneden was uit goed gegloeid magnetiet, maar bij dit ellipsoïd hebben zich nu weer andere verschijnselen voorgedaan, die nog niet verklaard zijn maar van ondergeschikt belang schijnen. Het nulpunt opgemaakt uit het gemiddelde der twee schaalaflezingen, verschilt merkbaar van het waargenomen nulpunt, terwijl het vrijwel constant blijft in eenzelfde serie van waarnemingen bij dezelfde temperatuur. Verder — en dat is opmerkelijker — verschillen de afwijkingen naar gelang van de richting van het veld. Het zou klaarblijkelijk zeer voorbarig zijn om op grond van deze enkele waarneming aan het magnetiet een hemimorphe symmetrie gelijk aan die van tourmalijn te willen toeschrijven. Het is waarschijnlijker hier aan het over 't hoofd zien van een experimenteële fout te denken, en dit des te eerder omdat de proeven met het magnetiet veel minder regelmatige uitkomsten geven dan die met de metalen. De volgende tabel behelst een uittreksel uit de waarnemingen, waarbij de waarnemingen voor de + en — richting van het veld afzonderlijk opgegeven worden.

TABEL VIII.

Magnetiet. $t = 15^{\circ}.8$ C.

Waargenomen nulpunt — berekend nulpunt + 0.9 cM.		
H in gauss	Veld + I^2 in cm^2 . der schaal	Veld — I^2 in cm^2 . der schaal
8600	71.40	71.72
18100	71.83	72.00
21800	71.75	72.57
23300	71.99	72.57
24200	71.77	72.45
H, atmosf. druk. (20° K.)		
8600	79.78	79.88
18100	80.69	80.79
21800	80.73	80.96
23300	80.34	81.10
24200	80.08	81.37

H₂ stollend (14° K.)

18100	80.90	81.10
21800	81.12	81.64
24200	80.96	81.84

Uit deze getallen volgt voor de verhouding der intensiteiten bij 20° K. en 15.8 C.

T A B E L IX.

<i>H</i> in gauss	veld + <i>I</i> ² in cm ² der schaal	veld — <i>I</i> ² in cm ² der schaal
8600	1.0559	1.0553
18100	1.0591	1.0601
21800	1.0593	1.0567
23300	1.0564	1.0572
24200	1.0563	1.0628
gemiddelde	1.0574	1.0564

$$\text{Dus } \frac{I_{20^\circ \text{ K.}}}{I_{15.8 \text{ C.}}} = 1.0569.$$

Evenzoo vindt men voor de verhouding der magnetisatie bij 14° K. en 15.8 C.

$$1.0609 \qquad 1.0622$$

dus

$$\frac{I_{14^\circ \text{ K.}}}{I_{15.8 \text{ C.}}} = 1.0616$$

eene verhouding, die van de vorige in den verwachten zin afwijkt.

Het voorgaande samenvattende vinden wij in dit deel van het onderzoek ook de ferromagnetische stoffen voor

$$\text{nikkel } \frac{I_{20^\circ \text{ K.}}}{I_{17.3 \text{ C.}}} = 1.0546$$

$$\text{ijzer } \frac{I_{20^\circ \text{ K.}}}{I_{20^\circ \text{ C.}}} = 1.0210$$

$$\text{magnetiet } \frac{I_{20^\circ \text{ K.}}}{I_{15.8 \text{ C.}}} = 1.0569.$$

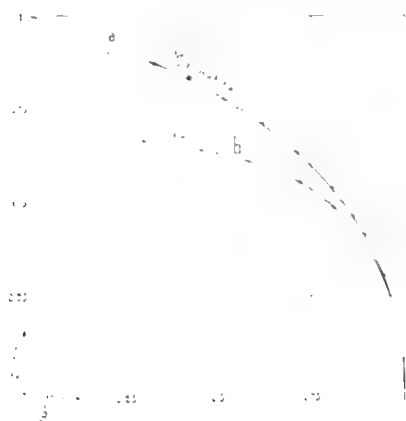


Fig. 1.

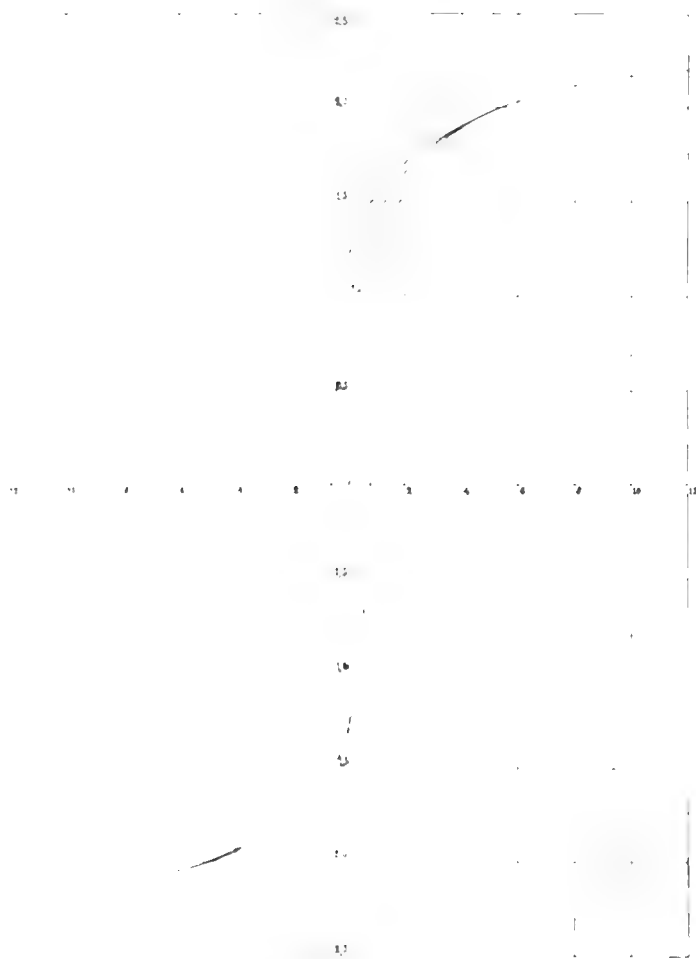
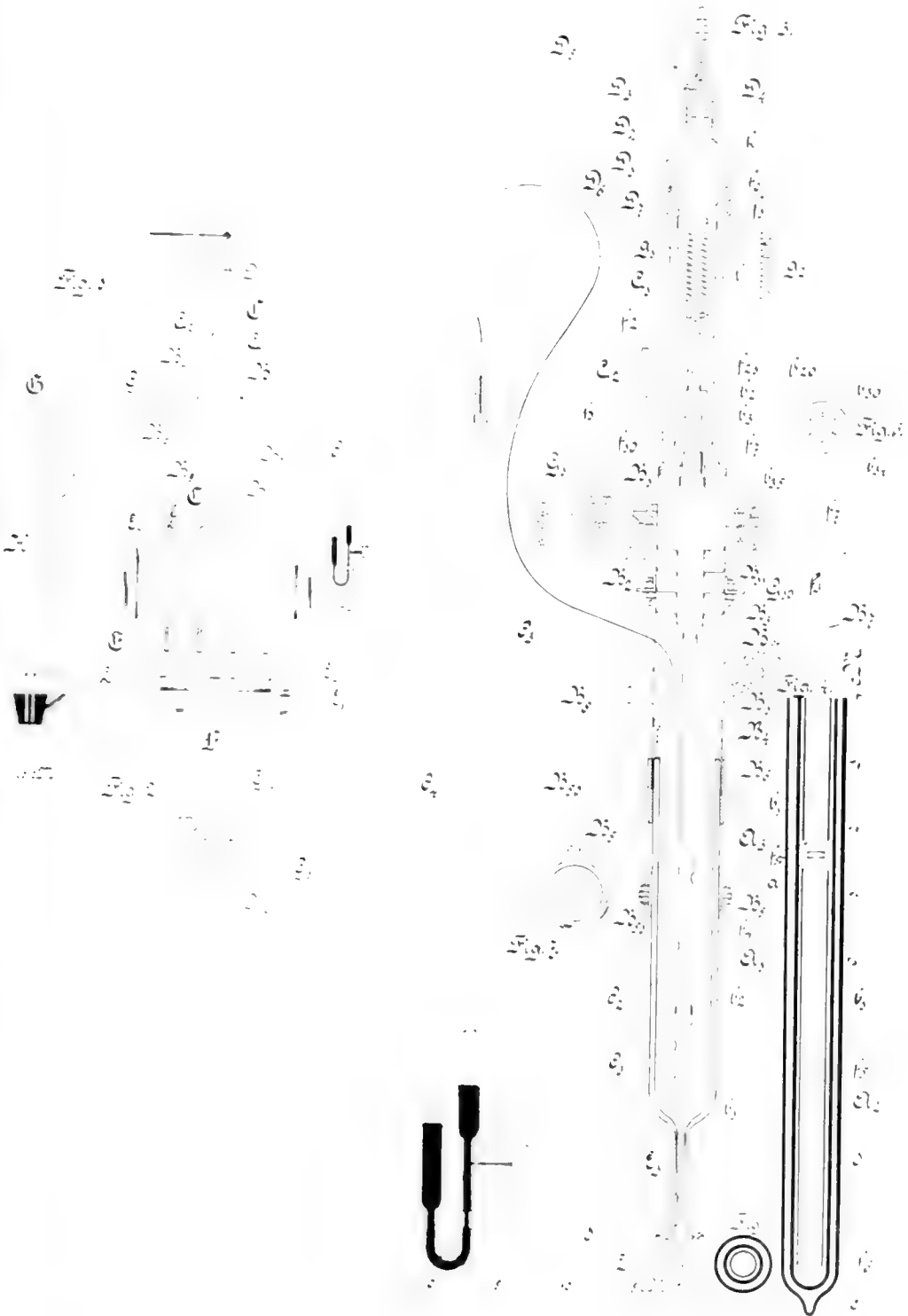


Fig. 2.



Wiskunde. -- De Heer SCHOTTE biedt voor de Werken der Akademie eene verhandeling aan van Mrs. A. BOOLE STOTT: *Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings.*"

Deze verhandeling wordt in handen gesteld van de Heeren SCHOTTE en CARDINAAL om daarover in de volgende maand rapport uit te brengen.

Aardkunde. — De Voorzitter biedt namens den Heer VAN BEMMELEN eene verhandeling aan van den Heer Dr. H. VAN CAPPELLE: „*Bijdrage tot de kennis van de landijsvormingen in de provincie Friesland en van het oudere glaciaire diluvium in den ondergrond van Noord-Nederland.*”

De Voorzitter stelt deze verhandeling in handen van de Heeren MOLENGRAAFF en MARTIN om daarover in de volgende maand rapport uit te brengen.

De vergadering benoemt den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN tot afgevaardigde naar de aanstaande vergadering der Internationale Associatie der Akademiën.

De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 26 Maart 1910.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

Ingekomen stukken, p. 800.

A. K. M. NOYONS: „Physiologische Sklerometrie”. (Aangeboden door de Heeren H. ZWAARDEMAKER en C. EYKMAN), p. 801. (Met 2 platen).

A. SMITS: „Een nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie”. (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en J. D. VAN DER WAALS), p. 808. (Met één plaat).

JAN DE VRIES: „Over poolfiguren met betrekking tot een vlakke kubische kromme”, p. 819.

J. BRUIN: „Over de oppervlakken, waarvan de asymptotische lijnen door quadraturen kunnen worden bepaald”. (Aangeboden door de Heeren HENDR. DE VRIES en JAN DE VRIES), p. 824.

J. G. SELESWICK: „Bijdragen tot de studie der serumanaphylaxie”. (4de Mededeeling). (Aangeboden door de Heeren C. H. H. SPRONCK en C. EYKMAN), p. 828.

L. E. J. BROUWER: „Over de structuur der perfecte puntverzamelingen”. (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 833.

W. VAN DER WOUDE: „De kubische involutie van den eersten rang in het platte vlak”. (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 842.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 851.

Vaststelling der Aprilvergadering op Vrijdag 29 April 1910, p. 851.

Errata, p. 852.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren KORTEWEG, HOOGWERFF en ZEEMAN dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2°. Missive van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 16 Maart 1910 met bericht dat bij Kon. Besluit van 10 Maart 1910 N°. 27 de Heer G. C. J. VOSMAER benoemd is tot gedelegeerde van de Nederlandsche Regeering bij het in Augustus 1910 te Graz te houden Internationaal Zoölogisch Congres.

Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Missive van denzelfden Minister d.d. 22 Maart 1910 ten geleide van een bij Z.Exc. door tusshenkomst van den Minister van Buitenlandsche Zaken ontvangen schrijven van den tijdelijken Zaakgelastigde der Argentijnsche Republiek betreffende een van 15—20 Juni a.s. te Buenos Aires te houden Internationaal Wetenschappelijk Congres. Z.Ex. zal gaarne dienaangaande het advies der Kon. Akademie vernemen en, voor 't geval haar deelneming van Regeeringswege gewenscht voorkomt, worden ingelicht of haar Nederlandsche geleerden bekend zijn, — en zoo ja, welke — bereid zich buiten bezwaar van 's Rijks schatkist naar genoemd Congres te doen afvaardigen.

Aan Z.Ex. zal geantwoord worden, dat ofschoon der Afdeeling geen Nederlandsche geleerden bekend zijn bereid op bovenstaande voorwaarden te worden afgevaardigd, deelneming van Regeeringswege haar gewenscht voorkomt.

4°. Missive van denzelfden Minister d.d. 23 Maart 1910 met de mededeeling dat Z.Exc. zich vereenigen kan met de strekking van het hem gezonden rapport, uitgebracht door de daartoe benoemde Commissie betreffende het Laboratorium op den Col d'Olen, doch nog gaarne nadere inlichtingen wenscht te ontvangen.

De missive wordt gesteld in handen der Commissie van rapport met het verzoek die inlichtingen aan Z.Exc. te verschaffen.

5°. Missive van den Minister van Landbouw, Nijverheid en Handel d.d. 7 Maart 1910 ten geleide van het rapport van de Commissie, ingesteld voor het onderzoek der aan de ijkkantoren voor de verificatie van gasmeters gebezigde toestellen.

Voor kennisgeving aangenomen.

6°. Missive van Z.Exc. den Minister van Waterstaat d.d. 7 Maart 1910 met bericht dat op de betaling van het subsidie voor geologische onderzoekingen over het loopende jaar orde is gesteld.

Voor kennisgeving aangenomen.

7°. 8^{ste} Circulaire van het Internationaal Botanisch Congres van 14—22 Mei 1910 te Brussel te houden.

8°. Uitnoodiging van het Bestuur van het „Congrès mondial des

associations internationales" om deel te nemen aan dat Congres, dat te Brussel gehouden zal worden in de maand Mei 1910.

Voor kennismeming voor de leden beschikbaar gesteld.

9°. Bericht van het overlijden van den Heer J. J. J. FRAIPONT, rector van de Universiteit te Luik.

Van dit bericht werd met deelneming kennis genomen.

10°. Schrijven van den Heer K. MARTIN, waarin hij met het oog op zijne aanstaande reis naar Ned. Indië verzoekt ontslagen te worden als lid der Commissie van rapport over de aangeboden verhandeling van Dr. H. VAN CAPPELLE.

Aan dit verlangen werd voldaan en in zijne plaats benoemt de Voorzitter den Heer H. E. DE BRUYN, aan wien daarvan zal worden kennis gegeven.

Physiologie. De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan van Dr. A. K. M. NOYONS, assistent bij het Physiol. Lab. te Utrecht: „*Physiologische Sklerometrie*”.

(Mede aangeboden door den Heer G. EYKMAN).

Reeds in eene vroegere mededeeling vond ik gelegenheid ¹⁾ de aandacht te vestigen op de weinig bestudeerde eigenschap der physiologische hardheid, in casu de hardheid der spieren. Daarbij werd er op gewezen, hoe hardheid is een collectief begrip, omvattend en typeerend in mineralogischen zin eene som van eigenschappen als: cohaesie, elasticiteit, plasticiteit, glijding, splijtbaarheid en breuk. Voor physiologische doeleinden kunnen slechts de drie kwaliteiten: elasticiteit, plasticiteit en cohaesie uit den aard der zaak in aanmerking komen. Vandaar dat definitie van physiologische hardheid en methode om ze te bepalen moeten gegrond zijn op de genoemde drie eigenschappen. Bij nader toezien blijkt dan ook AUERBACH's ²⁾ definitie van mineralogische hardheid niet zonder meer te kunnen worden overgedragen op de physiologische hardheid, als hij zegt: „Härte is eine Art von Festigkeit nämlich der Widerstand gegen die Bildung von Unstetigkeiten oder dauernden Deformationen beim Drucke zweier sphärischer Oberflächen gegen einander und kann Eindringungsfestigkeit genannt werden... Sie is quantitativ durch den Grenzeinheitsdruck im Mittelpunkte der Druckfläche bestimmt.”

¹⁾ NOYONS, A. K. M. Over de hardheidsbepaling bij spieren. Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam. Verslag van 12 Juni 1908.

²⁾ AUERBACH, FEL. Kanon der Physik. pag. 119. Leipzig 1899.

Definitie en methode ter bepaling gaan uit van het beginsel, — wat voor physiologische gevallen nagenoeg nooit gewenscht is —, dat het moment, waarop een blijvende deformatie optreedt, als maatstaf wordt gebruikt. Deze blijvende deformatie wordt in de mineralogie eisch voor de bepaling der *absolute* hardheid. Voor physiologische objecten moeten we dus naar een ander beginsel uitzien.

In bovengenoemde mededeeling kon ik een bruikbaar apparaat aangeven, waarmede verschillen in hardheid van spieren onder verschillende omstandigheden konden worden aangetoond. De slingeringen van een vallend hamertje, dat een spier beklopt, zijn onder zekere praemissen een maat voor de hardheid. Men kan het aantal hoorbare tikken, het aantal zichtbare slingeringen of de fotografisch geregistreerde slingeringen als maatstaf gebruiken. Bij de beoordeeling van de hardheid van het te onderzoeken object kunnen verschillende gegevens in de fotografische opname tot hun recht komen:

- 1°. het totaal aantal terugkaatsingen;
- 2°. vorm en hoogte van elke terugkaatsing afzonderlijk;
- 3°. som der hoogten van alle terugkaatsingen;
- 4°. verloop van de indringing van het hamertje in het object, hetgeen beoordeeld wordt uit het verloop der voetpunten der sklerometrische opname.

Met bovengenoemd apparaat, waarvoor ik thans ter onderscheiding van een ander door mij straks te beschrijven toestel, den naam „ballistischen sklerometer” kies, werden hardheidsveranderingen aangetoond o.a. bij spieren die doorstroomd werden met een galvanischen stroom, bij spieren, die bevoeid werden met verschillende isotonische zoutsoluties, bij m. gastrocnemii, die in tetanus gebracht werden zonder zich te kunnen verkorten, ten slotte bij spieren, die aan verschillende temperaturen waren blootgesteld. Ook onderling in wezen geheel afwijkende objecten van verschillende hardheid bieden bij het onderzoek met den ballistischen sklerometer fraaie hardheidsverschillen. Bijgaande figuren mogen dit toelichten. De objecten werden onderzocht met een hamertje van hetzelfde gewicht, vallend van steeds dezelfde valhoogte, terwijl in den loodrechten stand de bolle oppervlakte van den hamer in rust juist de oppervlakte van het object aanraakte. Figuur 1 geeft het ballistisch sklerogram van een *Hirudo medicinalis*, gedood door een verblijf van eenige uren in aetherdamp. Figuur 2 geeft een hardheidsbeeld van den uitgesneden m. gastrocnemius van *Rana esculenta* een uur na den dood. Figuur 3 is het ballistisch sklerogram van het oog van het varken eenige uren na den dood.

Men kan gelatine platen van dezelfde oppervlakte en dezelfde dikte

doch telkens van andere concentratie, die bij digitaal betasten volkomen zeker sensorische hardheidsverschillen aanbieden, niet den ballistische sklerometer bekloppen. Men vindt dan overeenkomstig met de concentraties verschillen in de ballistische sklerogrammen dier platen. De schijfvormige gelatine-platen hebben een oppervlakte van 47.3 cM² en een dikte van 2.11 cM.

GELATINE-PLATEN BEPAALD MET BALLISTISCHEN SKLEROMETER.

Gelatine-concentratie	Doorlaatbaarheid voor licht ¹⁾	Aantal terugkaatsingen	Som der hoogten van alle terugkaatsingen	Gemiddelde hoogte van eene terugkaatsing
2%	195	25	37.3 cM.	1.49 cM.
3	185	29	44.6	1.53
4	181	31	49	1.60
5	176	34	59.2	1.74
6	168 ⁵	36	72.4	2.01

Hoewel, zooals o.a. uit bovenstaande tabel blijkt, de sklerometrische krommen de onderlinge hardheidsverschillen zeer nauwkeurig aangeven, kan toch de ballistische methode niet zonder meer gebruikt worden ter bepaling van de absolute hardheid, daar het voorkomt dat objecten van verschillende bouw, die zich schijnbaar bij digitaal betasten gelijk hard voordoen, met den ballistischen sklerometer een afwijkenden indruk maken. Dit vindt hierin zijn grond, dat bij den ballistischen sklerometer vooral de elasticiteit van het object op den voorgrond treedt. Wanneer men hiermede rekening houdt is de methode wel bruikbaar.

Toch deed dit feit mij uitzien naar eene andere methode die wellicht evenredige gegevens zou aanwijzen bij het digitaal betasten enerzijds en bij het sklerometrisch onderzoek van hetzelfde object anderzijds.

De mineralogie beschikt over tal van methoden van statischen aard, die slechts zoolang voor de physiologie onbruikbaar zijn, als men vasthoudt aan de blijvende deformatie als maatstaf der hardheid. Men kan evenwel een anderen maatstaf aanleggen en als maat voor

¹⁾ Ik bepaalde de doorlaatbaarheid voor licht door na te gaan of een lettersoort *D* : 1 van SNELLEN's optotypen nog herkenbaar was bij bezichtiging door de gelatineplaat en twee rookglazen heen.

De cijfers zijn niet anders dan het gemiddelde product der nummers der twee rookglazen, die telkens twee aan twee noodig waren uit steeds dezelfde rookglazenreeksen om de grens der herkenning der letters te bereiken.

de hardheid aannemen de diepte der inzinking van een zeker voorwerp in het te onderzoeken object, terwijl dit indringende voorwerp op een bepaalde manier belast wordt.

Dit beginsel doet eenigszins denken aan de principes toegepast bij de hardheidsbepalingen in de mineralogie volgens BRINELL en LUDWIK.¹⁾ Men kan bij deze methode ook spreken van absolute hardheid, mits men de gegevens telkens herleidt tot de overeenkomstige resultaten, die men verkrijgt bij eene stof, welke men als eenheid van hardheid aanvaardt. Het beginsel komt op de volgende manier in toepassing bij den statischen sklerometer. Een conus van eboniet hangt door middel van een stangetje dat zich zonder stoornis en speling bewegen kan aan den eenen arm van een hefboompje. Die zelfde hefboomarm draagt verder een haakje om verschillende gewichten ter belasting op te hangen en voorts een weekijzeren plaatje, dat door een electro-magneet, gevoed met 4 à 6 volt, kan worden vastgehouden, waardoor de conus belet wordt in het object in te zinken. Bij verbreking van den stroom zinkt de conus in het te onderzoeken object en de mate dier inzinking wordt door den anderen hefboomsarm aangegeven met 30-voudige vergrooting, hetzij bij eenvoudige aflezing van den hefboomstand langs een meetlat of geregistreerd op een beroeten trommel of langs photographischen weg vastgelegd. Het registreerend deel van den toestel kan met den conus door een beugel-inrichting op en neer bewogen worden, zoodat men bij de bepaling steeds eerst instelt en uitgaat van den toestand, waarbij de conus de oppervlakte van het te onderzoeken object juist raakt zonder ook maar eenigszins te drukken. Het object zelf ligt op een vaste onderlaag. Om zeker te zijn dat steeds hetzelfde punt der oppervlakte wordt onderzocht kan men dit met een kleurstof even merken.

Om na te gaan of de vorm van het indeukende voorwerp invloed oefent op de mate der indeuking heb ik de indeuking in een zelfde voorwerp laten tot stand komen door middel van bollen van verschillende straal, bij telkens dezelfde serieën van belasting. Wanneer men een kromme ontwerpt van de grootte der indeuking, respectievelijk bij verschillende belastingen bekomen, vertoont deze kromme vooral bij de meer hardere voorwerpen een eigenaardig verloop. De kromme heeft bij den aanvang een kromlijnigen vorm, welke vorm later overgaat in een lineair verloop der kromme. Naarmate men nu met bollen van grooteren straal de indeuking tot stand brengt, treedt ook dit lineair verloop der kromme eerder in, maar tevens wordt hierdoor het absolute bedrag der indeuking geringer, omdat de werkzame kracht zich over een grooter grondvlak moet verdeelen.

¹⁾ Zie Dr. VIKT. PÖSCHL, Die Härte der festen Körper. Dresden 1909.

Per analogie hieraan zou men a priori mogen verwachten dat een plaatje, hetwelk men zou kunnen beschouwen als een bol met oneindig grooten straal als indringend object een nagenoeg lineair verloopende kromme in toto moest leveren. Inderdaad wijst het experiment zulks uit, mits aan de voorwaarde is voldaan, dat het plaatje groot genoeg is van oppervlakte. Doch zoodra daarentegen deze oppervlakte ook maar eenigszins aanzienlijk wordt, verkrijgt men een zoogerige indeuking dat de methode daardoor praktisch minder bruikbaar wordt. Den invloed van de straalgrootte van bol of schijf geven onderstaande krommen duidelijk aan, die ik uit statische sklerogrammen verkreeg, door telkens de diepte der indeuking bij een bepaalde belasting uit te zetten. Hieruit blijkt dat de conus nog wel het meest geschikt indringend voorwerp is, althans in dit geval, waar als te onderzoeken object gekozen werd een $\pm 5\%$ gelatine-plaat, die wat haar hardheid aangaat om en nabij de hardheid van den *M. gastrocnemius* van *Rana schommelti*.

Men kan den conus opvatten als een bolleje met zeer kleinen straal. Meet men bijv. de conuspunt onder het microscoop, dan ziet men dat die punt een zekere ronding heeft, waarvoor men een straal kan vaststellen. De indeuking verkregen met den conus bij een bepaalde belasting, doch in het coördinatensysteem ingevoerd als te zijn veroorzaakt door een bol met 0,4 mM. straal bij diezelfde belasting, bekomt een plaats overeenkomstig den theoretischen opzet, op de kromme van den conus, die experimenteel werd vastgesteld.

Door middel van den statischen sklerometer, met den conus als indringend voorwerp, heb ik gelatine platen van verschillende concentraties onderzocht op haar hardheid met de bedoeling om, zoo men wil, een gelatine plaat van bepaalde grootte, die een bepaalde indeuking verkrijgt onder een bepaald gewicht, als eenheid van hardheid aan te nemen. Gelatine toch is een vrij constante stof, voor ieder gemakkelijk verkrijgbaar (fig. 5). Over het algemeen krijgt men, indien men met niet al te groote belastingen werkt, regelmatige krommen, alleen de 2% gelatine blijkt een conus belast met 100 mgr. niet meer te kunnen dragen. De conus vernietigt klaarblijkelijk op een gegeven oogenblik den samenhang der gelatine, hetgeen zich kenbaar maakt door een plotselinge steilte in de kromme. Op dit moment is de druk bereikt, dien men in de mineralogie noemt den „Grenzeinheitsdruck“.

Men kan aan deze krommen ontleenen :

1°. Met hoeveel gewicht de conus belast moet worden om een gelatine-plaat van een bepaalde concentratie eene indeuking te doen ondergaan resp. 1 mM., 2 mM., 3 mM diep.

2°. Hoe diep een gelatine-plaat van een bepaalde concentratie wordt ingedeukt bij eene belasting van den conus met respectievelijk 100, 200, 300 en 400 mgr.

In de onderstaande tabellen vindt men deze bedragen aangegeven.

BELASTING VAN DEN CONUS BIJ BEPAALDE INDEUKING DER
GELATINEPLATEN.

Concentratie der gelatineplaat	Benoodigd gewicht voor 1 mM. indeuking	Benoodigd gewicht voor 2 mM. indeuking	Benoodigd gewicht voor 3 mM. indeuking
20/0	49 mgrm.	88 mgrm.	101 mgrm.
3	66	131	195
4	105	229	367
5	141	300	487
6	216	439	735
8	337	735	1125

INDEUKING BIJ BEPAALDE BELASTING VAN DEN CONUS.

Concentratie der gelatineplaat	Indeuking bij 100 mgr. belasting	Indeuking bij 200 mgr. belasting	Indeuking bij 300 mgr. belasting	Indeuking bij 400 mgr. belasting	Indeuking bij 500 mgr. belasting
20/0	∞	∞	∞	∞	∞
3	1.53	3.06	4.46	∞	∞
4	0.93	1.78	2.53	3.20	3.83
5	0.72	1.40	2.00	2.56	3.06
6	0.46	0.95	1.40	1.83	2.23
8	0.31	0.63	0.90	1.17	1.41

Ten slotte mogen hier medegedeeld worden de uitkomsten verkregen met den statischen sklerometer bij de drie objecten, waarvan reeds de ballistische sklerogrammen werden afgebeeld.

De *Hirudo medicinalis* onderging bij een belasting van den conus met 94 mgr. eene indeuking van 3,3 mM. en heeft dus een hardheid die geringer is dan een gelatine plaat van 2% gelatine.

De *M. gastrocnemius* van *Rana* biedt het volgend tabellarisch overzicht:

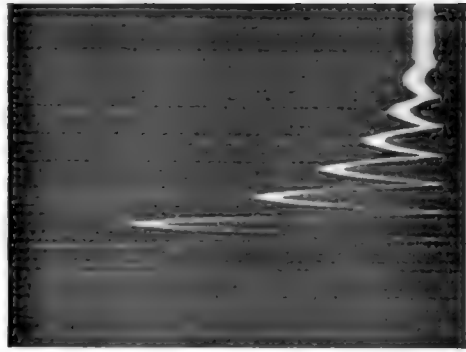
Photographische opnamen van den ballistischen sklerometer.

Fig. 1.



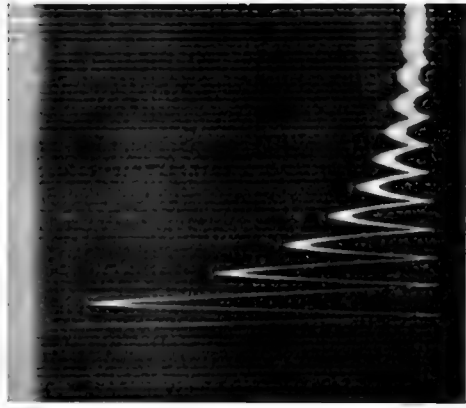
Hirudo medicinalis
door aetherdamp
gedood.

Fig. 2.



Uitgesneden *M. gastrocnemius*
van *Rana esculenta*.

Fig. 3.



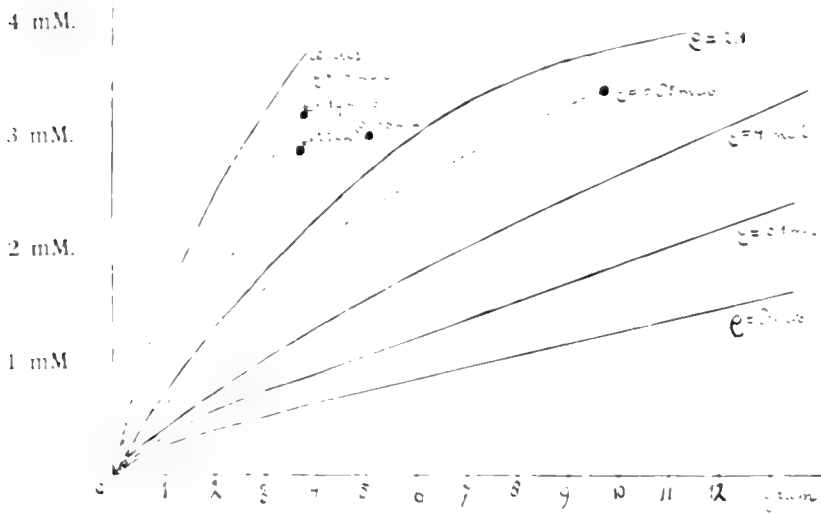
Oog van het varken eenige
uren na den dood.



Fig. 4.

Onderzoek van den statischen sklerometer

5 pCt. gelatineplaat met conus, bollen en schijven op hardheid onderzocht.



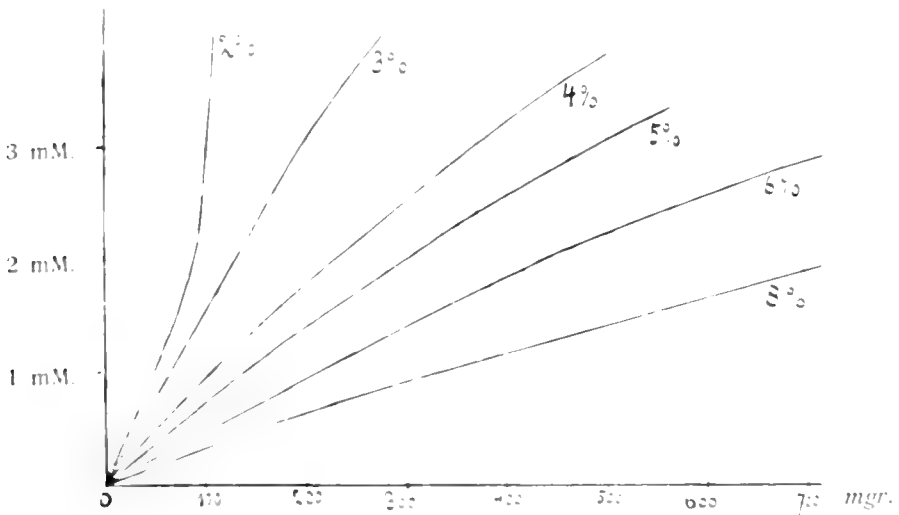
De ordinaten geven de diepte der indeuking weer.

De abscissen geven de belasting van het indeukende voorwerp aan.

De getrokken krommen laten het effect zien van den conus en de schijven; de gebroken krommen toonen den invloed van de bollen. Van bollen en schijven zijn de stralen telkens aangegeven.

Fig. 5.

Gelatineplaten van verschillende concentratie op hardheid onderzocht met den conus.



De ordinaten geven de diepte der indeking aan, de abscissen geven weer de belasting van het indeukende voorwerp.

HARDHEIDSBEPALING VAN
M. GASTROCNEMIUS VAN RANA.

Belasting van conus	Diepte der indeuking	In hardheid overeenkomend met gelatine-plaat van:
75 mgr.	0.78 mm.	3—4%
94	1.00	3—4
188	1.60	4
282	2.00	4—5
376	2.40	5

Hieruit mag men afleiden dat de spier bij dieper indrukken van den conus naar evenredigheid harder wordt, hetgeen waarschijnlijk op de aanwezigheid van de vele membranen in de spier, mag teruggevoerd worden. Dat deze verschillen bij dieper doordrukken geen fouten zijn in de methode, hiervoor pleit het feit dat men bij oppervlakkig en krachtiger digitaal betasten eveneens verschillen in hardheid kan opmerken.

HARDHEIDSBEPALING VAN HET
VARKENSOOG.

Belasting van conus	Diepte der indeuking	In hardheid overeenkomend met gelatine-plaat van:
94 mgr.	0.43 mm.	6 %
188	0.80	6—7
376	1.06	6—7
752	2.50	6—7

De hardheidsbepaling geschiedde door den conus te laten indrukken den koepel van de cornea van het varkensoog. Bij deze indeuking der cornea ziet men met zwakke vergrooiting microscopisch zeer eigenaardige optische veranderingen optreden.

Uit het voorafgaande blijkt hoe bij de hardheid van physiologische objecten men scherp onderscheid dient te maken tusschen relatieve en absolute hardheidsbepaling. Dit houdt ontegenzeggelijk direkt verband met het op den voorgrond treden van een der drie eigenschappen die in de hardheid worden samengevat, nl. de elasticiteit, plasticiteit en cohesie. Welk deel elk dier eigenschappen heeft in bepaalde gevallen en hoe ze in de sklerometrie wellicht te scheiden zijn, hoop ik later aan te toonen.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt een mededeeling aan van den Heer A. SMITS: „*Een nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie.*”

(Mede aangeboden door den Heer v. D. WAALS).

Inleiding.

In twee korte mededeelingen in het „Chemisch Weekblad” 7, 79 en 155 (1910) opgenomen heb ik reeds in hoofdtrekken de theorie aangegeven, waarvan hier een uitbreiding en experimenteele bevestiging volgen.

Vóórdat ik echter daartoe over ga zij het mij vergund met enkele woorden te zeggen, waar genoemde theorie op neer komt.

Bij de studie van het verschijnsel tautomerie heeft men door middel van het stollingsproces kunnen aantoonen, dat de vloeistofphasen van tautomere stoffen uit twee molecuulsoorten zijn saamgesteld.

Behalve echter door afzondering van verschillende vaste stoffen kan de samengesteldheid van een vloeistofphase ook nog op andere wijzen worden aangetoond, en zoo hebben onderzoekingen in deze richting tot het resultaat gevoerd, dat het als regel moet worden beschouwd, dat de vloeistofphase van een stof uit verschillende molecuulsoorten (ionen medegerekend) is opgebouwd.

BANCROFT¹⁾ en BAKHUIS ROOZEBOOM²⁾ hebben er op gewezen, dat, wanneer zoo'n stof zich unair gedraagt, de verklaring, hiervan deze is, dat de innerlijke evenwichtsinstelling in de homogene phase zóó snel verloopt, dat een verstoring van het innerlijke evenwicht door het optreden of verdwijnen van een nieuwe phase onmiddellijk wordt hersteld; het smeltpunt, kookpunt, kritischpunt enz. van een stof, die zich unair gedraagt heeft dan geen betrekking op een enkele molecuulsoort, maar op een evenwicht tussehen *verschillende* molecuulsoorten.

Door de leerlingen van BANCROFT n.l. CARVETH, SOCH en CAMERON³⁾ zijn verschillende tautomere stoffen onderzocht, waarbij bleek, dat het in sommige gevallen vrij gemakkelijk is aan te toonen, dat het bestaan van twee molecuulsoorten in de vloeistofphase, onder zekere omstandigheden, kan leiden tot een binair gedrag, want bij *snelle* afkoeling van de vloeistof kon het innerlijke evenwicht de tempera-

1) Journ. Phys. Chem. 2, 143 (1898).

2) Zeitschr. f. phys. Chem. 28, 289, (1899).

3) Journ. Phys. Chem. 2, 159 (1898).

ibid. 2, 364 (1898).

ibid. 2, 409 „

tuur niet volgen, en de massa stelde bij een temperatuur, die van het unaire, stabiele smeltpunt verschilde, doordat dan een punt werd gerealiseerd van een der smeltlijnen van het pseudobinaire stelsel $A + B$, dat bij de onderzochte stoffen steeds een eutecticum vertoonde.

Zoals duidelijk is, vinden wij het unaire stabiele smeltpunt daar, waar de lijn voor het innerlijke vloeistofevenwicht één van de smeltlijnen van het pseudo-binaire stelsel ontmoet.

Merkwaardig is het nu, zoo schreef ik reeds, dat niemand heeft opgemerkt tot welke verrassende resultaten men komt, wanneer men, hetgeen stellig zoo is, aanneemt, dat zich niet alleen steeds in meerdere of mindere mate mengkristallen vormen, maar dat buitendien het *innerlijke* evenwicht, dat in de vloeistofphase bestaat, zich in de vaste phase voortzet.

Van deze onderstelling uitgaande komt men n.l. tot een samenhang tusschen *heterogene* en *homogene* allotropie, die in Fig. 1 is aangegeven en waaruit blijkt, dat het verschijnsel van enantiotropie *ontmenging* in den vasten toestand beteekent, welk verschijnsel optreedt, wanneer de lijnen voor de stabiele en metastabiele vaste evenwichten s_2q en s_1n de mengkristallijnen ep en dm van het pseudobinaire stelsel ontmoeten.

Bij monotropie hebben genoemde ontmoetingen tusschen het unaire en pseudobinaire stelsel niet plaats *onder* maar *boven* de unaire smeltpunttemperatuur en dat is de reden, waarom in dit geval de tweede lijn voor de vaste innerlijke evenwichten overal metastabiele toestanden aangeeft.

Uitgaande van het evenwichtsprincipe van GIBBS dat zegt, dat een stelsel van stoffen zich bij konstante temperatuur en druk zóó schikt, dat de thermodynamische potentiaal een minimum is, heb ik verder laten zien hoe scherp men ook langs dien weg het verband tusschen het pseudo-binaire en unaire stelsel kan aangeven, wanneer men bedenkt, dat een innerlijke evenwichtstoestand altijd in het minimum eener potentiaallijn gelegen moet zijn.

Voorts werd het geval beschouwd, dat de driephasentemperatuur ligt tusschen de smeltpunten der stoffen A en B . Na ook voor dit geval de verschijnselen van enantiotropie en monotropie te hebben besproken wees ik er ten slotte op, dat, wanneer A en B in vasten toestand in alle verhoudingen mengbaar zijn, *heterogene allotropie* uitgesloten is en alleen *homogene allotropie* kan voorkomen, *tenzij* in het pseudobinaire stelsel bij lagere temperatuur ontmenging optreedt.

Bespreking der innerlijke evenwichtslijnen.

Na deze inleiding, die mij ter oriëntering van den lezer nood-

zakelijk voorkwam, wil ik nog enkele oogenblikken stil blijven staan bij fig. 1 om de richting der innerlijke evenwichtslijnen te bespreken.

Uit den loop van de lijn $S'_3 S'_1$ volgt, dat hier aangenomen is, dat over het overeenkomstige temperatuurtraject het evenwicht bij temperatuurverhoogen naar B verschuift en dat dus

$$A \rightleftharpoons B - a \text{ cal}$$

of in woorden de transformatie van links naar rechts endotherm is.

Bij toepassing van de verg.

$$\frac{d \ln K}{dt} = \frac{Q}{RT^2}$$

weten wij dus, dat in het onderstelde geval Q positief is.

Nu kunnen wij Q bij verwaarloozing van den uitwendigen arbeid splitsen in twee differentieele mengwarmten, waarvan één met het negatieve teeken omdat het een ontmenging betreft, en verder in een transformatiewarmte, dus

$$\begin{aligned} Q &= - (Q_m)_A + Q_r + (Q_m)_B \\ (Q_m)_A &= \text{differentieele mengwarmte van } A \\ (Q_m)_B &= \text{,, ,, ,, } B \\ Q_r &= \text{mol. transformatiewarmte.} \end{aligned}$$

Het is hierbij van belang er op te wijzen, dat daar $(Q_m)_A$ en $(Q_m)_B$ verschillend van teeken zijn de *mogelijkheid* bestaat, dat Q een ander teeken heeft als Q_r , dit zou b.v. voor kunnen komen wanneer Q_r zér klein was en dan zouden wij het bijzondere geval hebben, dat b.v. wanneer Q negatief en Q positief was, het evenwicht bij temperatuurverhoogen van B naar A verschoof, terwijl de transformatie van A in B op zich zelf endotherm was; dit zal echter wel zelden voorkomen.

Laten wij deze kwestie voorloopig rusten, dan valt er op te merken, dat er in het punt S'_1 aangekomen, ontmenging optreedt, waarbij naast S'_1 een andere vaste phase, S'_2 ontstaat. Hierbij kunnen zich nu weer twee gevallen voordoen.

Meestal zal de nieuw gevormde vaste phase S'_2 een anderen kristalvorm bezitten als S'_1 , maar mogelijk is het, dat beide vaste fasen isomorf zijn, want zooals bekend is kunnen ook isomorfe stoffen een discontinue mengingsreeks geven; doet zich dit laatste, het eenvoudigste geval, voor, dan zal de overgangswarmte de som zijn van een ontmengwarmte, een transformatiewarmte en een mengwarmte¹⁾, terwijl hier nog een andere warmte-grootheid bijkomt n.l. die, welke met de kristalvormverandering gepaard gaat, wanneer S'_1 en S'_2 *niet* isomorf zijn.

1) Later kom ik op deze en de voorgaande splitsing uitvoeriger terug.

Vervolgen wij thans de innerlijke evenwichten *boven* het overgangspunt, dan is het te verwachten, dat de lijnen $S'_2 q$ voor de vaste, en $l_2 k$ voor de vloeibare innerlijke evenwichten dezelfde richting zullen hebben als $S'_2 S'_1$, zooals dan ook in Fig. 1 is aangenomen.

Nu heeft Soch bij het onderzoek van *benzil-orthocarbonzuur* echter gevonden, dat de lijn voor het innerlijke vloeistofevenwicht de smeltlijn van de hoogst smeltende modificatie *B* ontmoet, en bij hogere temperaturen naar den *A*-kant loopt. Verder vond hij, dat *A* bij 65° overgaat in *B* en deze twee feiten nu combineerende, komt hij tot de conclusie dat het warmteteeken van de omzetting



tusschen het overgangspunt en het unaire smeltpunt (137°) moet zijn omgekeerd.

Wanneer de pseudo-binaire T_xv -figuur voor deze stof met Fig. 1 overeenkomt, hetgeen nog bewezen moet worden, dan moet men natuurlijk ook bij deze theorie tot hetzelfde besluit komen, doch ik wil er hier op wijzen, dat deze conclusie op 't oogenblik nog niet noodzakelijk is, daar, hoewel niet waarschijnlijk, de mogelijkheid bestaat, dat de mengkristallijn dm van het pseudo-binaire stelsel dezelfde richting heeft als ep ; in dit geval zouden de drie evenwichtslijnen S'_3, S'_1, S'_2, S_2 en $l_2 k$ toch nog dezelfde richting kunnen hebben en het teeken van Q dus niet behoeven om te keeren.

Vatten wij de kwestie van de omkeering van het warmteteeken algemeen op, dan valt er op 't oogenblik reeds dit van te zeggen. Wanneer *A* en *B* *isomeren* zijn, zooals bij benzilorthocarbonzuur, dan lijkt een omkeering van het teeken van Q *mogelijk*, omdat Q_r in dit geval vermoedelijk klein is¹⁾. Hebben wij echter met het verschijnsel *polymerie* te doen, dan kunnen wij met groote waarschijnlijkheid verwachten, dat Q_r steeds zal praedomineeren, en dat de lijnen voor de innerlijke vaste en vloeistof-evenwichten steeds zóó zullen loopen, dat het evenwicht bij temperatuursverhoging naar den kant van de minder saamgestelde stof verschuift.

Hierdoor worden wij tevens tot de vraag gevoerd, hoe dan de T_xv -figuur zal zijn voor het geval de stof *B* een *polymeer* is van *A*, en een overgangspunt bestaat.

Fig. 2 laat zien, dat wanneer het pseudo-binaire stelsel een eutecticum bezit, de lijn voor de innerlijke vloeistof-evenwichten de smelt-

1) Door de groote verschuiving van het innerlijke evenwicht bij de overgangstemperatuur is het mogelijk, dat terwijl Q_r *beneden* deze temperatuur praedomineert, *daarboven* het gedrag is omgekeerd.

Ook Q_r kan van teeken veranderen, doch dat komt mij minder waarschijnlijk voor.

lijn van de minder saamgestelde stof moet ontmoeten, omdat alleen onder deze omstandigheden alle lijnen voor de innerlijke evenwichten bij temperatuurverhooging naar den *A*-kant kunnen loopen.

Toch zal m. i. ook deze figuur niet juist blijken te zijn, daar er een onderstelling in opgesloten ligt, die hoogst onwaarschijnlijk is.

Wanneer *B* een polymeer van *A* is, en het pseudo-binaire stelsel een eutecticum bezit, dan wil dit zeggen, dat er vloeistoffen bestaan (*ac*) die méér polymeer bevatten dan de koëxisterende vaste fasen (*ad*) en dit nu is zéér onwaarschijnlijk, zóó zelfs, dat wij deze figuur geheel kunnen laten vervallen, niettegenstaande HOLLMANN ¹⁾ beweert bij het stelsel *acetaldehyde-paraldehyde* een eutecticum gevonden te hebben. Vermoedelijk berust deze bewering van HOLLMANN dan ook op minder betrouwbare waarnemingen, want mijn assistent, de Heer DE LEEUW, die op mijn verzoek genoemde bewering toetste, heeft haar *niet* bewaarheid gevonden.

Voor het geval *B* dus een polymeer van *A* is, en beide stoffen in vasten toestand *niet* in alle verhoudingen mengbaar zijn, moeten wij besluiten tot het bestaan van een *T_x*-figuur als aangegeven wordt door Fig. 3, waarbij de driephasentemperatuur gelegen is *tusschen* de smeltpunten der pseudo-komponenten.

Overall bezit nu, bij deze aanname, de vaste phase méér van het polymeer *B*, dan de koëxisterende vloeistof-phase, en treedt nu in het unaire stelsel een overgangspunt op, dan moet de loop der innerlijke evenwichtslijnen zijn, zooals aangegeven wordt door *kl₂*, *S₂S₂* en *S₁'S₂*.

Ontmoette de lijn *kl₂* de smeltlijn van *B*, dan zou alleen monotropie mogelijk zijn, daar bij enantiotropie in dit geval omkeering van het warmte-teeken zou moeten plaats grijpen, hetgeen hier hoogst onwaarschijnlijk is.

Experimenteetele bevestiging.

Het is duidelijk, dat deze theorie eischt, dat elke stof, die een overgangspunt vertoont uit twee verschillende molecuulsoorten moet bestaan, die bij elke temperatuur met elkaar in evenwicht zijn.

Denken wij aan de stof HgJ_2 , waarvan de *roode* modificatie bij 127° overgaat in de *gele*, dan moeten wij dus twee verschillende molecuulsoorten aannemen, waarvan de eene aanleiding geeft tot de vorming van *rood* en de andere tot die van *geel* HgJ_2 .

Het onderzoek van deze stof dat in gemeenschap met den Heer S. C. BOKHORST chem. cand. werd uitgevoerd heeft nu tot een uiterst merkwaardig resultaat geleid.

Dat zou blijken, dat de stof bij *snel* werken haar binair karakter

¹⁾ Zeitschr. f. phys. Chem. 43, 129 (1903).

zou verraden, dat werd verwacht, doch dat hier juist het geval zou worden gevonden, waarop ik wel reeds wees, maar dat ik toch als een uitzondering beschouwde, dat was in hooge mate verrassend.

Ter wille van de duidelijkheid zullen de waargenomen verschijnselen hier aan de hand van de schematische fig. 4 worden besproken, waarin αP , gele en βP , roode fosfor beteekent.

Terwijl bij 127° de roode phase overgaat in de gele, welke nieuwe phase tot circa 180° intensief geel blijft, namen wij bij verdere verhitting waar, dat deze phase, eerst nauwelijks zichtbaar maar later zeer duidelijk, steeds rooder wordt, om bij de smelttemperatuur 255° , 4 in een donker roode vloeistof over te gaan.

Dit verschijnsel, dat ook bij zéér langzame temperatuurstijging optrad, werd op verschillende wijzen met het bloote oog en door middel van het microscoop bestudeerd, waarbij bleek, dat deze kleurverandering *continu* verloopt en niet te wijten is aan een tweede overgangspunt.

Deze continue kleurverandering in een betrekkelijk klein temperatuur-traject maakte het dus waarschijnlijk, dat de lijn voor de vaste innerlijke evenwichten boven het overgangspunt eerst loodrecht omhoog loopt om daarna sterk naar den rooden kant om te buigen, en dieht bij de as van de roode modificatie de mengkristallijn van het pseudo-binaire stelsel te ontmoeten.

Daar deze innerlijke evenwichtslijn de *T-x*-figuur dus over een groot concentratie-traject schijnt te doorloopen, wees dit reeds op een van boven gesloten ontmenggebied in de pseudo-binaire figuur, en dus tevens op een continue mengkristallijn *acb*.

Om nu deze onderstelling nader te toetsen werden de volgende proeven genomen met HgJ_2 , dat zich in dunwandige nauwe capillairen of in zogenaamde alcaloid-buisjes bevond, dit was n.l. geheel onverschillig, want hoe ook genomen, steeds leverde de proef hetzelfde resultaat op.

Het HgJ_2 werd in deze buisjes in een smeltapparaatje verhit tot een zekere temperatuur *boven* het overgangspunt en daarna plotseling overgebracht in een oliebad van lagere temperatuur, doch altijd *boven* het overgangspunt gelegen.

De overwegingen, die ons tot deze proeven voerden, waren de volgende.

Is het mogelijk de afkoeling zóó snel te doen plaats grijpen, dat het innerlijke evenwicht de temperatuur niet kan volgen, dan moet het pseudo-binaire karakter voor den dag komen en moet de stof, in het ontmeng-gebied tredende, zich ontmengen.

Stel dat wij uitgaan van het innerlijke evenwicht p en dit plotseling afkoelen waarbij niet de evenwichtslijn, doch de lijn pS_1 wordt

gevolgd, dan zal naast de gele phase S_3 de roode phase S_4 optreden en duidelijk zichtbaar moeten zijn.

Dit tweefasens-stelsel zal sterk metastabiel zijn, zoodat niet te verwachten is dat het lang te houden zal wezen, integendeel, men kan met zekerheid voorspellen, dat deze toestand zéér spoedig zal overgaan in het eenige stabiele evenwicht, dat op de lijn SS_1 gelegen moet zijn.

Gaan wij uit van het innerlijke evenwicht q , dat rechts van het kritische mengpunt K gelegen is, dan kan de ontmenglijn in S_3 worden bereikt, en dan moet naast de phase S_3 de phase S_5 optreden die lichter van kleur is.

Deze verschijnselen werden nu, zooals uit onderstaande tabel blijkt, niet alleen met groote duidelijkheid waargenomen, maar buitendien kon reeds bij deze voorloopige proeven worden geconstateerd, dat het mengpunt K boven 147° gelegen moet zijn.¹⁾

Temp. HgJ_2	Plotseling afgekoeld tot de temp.	Opmerkingen
200°	130°	Nog geen ontmenging.
205°	"	Ontmenging, <i>roode</i> phase verschijnt doch is na slechts enkele seconden weer verdwenen en de geheele massa is weer geel.
207°	"	"
210°	"	"
212°	"	"
215°	"	"
225°	"	Ontmenging doch nu ontstaat de <i>gele</i> phase en na enkele seconden is alles geel.
230°	"	Hetzelfde verschijnsel en nog duidelijker.
.....
212°	140°	Ontmenging, <i>roode</i> phase verschijnt enz.
212°	145°	"
212°	147°	Geen ontmenging meer waar te nemen.

Terwijl uit deze proeven volgt, dat de T, v -figuur van het stelsel HgJ_2 boven de overgangstemperatuur zoo wezen zal als hier schematisch is aangegeven, bleef nog de vraag te beantwoorden hoe de rest van de fig. d. w. z. onder het overgangspunt er uit ziet.

Daar het evenwicht zich echter bij temperaturen onder 100° buiten-

¹⁾ Dit onderzoek wordt in verschillende richtingen voortgezet.

gewoon langzaam instelt, kan in deze mededeeling het antwoord nog niet worden gegeven ¹⁾).

De gestippelde lijnen onder de overgangstemperatuur geven dus niets meer aan dan een vermoeden. Voor het hier voor oogen gestelde doel is het gemis aan zekerheid *beneden* de overgangstemperatuur echter van ondergeschikt belang, daar de waargenomen verschijnselen bij hogere temperaturen een duidelijk bewijs leveren voor de juistheid van de theorie.

Voordat ik van de stof HgJ_2 afstap, wil ik er nog op wijzen, dat wanneer men de evenwichten niet bij konstanten druk, maar bij de wisselende dampspanning beschouwt, in de T, v -figuur ook nog de damplijnen opgenomen dienen te worden, die aan den kant van geel HgJ_2 liggen, daar zich uit den damp altijd de *gele* phase afzet.

Als wij ons de vraag stellen of de literatuur resultaten vermeldt die deze theorie kunnen steunen, dan luidt het antwoord bevestigend. Dat zijn voornamelijk de resultaten verkregen bij het onderzoek van de *zwavel* ²⁾ en dat van de *fosforus* ³⁾.

In het stelsel *zwavel* hebben wij twee verschillende kristallijne modificaties en buitendien nog een derde modificatie S_{II} , die tot heden nog niet in gekristalliseerden toestand verkregen is kunnen worden.

In het licht van deze theorie beschouwd moeten wij dus *drie* verschillende molecuulsoorten aannemen, en daar wij *zwavel* kennen als een stof die *zér* traag is, kunnen wij met groote waarschijnlijkheid aannemen, dat *zwavel* niet pseudo-binair maar pseudo-ternair is d.w.z. zich ternair zal kunnen gedragen.

Dit zij hier echter terloops opgemerkt, daar deze beschouwingen voor hetgeen hier volgt achterwege kunnen blijven.

Bepalen wij ons thans tot de T, v -figuur van het stelsel S_{II} en rhombische zwavel S_R (Fig. 5), dan valt er op te merken, dat door extrapolatie voor het *unaire* smeltpunt $110^{\circ},6$ en voor het smeltpunt van zuivere rhombische zwavel $112^{\circ},8$ gevonden is.

Verder bleek echter, dat wanneer van rhombische S werd uitgegaan die zich bij 90° in evenwicht had gesteld een smeltpunt van

¹⁾ Dompelt men een buis met rood HgJ_2 in vloeibare lucht, dan wordt de kleur wel veel lichter n.l. oranje, maar deze kleur-verandering heeft niets te maken met een verschuiving van het evenwicht.

Neemt men een mengsel van *geel* en *rood* HgJ_2 en koelt men dit tot -190° af, dan verandert de gele kleur in wit en de roode in oranje-geel. Bij opwarming tot kamertemperatuur vindt men de heterogene massa, vergeleken met den begin-toestand, geheel onveranderd terug.

²⁾ KRUYS, Z. f. phys. Chem. **64**, 513 (1908).

³⁾ CONEN en OLIE, Chem. weekblad **6**, 821 (1909).

110°,9 werd gevonden, terwijl het smeltpunt 111°,4 bedroeg, wanneer het innerlijke evenwicht zich bij $\pm 65^\circ$ had ingesteld.

Dit zijn resultaten die de hier gegeven theorie bevestigen, want zij wijzen er op, dat wij hier te doen hebben met een lijn SS_1 voor het vaste innerlijke evenwicht, die bij temperatuurverhoging naar links loopt. Deze lijn laat immers zien, dat naar mate men bij snel werken uitgaat van een bij *lagere* temperatuur ingesteld innerlijk evenwicht, deze phase bij een *hoogere* temperatuur zal beginnen te smelten, hetgeen hier ook werd waargenomen.

De lijn voor het innerlijke vloeistofevenwicht loopt ook naar links, zoodat beide evenwichtslijnen dezelfde richting hebben.

Hoewel de zwavel nog meer bewijsmateriaal bijbrengen kan, gaan wij nu over tot de fosforus.

Zoals reeds door COHEN en OLE werd opgemerkt wijzen onderzoekingen van TROOST en HAUTEFEUILLE, LEMOINE, HITTOFF en van hen er op, dat wij bij de fosfor te doen hebben met vaste innerlijke evenwichten tusschen witte en violette fosfor.

Beschouwen wij de volgende uitkomsten der soort. gew.-bepalingen.

spec. gew. van roode P verkregen bij	550° = 2,25
„ „ „ „ „ „ „	450° = 2,28
„ „ „ „ „ „ „	357° = 2,22
„ „ „ „ „ „ „	255° = 2,20
„ „ „ „ „ „ „	215° = 2,19

dan zou men, overwegende dat het spec. gew. van witte $P = 1,82$ is, en dat van violette op circa 2,34 gesteld kan worden, tot de conclusie kunnen komen, dat de lijn voor de innerlijke vaste evenwichten bij temperatuurverhoging tot 450° naar den violetten kant loopt.

Daar echter uit de proeven van COHEN en OLE volgt, dat, wanneer roode P van een hoogere op een lagere temperatuur werd gebracht het spec. gew. over het algemeen *niet* terugging, is het duidelijk, dat zij geen evenwichtstoestanden onderzocht hebben, en dat wij dus uit bovengenoemde resultaten geen conclusies mogen trekken omtrent den loop van de lijn der innerlijke evenwichten. Wat echter het bestaan dezer innerlijke evenwichten betreft, daaraan valt niet meer te twijfelen.

Gaan wij dus hiervan uit, en denken wij dan aan het door CHAPMAN ¹⁾ waargenomen verschijnsel, dat roode P bij smelting een kleurlooze vloeistof geeft d. w. z. een vloeistof die volkomen gelijk op gesmolten gele P , dan laat zich in grove trekken een T, x -figuur voor het pseudobinaire en unaire stelsel ontwerpen, waarbij echter nog onzekerheid bestaat omtrent het al of niet voorkomen van een eutecticum,

¹⁾ Journ. Chem. Soc. 75, 743 (1899).

In fig. 6 is aangenomen dat roode $P(\beta P)$ een polymeer is van witte $P(\alpha P)$, en daarom werd geen eutecticum geteekend. In deze figuur is tot uitdrukking gebracht het door CHAPMAN waargenomen verschijnsel, want de roode vaste fase zal tot het unaire smeltpunt verhit overgaan in een vloeistof l_2 die geheel aan den kant van de witte P ligt. Verder zien wij uit deze teekening, dat gesmolten gele P ongeveer dezelfde samenstelling heeft als gesmolten roode P , en dat gesmolten gele P onderkoelde vloeibare roode P beteekent.

Toepassingen.

Behalve de hier genoemde verschijnselen zijn er nog andere, die in het licht van deze theorie beschouwd een plausible verklaring vinden. Ik heb hier het oog op de vertragsverschijnselen voor zoover deze alleen optreden bij snel werken.¹⁾

Beschouwen wij dan allereerst het verschijnsel van *onderkoeling* en *overstolling*, voor zoover deze alleen worden waargenomen bij snelle temperatuurverandering, dan geeft fig. 7 een bevredigende verklaring.

Uitgaande van het innerlijke vloeistofevenwicht p zal bij snelle afkoeling niet de evenwichtslijn pl_2 maar een andere lijn b.v. pl_3 gevolgd worden, en voorbij l_3 gekomen, is de toestand dan niet alleen unair, maar ook pseudobinair *metastabiel*.

Laten wij ter vereenvoudiging aannemen, dat in het pseudo-binaire stelsel geen noemenswaardige vertraging optreedt, dan zal de stof bij l_3 stollen en er zet zich de vaste stof S_3 af.

Nu is dit twee fasen-evenwicht in het pseudobinaire stelsel in hooge mate metastabiel.

In het unaire stelsel kan onder konstanten druk evenwicht tussehen vloeistof en vaste stof slechts bij één temperatuur bestaan en nu is het regel, dat een metastabiele toestand als die van het stelsel $l_3 + S_3$ onmiddellijk wordt opgeheven. Zoo zien wij b.v. dat een oververzadigde oplossing in contact met de stof, die deze oplossing moet afzetten om in den stabielen toestand over te gaan, meestal onmiddellijk deze stof afscheidt (enten).

Het metastabiele twee-fasen-evenwicht $l_3 + S_3$ zet zich dus om in den stabielen toestand $l_2 + S_2$, en daar dit een proces is, dat warmte geeft, stijgt de temperatuur tot het unaire smeltpunt.

Uitgaande van het vaste innerlijke evenwicht q krijgen wij juist het tegenovergestelde daar de stof dan bij snelle opwarming te hoog smelt, zooals dit reeds bij rhombische zwavel is waargenomen.

¹⁾ De eigenaardige verschijnselen, die bij *snel* werken ook bij meer ingewikkelde stelsels, zooals $Fe + C$ optreden, zullen op dezelfde wijze moeten worden verklaard.

Loopen nu de innerlijke evenwichtslijnen zooals in Fig. 8, dan kan de vloeistof bij te snelle afkoeling te vroeg stollen, de vaste stof bij te snelle opwarming te vroeg smelten en het resultaat is dan, dat wij bij een *volkomen* zuivere stof een stol- of smelttraject kunnen vinden, hetgeen bij organische stoffen, die zich zoo langzaam in evenwicht stellen, vermoedelijk dikwijls voorkomt.

Wat nu nog de vertragsverschijnselen bij het overgangspunt betreft, behoef ik slechts te verwijzen naar Fig. 9, die nu ook zonder toelichting duidelijk zal zijn.

Voorts is het bijna overbodig op te merken, dat wanneer een stof niet *bi-* maar *tri-* of *polymoleculair* is, de hier besproken verschijnselen in wezen hetzelfde blijven.

Tenslotte wil ik er nog op wijzen, dat deze theorie de eerste plausible verklaring geeft van *de metastabiliteit der metalen*.

Hierbij valt nl. op te merken, dat de afkoeling der gestolde massa's zoodanig verloopt, dat het innerlijke vaste evenwicht de temperatuur stellig niet kan volgen, en dit is een van de redenen waarom de metalen, zooals wij deze in handen krijgen, bijna altijd in metastabielen toestand verkeeren. Verder dient in het oog te worden gehouden, dat gesteld men heeft een metaal, dat zich in innerlijk evenwicht bevindt, en men onderwerpt het aan een of andere mechanische bewerking, een noodzakelijk gevolg hiervan zijn zal, dat het metaal metastabiel wordt, omdat in stabielen toestand een drukverandering over 't algemeen met een verschuiving van het innerlijk evenwicht gepaard gaat, welke echter tengevolge van den inwendigen weerstand *in het geheel niet* optreedt, of door de kleine transformatie snelheid eerst *na zeer langen tijd* zal hebben plaats gegrepen.

In bovengenoemde omstandigheden zien wij dan ook tevens een verklaring van het feit, dat het bijna nooit voorkomt, dat twee stukken van hetzelfde metaal volkomen identiek zijn, want dit zou alleen dan kunnen voorkomen wanneer de innerlijke toestand, stabiel of metastabiel, volkomen dezelfde was.

De hier besproken metastabiele toestanden kunnen nu evenals zoo vele andere door verschillende invloeden, zooals temperatuurverhoging, trilling, contact met den stabielen toestand, enz., in dezen laatsten worden overgevoerd, waarbij de plaatsgrijpende transformatie zich openbaart in een rekristallisatie.¹⁾

Amsterdam, Maart 1910.

Anorg. Chem. Lab. der Universiteit.

¹⁾ Het is te verwachten, dat deze metastabiliteit niet alleen zal worden aangetroffen bij metalen en metaalalliages, maar ook bij andere stoffen, die verkregen zijn door snelle afkoeling en stolling van gesmolten massa's.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan:
„Over poolfiguren met betrekking tot een vlakke kubische
kromme”

1. Wordt een vlakke kubische kromme γ^3 symbolisch door $a_x^3=0$ aangewezen, dan stelt $a_x a_y a_w = 0$ de poolrechte p_{xy} der punten X en Y voor, d.i. de poollijn van X t.o.v. de poolkegelsnede π_y van Y , en tevens de poollijn van Y t.o.v. de poolkegelsnede π_x .

De drie poolrechten p_{xy} , p_{xz} en p_{yz} zullen in een punt W samenkomen als voldaan is aan de drie betrekkingen

$$a_x a_y a_w = 0, \quad a_x a_z a_w = 0, \quad a_y a_z a_w = 0 \dots \dots (1)$$

Door eliminatie der coördinaten w_k vindt men hieruit

$$(abc) a_x a_y b_x b_z c_y c_z = 0 \dots \dots (2)$$

Bij twee gegeven punten X, Y behoort dus een kegelsnede γ_{xy}^2 als meetkundige plaats van het punt Z ; zij gaat tevens door X en Y , want als Z met X samenvalt, heeft men

$$(abc) a_x a_y b_x^2 c_y c_x - (cba) c_x c_y b_x^2 a_y a_x - - (abc) a_x a_y b_x^2 c_y c_x = 0.$$

Daar we (2) door $(abc) a_x a_y c_x c_z b_y b_z = 0$ dus ook door $(abc) a_x a_y b_z c_z (b_x c_y - b_y c_x) = 0$ kunnen vervangen, wordt γ_{xy}^2 ook voorgesteld door $(abc) a_x a_y b_z c (bc\xi) = 0$, waar ξ_k de coördinaten der rechte XY zijn. De symbolische grootheden $a_k a_x a_y$ zijn blijkbaar de coördinaten η_j der poolrechte p_{xy} . Bijgevolg kan (2) ook vervangen worden door

$$(bc\xi) (bc\eta) b_z c_z = 0 \dots \dots (3)$$

Hieruit volgt dat de kegelsnede γ_{xy}^2 de *poloconica* $\pi_{\xi\zeta}$ der rechten ξ en η is.

De poloconica van twee rechten is dus de m.pl. der punten Z , die met betrekking tot de snijpunten X, Y dezer kegelsnede met een der gegeven rechten zoo zijn gelegen, dat de poolrechten p_{xz} en p_{yz} samenkomen op de andere der gegeven rechten, die dan tevens poolrechte van X en Y is.

2. Zijn Z en W de snijpunten van $\pi_{\xi\zeta}$ met η , dan volgt uit de symmetrie van (3) in verband met de vergelijkingen (1), dat de vier punten X, Y, Z, W een gesloten groep vormen, zoodat elke zijde van den door hen bepaalden vierhoek de poolrechte is van de niet op haar gelegen hoekpunten, dus een *poolvierhoek* (REYE).

Uit onze beschouwingen vloeit voort, dat een poolvierhoek door twee van zijn hoekpunten, maar ook door twee overstaande zijden wordt bepaald. In het laatste geval worden de hoekpunten inge-

sneden door de poloconica der gegeven rechten; in het eerste kan men gebruik maken van de poloconica die bij de poolrechte der gegeven punten en hun verbindingslijn behoort.

Uit $a_x a_y a_w = 0$ en $a_x a_y a_z = 0$ volgt

$$a_x a_y (\lambda a_w + \mu a_z) = 0.$$

Hier kunnen λ en μ zoo bepaald worden dat $\lambda a_w + \mu a_z = a_u$ betrekking heeft op het snijpunt U van XY met WZ .

Daar $a_u a_x^2 = 0$ de poolkegelsnede σ_u van U aanwijst, liggen X en Y , blijkens de betrekking $a_x a_y a_u = 0$ harmonisch t. o. v. σ_u . Analoog volgt uit $a_w a_z a_y = 0$ en $a_w a_z a_x = 0$ de betrekking $a_w a_z a_u = 0$, volgens welke ook W en Z door σ_u harmonisch worden gescheiden.

Maar dan zullen ook de punten $T \equiv (XZ, YW)$ en $V \equiv (XW, YZ)$ geconjugeerd zijn t. o. v. σ_u , d. w. z. men heeft $a_w a_v a_t = 0$. Nu zijn U, V, T de nevenhoekpunten van den volledigen vierhoek $XYZW$, zoodat bewezen is, dat *de diagonaal driehoek van een poolvierhoek steeds een pooldriehoek is*¹⁾.

3. Als de kegelsnede γ_{xy}^2 ontgaat, kan men voor Z elk punt op de rechte XY nemen. Om hiervoor de voorwaarde op te sporen, stellen we $z_k = \lambda x_k + \mu y_k$; uit (2) volgt dan

$$(abc) a_x a_y b_x c_y (\lambda b_x + \mu b_y) (\lambda c_x + \mu c_y) = 0,$$

dus

$$\lambda^2 (abc) a_x a_y b_x^2 c_y + \lambda \mu (abc) a_x a_y b_x^2 c_y^2 + \mu^2 (abc) a_x a_y b_x b_y^2 c_y = 0.$$

Door verwisseling van twee der symbolische factoren a, b, c ziet men dat drie van deze termen identiek nul zijn; men heeft dus

$$\lambda \mu (abc) a_x a_y b_x^2 c_y^2 = 0.$$

Bij willekeurige keuze van X en Y levert deze vergelijking slechts $\lambda = 0$ en $\mu = 0$, dus de punten X en Y . Ze levert *elk* punt van XY , zoodra voldaan is aan

$$(abc) a_x a_y b_x^2 c_y^2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Als X, Y en Z collineair zijn, komen de poolrechte p_x van X en de poolrechten p_{xy}, p_{xz} in één punt samen; immers deze drie rechten zijn de poollijnen van X, Y, Z t. o. v. de poolkegelsnede σ_x . Is nu aan (4) voldaan, dan gaat ook p_{yz} door dat punt; bijgevolg komen nu de zes poolrechten $p_x, p_y, p_z, p_{xy}, p_{yz}, p_{xz}$ in een punt W samen. Maar als p_x, p_y en p_z concurrent zijn, ontgaat de poloconica van $\xi = XYZ$, en ξ is raaklijn der *Cayleyana*.

¹⁾ Zonder bewijs vermeld door CAPORALI (Transunti d. R. A. dei Lincei 1877, p. 236).

Hieruit volgt dat, bij gegeven Y , de vergelijking (4) drie rechten zal voorstellen, n.l. de drie raaklijnen, welke men uit Y naar de *Cayleyana* kan trekken.

Dit kan als volgt bevestigd worden. Zij Z een punt der meetkundige plaats van X , welke door (4) is bepaald, en X een op YZ gelegen tweede punt dier m. pl. zoodat men heeft $a_x = \lambda a_y + \mu a_z$. Uit (4) volgt dan

$$(abc) a_y c_y^2 (\lambda a_y + \mu a_z) (\lambda b_y + \mu b_z)^2 = 0$$

Door verwisseling van a met c ziet men terstond dat

$$(abc) a_y^2 c_y^2 (\lambda b_y + \mu b_z)^2$$

identiek verdwijnt. Analoog vindt men dat $(abc) a_y c_y^2 a_z b_y^2$ en $(abc) a_y c_y^2 a_z b_y b_z$ identiek verdwijnen. Daar ten slotte de vorm $(abc) a_y c_y^2 a_z b_z^2$ nul is, omdat Z op de m. pl. ligt welke door (4) is aangewezen, wordt aan de bovenstaande betrekking voldaan door *alle* punten van YZ : de m. pl. bestaat dus uit drie rechten door Y .

4. Dat de rechte $\xi = XY$ raaklijn is aan de *Cayleyana*, zoodra voldaan wordt aan (4), kan bevestigd worden door (4) tot de tangentiale vergelijking dier kromme te herleiden. Vooreerst vindt men uit

$$(abc) a_x a_y b_x^2 c_y^2 = 0 \quad \text{en} \quad (acb) a_x a_y c_x^2 b_y^2 = 0$$

de betrekking

$$(abc) a_x a_y (b_x c_y + b_y c_x) (b_x c_y - b_y c_x) = 0.$$

De laatste factor kan vervangen worden door $(bc\tilde{\xi})$, waarin $\tilde{\xi}_k$ de coördinaten van XY aanduiden. Daarna kan de vergelijking in twee termen worden gesplitst, die bij verwisseling van b met c in elkaar overgaan. Men kan haar dus vervangen door

$$(abc) a_x a_y b_x c_y (bc\tilde{\xi}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

verder blijkt uit

$$(abc) a_c a_y b_x^2 c_y^2 = 0 \quad \text{en} \quad (cba) c_x c_y b_x^2 a_y^2 = 0,$$

dat tevens voldaan wordt aan

$$(abc) b_x^2 a_y c_y (ac\tilde{\xi}) = 0,$$

dus ook aan

$$(bac) a_x^2 b_y c_y (bc\tilde{\xi}) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Door combinatie van (5) en (6) verkrijgt men verder

$$(abc) a_x c_y (bc\tilde{\xi}) (ab\tilde{\xi}) = 0.$$

Derhalve is ook

$$(abc) c_x a_y (bc\tilde{\xi}) (ab\tilde{\xi}) = 0.$$

Uit de laatste twee betrekkingen volgt dan ten slotte

$$(abc) (ac\tilde{z}) (bc\tilde{z}) (ab\tilde{z}) = 0. (7)$$

Deze tangentialie vergelijking stelt inderdaad de *Cayleyana* voor ¹⁾.

We hebben dus gevonden, dat de zes poolrechten $p_x, p_y, p_z, p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}$ in één punt samenkomen als de punten X, Y, Z op een raaklijn der *Cayleyana* liggen.

5. Als p_x, p_y, p_z concurrent zijn heeft men

$$(abc) a_x^2 b_y^2 c_z^2 = 0. (8)$$

Deze vergelijking geeft dus de betrekking tusschen de coördinaten van drie op eenzelfde poolkegelsnede gelegen punten.

Bij willekeurige keuze van X en Y wordt deze vergelijking behalve door X en Y , door geen punt der rechte XY bevredigd. Zal aan haar voldaan worden door $z_k = \lambda x_k + \mu y_k$ dan moet men hebben

$$(abc) a_x^2 b_y^2 (\lambda c_x + \mu c_y)^2 = 0,$$

dus

$$\lambda \mu (abc) a_x^2 b_y^2 c_x c_y = 0.$$

Hieraan wordt voor elke waarde van $\lambda : \mu$ voldaan als de betrekking (4) vervuld is, dus als X, Y, Z op een raaklijn der *Cayleyana* liggen.

Nu vormen, in het algemeen, de poolrechten p_{xy}, p_{xz}, p_{yz} een driehoek die beschreven is in de driezijde $p_x p_y p_z$ (zie § 3). Is aan (4) voldaan, dan zijn p_{xy}, p_{xz} en p_{yz} concurrent; maar dan moet hun snijpunt tevens het snijpunt van p_x, p_y, p_z wezen.

Zijn X, Y, Z drie collineaire punten der kubische kromme, dan gaan p_{yz}, p_{zx} en p_{xy} achtereenvolgens door X, Y en Z .

Immers, uit $a_x^3 = 0, a_y^3 = 0$ en $(\lambda a_x + \mu a_y)^3 = 0$ volgt, dat het punt Z wordt aangewezen door $a_x a_y (\lambda a_x + \mu a_y) = 0$. Men heeft dus $a_x a_y a_z = 0$, zoodat Z op de poolrechte p_{xy} ligt.

Liggen X, Y, Z nu bovendien op een raaklijn der *Cayleyana*, dan moeten p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} dus samenvallen met de raaklijnen p_x, p_y, p_z in X, Y, Z .

6. Opdat p_x, p_y en p_{xy} concurrent zijn, moet er een punt W wezen, waarvoor men heeft $a_x^2 a_w = 0, b_y^2 b_w = 0$ en $c_x c_y c_w = 0$.

Maar dan is $(abc) a_x^2 b_y^2 c_x c_y = 0$.

Bij willekeurig gekozen Y wordt de m. pl. van X een figuur van den derden graad, die door Y gaat, omdat men heeft $(abc) a_y^2 b_y^2 c_y^2 = 0$. Maar door op (4) te letten, ziet men dat deze figuur uit drie raaklijnen der *Cayleyana* bestaat.

Uit $a_x^2 a_w = 0, a_y^2 a_w = 0$ en $a_x a_y a_w = 0$

1) Zie b.v. GLEBSCH, Leçons sur la géométrie, II, p. 284.

volgt trouwens

$$(\lambda a_x + \mu a_y)^2 a_w = 0;$$

d. w. z. als Z op XY ligt, zal p_z door het snijpunt W van p_x, p_y en p_{xy} gaan, dat dan tevens p_{yz} en p_{xz} draagt.

De drie rechten p_x, p_y en p_{xy} komen dus slechts dan in één punt samen, als X en Y door een raaklijn der *Cayleyana* worden verbonden. Hun snijpunt draagt dan tevens alle poolrechten en gemengde poolrechten, die bij de punten dier raaklijn behooren.

7. De rechten p_x, p_{xy} en p_{xz} zullen concurrent zijn, wanneer voldaan is aan

$$(abc) a_x^2 b_x b_y c_x c_z = 0,$$

dus aan

$$(abc) a_x^2 c_x c_y b_x b_z = 0,$$

bijgevolg aan

$$(abc) a_x^2 b_x c_x (b_y c_z - b_z c_y) = 0.$$

Stelt men

$$y_k z_l - y_l z_k = \xi_m,$$

dan heeft men de voorwaarde

$$(abc) a_x^2 b_x c_x (bc \xi) = 0.$$

Daar deze ook in de vormen

$$(abc) a_x b_x^2 c_x (ac \xi) = 0 \quad \text{en} \quad (abc) a_x b_x c_x^2 (ab \xi) = 0$$

kan geschreven worden, en uit

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_x \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_x \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_x \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_x \end{array} = 0$$

de betrekking

$$(abc) \xi_x = a_x (bc \xi) + b_x (ca \xi) + c_x (ab \xi)$$

voortvloeit, kan de bovenbedoelde voorwaarde vervangen worden door

$$(abc)^2 a_x b_x c_x \xi_x = 0.$$

Bij willekeurige ligging van X wordt hieraan voldaan door $\xi_x = 0$, d. w. z. als X, Y en Z collineair zijn (zie § 3).

Is evenwel

$$(abc)^2 a_x b_x c_x = 0,$$

zoodat X op de *Hessiana* ligt, dan zijn Y en Z geheel willekeurig. Dit was te voorzien: nu is nl. α_x een lijnenpaar, zoodat de rechten p_x, p_{xy} en p_{xz} in het dubbelpunt van α_x saamenkomen.

Wiskunde. — De Heer Hk. DE VRIES biedt eene mededeeling aan van den Heer J. BRUIN: „*Over de oppervlakken, waarvan de asymptotische lijnen door quadraturen kunnen worden bepaald.*”

(Mede aangeboden door den Heer JAN DE VRIES).

I. In een artikel met bovenstaanden titel bespreekt A. BUHL (*Nouv. Ann. de Math.*, 4^e série, t. 8, p. 433, t. 9, p. 337, *Rev. sem.* XVII 2, p. 62, XVIII 1, p. 58) de oppervlakken, gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta, \\z &= a \theta + F(r),\end{aligned}$$

waarin x, y, z gelden ten opzichte van een rechthoekig coördinatenstelsel, zoodat z, θ en r de z. g. cilindrische coördinaten zijn; dit zijn de eenige die in den loop van het onderzoek worden gebruikt.

BUHL maakt nu de differentiaalvergelijking op der asymptotische lijnen van $z = a \theta + F(r)$, zoowel met θ en r als onafhankelijk veranderlijken, als met z en θ . Dan blijkt het dat deze vergelijking vele bijzondere gevallen omvat, waarbij de bepaling der asymptotische lijnen op quadraturen neerkomt.

Meer algemeen kan men de vraag stellen: welke zijn de oppervlakken van één der vormen $z = q(r, \theta)$, of $\theta = f(r, z)$, of $r = f(z, \theta)$, wier asymptotische lijnen zich door quadraturen laten bepalen.

I. Uitgaande van de differentiaalvergelijking der asymptotische lijnen

$$D du^2 + 2 D' du dr + D'' dr^2 = 0$$

(BIANCHI-LUKAT, „*Vorlesungen über Differentialgeometrie*”, p. 109), waarin D, D' en D'' de waarden hebben, te vinden op p. 87 van het geciteerde werk, vindt men voor de differentiaalvergelijking in r en θ der asymptotische lijnen van $z = q(r, \theta)$:

$$r \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} dr^2 + 2 \left(r \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) dr d\theta + \left(r \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial z}{\partial r} \right) d\theta^2 = 0 \quad (1)$$

Deze vergelijking geeft aanleiding tot quadraturen in de volgende gevallen:

- a. $z = a \theta + f(r)$, BUHL, l. c., t. 8, p. 439, verg. ook TISSERAND, „*Rec. compl. d'exercices*”, p. 426.
- b. $l(z) = a \theta + f(r)$, BUHL, l. c. p. 440.
- c. $z = A r \sin(\theta + a) + a \theta + F(r)$,
- d. $z = r f_1(\theta) + f_2(\theta)$,
- e. $z = r^k \sin(\theta \sqrt{k+c})$,
- f. $z = r^{-k} e^{A l + c}$,
- g. $z = -\theta^2 + 2 l(r)$.

2. De differentiaalvergelijking der asymptotische lijnen van $\theta = f(r, z)$ in r en z vindt men door tusschen (1) en $\theta = f(r, z)$ te elimineeren.

Men verkrijgt:

$$\left\{ r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} + r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \right\} dr^2 + 2 \left\{ r \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r} + r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \right\} dr dz + \\ + r \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right\} dz^2 = 0.$$

Deze vergelijking geeft aanleiding tot quadraturen in de volgende gevallen:

a. $\theta = l(r) + f(z).$

b. $\theta = bq \cos \frac{k}{r} + f(z)$, Buhl, l. c., t. 9, p. 343,

benevens enkele reeds bovengenoemde.

3. Op analoge wijze vindt men de differentiaalvergelijking der asymptotische lijnen in z en θ van $r = f(z, \theta)$.

Zij luidt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \theta} - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial z} \right\} dz d\theta + \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - f - \frac{2}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right\} d\theta^2 = 0.$$

Behalve in bovengenoemde gevallen geeft deze vergelijking nog aanleiding tot quadraturen voor

$r = f_1(z), f_2(\theta)$, oppervlakken van JAMET (Ann. de l'École norm. sup., 1887, Suppl., pag. 50 etc.; verder: PICARD, „Traité d'analyse" I, 2^e éd., p. 433).

De hierboven gevonden klassen van oppervlakken zijn niet streng gescheiden; sommige zijn zelfs als onderklassen van andere aan te merken. Men kan ze rangschikken naar de algemeenste typen die er onder te vinden zijn, terwijl dan andere onder deze typen vallen, nl. als volgt.

$$z = Ar \sin(\theta + a) + a\theta + F(r)$$

$$z = a\theta + F(r)$$

$$z = r f_1(\theta) + f_2(\theta)$$

$$l(r) = \theta + f(z)$$

$$r = f_1(z), f_2(\theta)$$

$$z = r^k \sin(\theta \sqrt{k} + c) + r$$

$$z = r^{-k} e^{k\theta} + c$$

$$z = -\theta^2 + 2l(r)$$

$$l(z) = a\theta + f(r)$$

$$\theta = bq \cos \frac{k}{r} + f(z).$$

II. Bespreken we één der bovenstaande klassen nader en wel

$$z = r f_1'(\theta) + f_2'(\theta)^2. \dots \dots \dots (2)$$

Het is de algemeene vergelijking der regelvlakken met de z-as als richtlijn. Van deze regelvlakken kan men op de volgende wijze de strictielijn vinden.

BLANCHI (l.c. p. 223) leidt af dat de kromming $K = \frac{1}{r_1 r_2}$, waarvoor op eene andere plaats gevonden is $K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}$, in het centraalpunt grooter is dan in alle andere punten van eene beschrijvende lijn. Maakt men K op voor (2) dan vindt men

$$K = \frac{-(f_2')^2}{[r^2\{1 + (f_1')^2 + (f_1'')^2\} + 2r f_1' f_2' + (f_2'')^2]^2}$$

Langs eene beschrijvende lijn is θ constant, daar verandert dus van de uitdrukking voor K alleen de noemer. Zoeken we de r waarvoor K maximaal wordt, dan vinden we

$$r = - \frac{f_1' f_2'}{1 + (f_1')^2 + (f_1'')^2} \dots \dots \dots (3)$$

Dit is dus de (r,θ)-projectie der strictielijn.

Ook op andere wijze is deze vergelijking te vinden. Wij hebben de eigenschap dat het raakvlak in het centraalpunt van eene beschrijvende lijn loodrecht staat op het raakvlak in het oneindig verre punt dier beschrijvende.

Wij bepalen nu voor $f = -z + r f_1'(\theta) + f_2'(\theta)$ de waarden van $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ in een willekeurig punt p en in het oneindig verre punt op dezelfde beschrijvende. Zal dan p centraalpunt zijn, dan moet de som der producten $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\infty$ gelijk aan 0 zijn. Dit geeft weer de vergelijking (3).

Gaan wij nu na in hoeverre wij bij voorgeschreven strictielijn het oppervlak (2) kunnen vinden.

α Zij voorgeschreven als projectie der strictielijn $r = f(\theta)$. Dit geeft, lettend op (3), de betrekking tusschen f_1' en f_2'

$$-\frac{f_1' f_2'}{1 + (f_1')^2 + (f_1'')^2} = \varphi$$
$$f_2' = -\frac{\varphi \{1 + (f_1')^2 + (f_1'')^2\}}{f_1'}$$

1) In het vervolg schrijven wij meestal f_1 en f_2 voor $f_1(\theta)$ en $f_2(\theta)$.

Dus: Het oppervlak $z = r f_1'(\theta) + \int \frac{-q \{1 + (f_1')^2 + (f_1'')^2\}}{f_1'} d\theta$,
 waarin f_1' eene willekeurige functie is van θ , heeft als (r, θ) -projectie der strictielijn de kromme $r = q(\theta)$.

b. Zij nu voorgeschreven, dat de strictielijn eene vlakke kromme moet zijn, gelegen in het vlak $z = Ax + By + C$ of $z = r(A \cos \theta + B \sin \theta) + C$.

Door deze waarde voor z in (2) te substitueeren, moeten wij dus (3) krijgen. Dit geeft tusschen f_1' en f_2' de betrekking

$$\frac{f_2' - C}{f_1' - A \cos \theta - B \sin \theta} = 1 \div (f_1')^2 + (f_1'')^2$$

of

$$\frac{f_2'}{f_2' - C} = \frac{1 + (f_1')^2 + (f_1'')^2}{f_1' (f_1' - A \cos \theta - B \sin \theta)}$$

Dus: het oppervlak $z = r f_1'(\theta) + e^{\int \frac{1 + (f_1')^2 + (f_1'')^2}{f_1' (f_1' - A \cos \theta - B \sin \theta)} dy} + C$, waarin f_1' eene willekeurige functie is van θ , heeft eene vlakke strictielijn, gelegen in $z = Ax + By + C$.

c. Het algemeenste vraagstuk hierbij is wel: welk is het oppervlak (2) waarvoor $r = q(\theta)$, $z = \psi(\theta)$ strictielijn is.

Om dit op te lossen substitueeren wij deze waarden voor r en z in (2) en (3) en verkrijgen dan twee vergelijkingen met f_1' en f_2' als onbekenden. Elimineeren we tusschen deze beide f_2' , dan houden we f_1' als eenige onbekende in de vergelijking

$$q + q(f_1')^2 + f_1' \psi' - q' f_1' f_1'' = 0.$$

Is f_1' hieruit bekend dan kan men f_2' vinden uit:

$$\psi = q f_1' + f_2'.$$

Wij kunnen de oplossing in explicieten vorm vinden voor het bijzondere geval $\psi = const.$, voor welke constante wij 0 nemen. Wij krijgen dan:

$$q \{1 + (f_1')^2\} - q' f_1' f_1'' = 0,$$

waaruit volgt

$$f_1' = \sqrt[2]{\frac{q}{q'} \int \frac{q'}{q} dy} - 1,$$

terwijl dan verder

$$f_2' = -q f_1'.$$

Het resultaat is dus:

Het oppervlak

$$z = (r - q) \sqrt[2]{\frac{q}{q'} \int \frac{q'}{q} dy} - 1$$

heeft de vlakke strictielijn $r = q$, $z = 0$.

De hierboven afgeleide formules gelden voor de oppervlakken (2).

Zooals reeds opgemerkt is zijn echter de aan het slot van I opgenoemde algemeene typen niet streng gescheiden, zoodat zich daaronder ook nog wel regelvlakken met eene rechte richtlijn bevinden, waarop dan de bovenstaande formules toepasselijk zijn. Voorbeelden hiervan zijn:

Van het type $z = Ar \sin(\theta + \alpha) + a\theta + F(r)$

het oppervlak $z = Ar \sin(\theta + \alpha) + a\theta + br$.

Van het type $l(z) = a\theta + f(r)$

het oppervlak $l(z) = a\theta + l(r + p)$;

deze hebben de z -as tot richtlijn.

Van het type $r = f_1(z), f_2(\theta)$ hebben nog de y -as tot richtlijn de regelvlakken:

$$x^n(z+1) = z^n y, \text{ of } r = (tg \theta)^{1/n-1} \sec \theta \left(\frac{z^n}{z+1} \right)^{1/n-1}$$

en

$$x^n = (y - c.r)z^n \text{ of } r = \sec \theta (tg \theta - c)^{n-1} z^{n-1}.$$

Physiologie. — De Heer SPRONCK biedt eene mededeeling aan van den Heer J. G. SLEESWIJK: „*Bijdragen tot de studie der serum-anaphylaxie.*” (Uit het Institut für Infektionskrankheiten te Berlijn). (4e Mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer C. EYKMAN).

In de eerste maanden van het vorige jaar heb ik gelegenheid gehad, in een drietal mededeelingen ¹⁾ de uitkomsten mijner onderzoekingen over serumanaphylaxie aan de Akademie bekend te maken. Sedert dien is de literatuur over dit onderwerp niet onbelangrijk aangegroeid. Het is nu geenszins mijne bedoeling, hier op een bespreking daarvan in te gaan. Slechts zij het mij vergund (en ik acht mij daartoe tegenover de Akademie zelfs verplicht), hier in 't kort die publicaties te behandelen, waarbij mijne onderzoekingen direct of indirect in discussie kwamen, en daaraan de uitkomsten van een aantal verdere proeven toe te voegen. Voorop mag worden gesteld, dat in het algemeen de door mij medegedeelde feiten als juist moesten worden erkend.

Het gaat hier in hoofdzaak om drie punten: 1o. de rol van de

¹⁾ Zittingen van Januari, Februari en Maart 1909.

roode bloedlichaampjes van de cavia ten opzichte van paardenserum in het verschijnsel van TH. SMITH, 2o. het vraagstuk der alexinefixatie en der haemolyse bij den anaphylaktischen schok, en 3o. de toepassing der specifieke eiwithypersensibiliteit in de gerechtelijke geneeskunde.

Ik heb nu verleden jaar uiteengezet, waarom ik van meening was, dat het sensibiliseerende principe van de eerste injectie en de toxische stof van de tweede serumtoediening als identiek moeten worden beschouwd, en dat hier slechts quantitative verschillen in het spel zijn. Tot dit standpunt is inmiddels ook BESREDKA bekeerd.¹⁾ Het logisch gevolg nu van mijne waarneming, dat paardenserum door behandeling met caviabloed van zijne giftigheid voor gevoelig gemaakte dieren kan worden beroofd, was dus, dat daarbij tevens de sensibiliseerende stof wordt gebonden. LEVADITI en RAYCHMAN, die dit laatste ook werkelijk konden aantonen, laten dan ook niet na in dit verband naar mijne mededeeling te verwijzen.²⁾ Ook SALUS bevestigde mijne waarneming omtrent de ontgiftigende werking der roode bloedlichaampjes op paardenserum.³⁾

Het vraagstuk der complementbinding heeft in den laatsten tijd zeer de aandacht getrokken. Ik herinner eraan, dat ik reeds in mijne eerste mededeeling heb aangegeven, „dat een gevoelig gemaakte cavia, die op de tweede serumtoediening met intoxicatie-verschijnselen reageert, eenigen tijd na die inspuiting constant een serum levert dat uiterst arm is aan haemolytisch alexine”. Daarnaast heb ik vastgesteld dat het serum van hypersensiebele dieren in geen enkele combinatie met paardenserum in vitro een praecipitaat geeft noch complement vermag te binden. Eene opmerkelijke incongruentie dus, en waardoor de anaphylaktische toestand zich onderscheidt van de immuniteitsphase, waarbij praecipitinen worden gevormd, en waarbij zoowel in vivo als in de reageerbuis alexine wordt gebonden. Ik wijs erop, dat ik hiermede in conflict kwam met NICOLLE en ABT⁴⁾ die hadden gevonden, dat het serum van gevoelig gemaakte cavia's met paardenserum in vitro wél complement fixeert. Voor FRIEDBERGER, die de anaphylaxie als een bijzonderen vorm der antieiwitimmunitet beschouwt, waarbij de praecipitinen slechts voor een gering deel in de circulatie zijn overgegaan doch in hoofdzaak nog aan de cellen gebonden (sessiel) zijn gebleven, voor hem was de complementbinding een welkom verschijnsel. Hij nam aan (blijkbaar zonder verdere contrôle), dat de mededeeling van NICOLLE en ABT juist was, terwijl hij anderzijds mijne waar-

1) Ann. de l'Inst. Pasteur, Oct. 1909.

2) G. R. Soc. de Biol. T. 67, 1909, p. 1078.

3) Wiener Klin. Woch. 1909, no. 48.

4) Ann. de l'Inst. Pasteur 1908.

neming omtrent het alexineverlies tijdens den anaphylaktischen schok door eigen onderzoek in principe kon bevestigen.¹⁾ Toch kwamen daarbij nog dergelijke quantitative verschillen aan den dag, dat bij den eersten aanblik op mijne waarnemingen een schijn van onnauwkeurigheid zou vallen. Ik had b.v. aangegeven, dat het maximum van complementverlies na ongeveer een half uur is bereikt, terwijl FRIEDBERGER vond dat zulks reeds binnen vijf minuten het geval is. Ik ben daarom genoodzaakt, hierop eenigszins nader in te gaan.

FRIEDBERGER heeft zich blijkbaar niet afgevraagd, waarin wel de oorzaak zou kunnen liggen van onze zij 't ook alleen in quantitative zin uiteenlopende resultaten. Hij spreekt slechts terloops van „Differenzen in der angewandten Anaphylaxie-technik.” Maar hier ligt juist de *cardo quaestionis*, en wat ik reeds dadelijk vermoedde, bleek mij bij nader onderzoek de werkelijkheid te zijn. Ik had n.l. mijnen dieren de toxische seruminjectie in niet te groote dosis in de buikholte toegediend; de reactie is dan minder hevig en verloopt langzamer, zoodat ik — door het onderzoek van achtereenvolgens op meerdere tijdstippen van den anaphylaktischen schok aan de dieren ontnomen bloedproeven — het verloop van de complementkurve in het algemeen kon vaststellen. FRIEDBERGER echter spoot zijne hypersensiebele dieren intraveneus in: de reactie speelt zich dan zóó snel af, en is zóó hevig, dat de *cavia*'s gewoonlijk binnen weinige minuten sterven. En tegelijkertijd daarmee heeft ook het complementverlies zeer spoedig zijn maximum bereikt. Ik heb nu in WASSERMANN'S-laboratorium in een reeks van nauwkeurige quantitative complementtitraties deze verschillen kunnen vaststellen. Daarbij bleek o.a. dat enkele minuten na intraveneuse inspuiting van 0.2 cM³ paarden-serum het complementgehalte van het proefdierserum reeds bijna even zoo sterk kan zijn afgenomen als bij intraperitoneale injectie van 3 cM³ na een half uur.

De onderzoekingen van mij en die van FRIEDBERGER spreken elkaar dus niet tegen; ze vullen elkander aan. Ik kan dan ook in FRIEDBERGER'S uitkomsten niet anders dan eene principieele bevestiging van mijne waarnemingen zien. Hetzelfde geldt voor de haemolyse, die in den anaphylaktischen schok bij de proefdieren optreedt. FRIEDBERGER bevestigt ook dit feit, evenals POELS.²⁾ Mijne bewering dat daarom BESREDKA met zijne exclusivistische meening, als zouden slechts de elementen van het centrale zenuwstelsel tot hypersensibiliteit te brengen zijn, ongelijk heeft, vindt aldus in deze van meer dan één zijde vastgestelde haemolyse voldoende steun.

¹⁾ Zeitschr. f. Imm.forsch. Bd. III, H. 6.

²⁾ Handelingen v. h. Nederl. Natuur- en Genesesk. Congr. te Utrecht, April 1909.

Wat nu de alexinefixatie van het anaphylaktische serum met zijn antigeen in vitro betreft: ik meen mijne negatieve uitkomsten tegenover NICOLLE en ABT te moeten handhaven. In vele serieën met mengsels van dalende hoeveelheden paardenserum met stijgende hoeveelheden anaphylaktisch caviaserum kon ik nergens een specifieke remming der haemolyse waarnemen. Ook niet, al hield ik mij nauwkeurig aan de quantitative verhoudingen, zooals NICOLLE en ABT die hebben aangegeven. Intusschen bleek mij nu daarbij het volgende, dank zij de noodige contrôleproeven. Reeds normale caviasera (geïnactiveerd) remmen vaak de haemolyse, geheel onafhankelijk van de aanwezigheid van paardenserum; ja, men ontmoet soms een normaalserum, dat sterker bindend werkt dan een daarnevens onderzocht anaphylaktisch serum.¹⁾ Ik blijf dus bij mijne vroegere bewering, dat er hier van eene specifieke complementbinding in de reageerbuis geen sprake is. Deze incongruentie van de alexinefixatie in vitro en in vivo, waarop ik reeds een jaar geleden de aandacht vestigde, werd onlangs in de vergadering der Physiologische Gesellschaft te Berlijn (21 Januari 1910 door MICHAËLIS met zekerheid bevestigd. Ook FRIEDBERGER schijnt zich nu achteraf daarbij aan te sluiten (Zeitschr. f. Imm. forsch. Bd. IV, H. 5). Het komt mij nu voor, dat de toestand van labiel physiologisch evenwicht waarin het hypersensiebele organisme verkeert, juist door de zoeven bedoelde incongruentie biologisch is gekarakteriseerd.

TSURUX heeft zeer onlangs gepoogd²⁾, de beteekenis van de alexinefixatie in vivo bij de anaphylaxie te verkleinen. Zoo zou reeds normaalserum van hond en konijn bij normale marmotten complementverlies teweegbrengen. Voor paardenserum geldt dit niet, en zeker niet bij geringe doses, zooals reeds uit mijne vroegere contrôleproeven was gebleken; trouwens, daarover spreekt TSURUX ook niet. Maar bovendien heeft deze onderzoeker met niet sterk genoeg gesensibiliseerde bloedlichaampjes en met onvoldoende complementverduunningen gewerkt, zoodat zijne uitkomsten geen groot vertrouwen verdienen. Afgezien daarvan vond hij, evenals ik reeds vroeger, dat de intoxicatieverschijnselen en het complementverlies niet parallel behoeven te gaan, waaruit ik de gevolgtrekking heb gemaakt dat deze beide niet direct van elkander afhankelijk zijn, doch een gemeenschappelijke oorzaak hebben.

Ik kom nu tot het derde punt, dat ik hier wenschte te behandelen, namelijk de toepassing van de anaphylaxie in de praktijk der medicina forensis. Deze toepassing lag blijkbaar zóózeer voor de hand, dat

¹⁾ Details hoop ik elders uitvoeriger bekend te maken.

²⁾ Zeitschr. f. Imm. forsch. Bd. IV, H. 5.

ongeveer tegelijkertijd met en onafhankelijk van mijne mededeeling overeenkomstige resultaten werden bekend gemaakt door THOMSEN, UHLENHUTH en H. PFEIFFER. De laatste legt den nadruk op de sterke daling der lichaamstemperatuur tijdens den anaphylaktischen schok als hulpmiddel voor de diagnose.

Wat de techniek van dit onderzoek betreft, zij nog het volgende vermeld. Moet men een bloedvlek identificeeren, en beproeft men cavia's intraperitoneaal, dan heeft men voor elk te onderzoeken dier meerdere cM^3 serum noodig. Behandelt men de dieren intraveneus (in de jugularis), dan behoeft men veel geringere hoeveelheden serum, maar dan moet men een halsoperatie verrichten, welke echter bij eenige oefening voor dit doel geen bezwaar oplevert. Het is mij nu gebleken, dat ook met jonge konijnen van ongeveer 1 K.G. de proef zeer goed te verrichten is, omdat hier zoowel de sensibiliseerende als de beproevingsinjectie gemakkelijk in de oorvena kan worden gegeven. Een kleine ingedroogde bloedvlek wordt in 1 cM^3 physiologische zoutsolutie opgelost en bij zulk een dier ingespoten; na 14 dagen geeft men dan 1 cM^3 van de verdachte bloedsorten eveneens intraveneus. Aan konijnen, die aldus met extracten van menschelijke bloedvlekken waren voorbehandeld, heb ik op achtereenvolgende dagen serum van geit, paard, rund, en cavia toegediend, zonder dat de dieren in 't minst reageerden. Tenslotte deed 1 cM^3 menschen-serum ze binnen enkele minuten antwoorden met krampen en paralyzen, zware ademhalingsstoornissen, incontinentia urinae et alvi enz. De anaphylaktische reactie zal zich voortaan, naar mijne meening, in de praktijk der gerechtelijke geneeskunde naast de praecipitatie in vitro als een waardevolle methode weten te handhaven.

Onder de vele vragen die zich bij de studie van ons onderwerp voordoen, was er nog deze: wat geschiedt er met het ingespoten paardenserum tijdens den anaphylaktischen schok? Ware er slechts eene minimale hoeveelheid vrij en onveranderd in de circulatie van het geïntoxiceerde dier voorhanden, dan moest men met zijn bloed een normaal dier kunnen sensibiliseeren. Het is mij nu gebleken, dat zulks nooit gelukt. Men mag daaruit dus de gevolgtrekking maken dat al het in de bloedbaan opgenomen antigeen door de cellen van het hypersensiebele organisme oogenblikkelijk wordt gebonden, resp. daarbij van zijne specificiteit wordt beroofd.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan namens den Heer L. E. J. BROUWER: „*Over de structuur der perfecte puntverzamelingen.*”

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

§ 1.

Puntverzamelingen en stukverzamelingen.

De in het volgende ter sprake komende puntverzamelingen worden ondersteld te liggen binnen een eindig gebied van een R_n .

Onder een *stuk* van een afgesloten puntverzameling μ verstaan we een tot μ behoorend *enkel punt of afgesloten samenhangende puntverzameling*, die niet in een andere tot μ behoorende afgesloten samenhangende puntverzameling bevat is.

Als elementen van μ kunnen we zoowel haar stukken, als haar punten beschouwen, anders uitgedrukt we kunnen μ , behalve als *puntverzameling*, ook als *stukverzameling* beschouwen.

Kiezen we onder de stukken van μ een fundamenteaalreeks S_1, S_2, S_3, \dots uit, dan behooren tot μ een of meer stukken ${}_1S_n, {}_2S_n, \dots$ met de eigenschap, dat ${}_nS_n$ geheel binnen een voor onbepaald toenemende n onbepaald afnemenden afstand ε_n van een der stukken ${}_2S_n$ ligt. Deze stukken ${}_2S_n$ zullen we de *grensstukken* van de fundamenteaalreeks S_1, S_2, S_3, \dots noemen.

De verzameling μ bevat dus bij elke tot haar behoorende fundamenteaalreeks van stukken minstens één grensstuk; *een afgesloten puntverzameling is dus eveneens afgesloten als stukverzameling.*

Onder een *geïsoleerd stuk* van μ verstaan we een stuk, dat van zijn restverzameling in μ een eindigen afstand heeft, m. a. w. een stuk, waarvan de restverzameling afgesloten is.

STELLING 1. *Elk stuk van μ is òf grensstuk òf geïsoleerd stuk.*

Zij n. l. S een niet geïsoleerd stuk, dan bestaat in μ een fundamenteaalreeks van niet tot S behoorende punten t_1, t_2, t_3, \dots , die convergeert tot een enkel punt t van S . Ligt t_1 op S_1 , dan heeft S_1 een zekeren afstand ε_1 van S . Er is dan zeker een punt t_2 der fundamenteaalreeks, dat een afstand $< \varepsilon_1$ van S bezit, dat dus niet op S_1 , doch op een ander stuk S_2 ligt. Zij ε_2 de afstand van S_2 tot S , dan bestaat zeker een punt t_3 der fundamenteaalreeks, dat een afstand $< \varepsilon_2$ van S bezit, dus noch op S_1 , noch op S_2 , doch op een derde stuk S_3 ligt. Zoo voortgaande bepalen we een fundamenteaalreeks van stukken S_1, S_2, S_3, \dots , waarop achtereenvolgens de punten t_1, t_2, t_3, \dots liggen, die tot t convergeeren. De stukken $S_1, S_2,$

S_3, \dots convergeeren dus tot een enkel grensstuk, dat geen ander dan S kan zijn.

Onder een *perfekte stukverzameling* verstaan we een afgesloten verzameling, waarvan elk stuk grensstuk is.

Een perfecte stukverzameling is ook perfect als puntverzameling; doch niet omgekeerd. Immers een perfecte puntverzameling kan zeer goed geïsoleerde stukken bevatten.

We zullen zeggen, dat twee stukverzamelingen *hetzelfde geometrische ordetype bezitten*, wanneer ze zich stuk voor stuk zoodanig in één-éénduidige correspondentie laten brengen, dat met een grensstuk eener fundamentealreeks in de eene verzameling correspondeert een grensstuk van de corresponderende fundamentealreeks in de andere verzameling.

Een afgesloten verzameling zullen we *punctueel* noemen, wanneer ze geen samenhangende bestanddeelen bevat, m. a. w. wanneer al haar stukken punten zijn.

§ 2.

Het Cantorsche hoofdtheoremata en zijne uitbreidingen.

De hoofdstelling van de theorie der puntverzamelingen luidt:

Wanneer men in een afgesloten verzameling een geïsoleerd punt vernietigt, in de restverzameling weer een geïsoleerd punt vernietigt, enzovoort tot in het transjinite, voert dit proces na een aftelbaar aantal schreden tot een einde.

De ontdekkers dezer stelling, CANTOR ¹⁾ en BENDIXSON ²⁾, bewezen haar met behulp van het begrip der *tweede oneindige machtigheid* Ω , dat intusschen niet door alle mathematici wordt erkend. LINDELÖF ³⁾ gaf een van dit begrip onafhankelijk bewijs, waarbij echter, daar het vernietigingsproces zelf er buiten beschouwing blijft, het resultaat min of meer bij verrassing wordt verkregen.

Slechts voor lineaire verzamelingen zijn bewijzen der hoofdstelling gegeven, die èn het vernietigingsproces zelf volgen, én van Ω onafhankelijk zijn ⁴⁾.

De restverzameling, die na voltooiing van het vernietigingsproces overblijft, en die we kunnen noemen het *Cantorsche residu*, is volgens

¹⁾ Mathem. Annalen 23, p. 459—471.

²⁾ Acta Mathematica 2, p. 419—427.

³⁾ Acta Mathematica 29, p. 183—190.

⁴⁾ SCHOENFLIES, Bericht über die Mengenlehre I, p. 80, 81; Gött. Nachr. 1903, p. 21—31; HARDY, Mess. of Mathematics 33, p. 67—69; YOUNG, Proceedings of the London Math. Soc. (2) 1, p. 230—246.

CANTOR ¹⁾ een *perfekte puntverzameling*, echter van den meest algemeen aard, dus *in het algemeen niet een perfecte stukverzameling*.

Een door SCHOENFLIES ²⁾ uitgesproken, en door mij ³⁾ bewezen uitbreiding der hoofdstelling kan aldus worden geformuleerd:

Wanneer men in een afgesloten verzameling een geïsoleerd stuk vernietigt, in de restverzameling weer een geïsoleerd stuk vernietigt, enzovoort tot in het transjinite, voert dit proces nu een aftelbaar aantal schreden tot een einde.

Mijn vroeger voor deze stelling gegeven bewijs bestond in een veralgemeening der Lindelöfsche methode, maar ik kondigde tegelijk een bewijs aan, dat zich aan het vernietigingsproces zelf aansluit. Dit volgt hier; er is tevens in besloten een de bestaande in eenvoudigheid verre overtreffend, van Ω onafhankelijk, en het vernietigingsproces zelf volgend bewijs der hoofdstelling:

We verdeelen de R_n in n -dimensionale kuben met ribbe a , elk dezer kuben in 2^n deerkubens met ribbe $\frac{1}{2} a$, elk der laatste in 2^n deerkubens met ribbe $\frac{1}{4} a$, enzovoort.

Alle zoo geconstrueerde kubens tezamen vormen een aftelbare kubensverzameling K .

Zij vervolgens μ de gegeven afgesloten verzameling, dan bezit K een eveneens aftelbare deelverzameling K_1 , bestaande uit die kubens, welke in hun binnenste of op hun grens punten van μ bevatten.

Aan elke vernietiging van een geïsoleerd punt of geïsoleerd stuk in μ beantwoordt nu een vernietiging van minstens één ⁴⁾ kubus in K_1 ; maar van deze laatste vernietigingen is slechts een aftelbaar aantal mogelijk, dus ook van de eerste, waarmee zoowel de Cantorsche hoofdstelling, als haar Schoenfliessehe uitbreiding zijn bewezen.

Noemen we de restverzameling, die na vernietiging van alle isoleerbare stukken overblijft, het *Schoenfliessehe residu*, dan kunnen we op grond van stelling 1 formuleeren:

STELLING 2. *Een Schoenfliesch residu is een perfecte stukverzameling.*

§ 3.

De structuur der perfecte stukverzamelingen.

Laten S_1 en S_2 twee stukken eener perfecte stukverzameling μ zijn.

¹⁾ l. c. p. 465.

²⁾ Mathem. Annalen 59; het aldaar p. 141—145, en Bericht über die Mengenlehre II, p. 131—135 gegeven bewijs is onjuist.

³⁾ Mathem. Annalen 68, p. 429.

⁴⁾ Zelfs van oneindig vele.

Laat het mogelijk zijn, een eindig aantal stukken van μ zoodanig in een rij, die S_1 tot eerste en S_2 tot laatste element heeft, te plaatsen, dat de afstand tusschen twee op elkaar volgende stukken dier rij *kleiner is dan a* . We zeggen dan, *dat S_2 tot de a -groep van S_1 behoort*.

Behooren S_2 en S_3 beide tot de a -groep van S_1 , dan behoort ook S_3 tot de a -groep van S_2 , zoodat μ uiteenvalt in een zeker aantal " a -groepen". Dit aantal is eindig, omdat de afstand van twee verschillende a -groepen niet kleiner dan a kan zijn.

Is $a_1 < a_2$, en zijn een a_1 -groep en een a_2 -groep van μ gegeven, dan liggen deze of geheel buiten elkaar, of de a_1 -groep is in de a_2 -groep bevat.

Zijn twee stukken S_1 en S_2 van μ gegeven, dan is er een zekere maximumwaarde van a , waarvoor S_1 en S_2 in verschillende a -groepen van μ komen te liggen. Die waarde zullen we noemen de *sprongwijdte van S_1 en S_2 in μ* , en zullen we voorstellen door $\sigma_\nu(S_1, S_2)$.

Stellen we verder den *afstand van S_1 en S_2* voor door $\alpha(S_1, S_2)$, dan convergeert $\sigma_\nu(S_1, S_2)$ met $\alpha(S_1, S_2)$ tot nul, maar ook omgekeerd $\alpha(S_1, S_2)$ met $\sigma_\nu(S_1, S_2)$. Anders toch zou convergentie van $\sigma_\nu(S_1, S_2)$ tot nul meebrengen het bestaan eener samenhangende deelverzameling van μ , waarin twee verschillende stukken van μ bevat waren, wat onmogelijk is.

De maximumwaarde van a , waarvoor μ in verschillende a -groepen uiteenvalt, zullen we noemen de *verstrooiingswijdte van μ* , en voorstellen door $\sigma(\mu)$. Deze verstrooiingswijdte van μ is tevens de grootste waarde, die $\sigma_\nu(S_1, S_2)$ voor twee stukken S_1 en S_2 van μ kan bereiken.

De maximumwaarde van a , waarvoor μ in *tenminste n* verschillende a -groepen uiteenvalt, zullen we noemen de *n -deelige verstrooiingswijdte van μ* , en voorstellen door $\sigma_n(\mu)$. Duidelijk is $\sigma_n(\mu) \leq \sigma(\mu)$.

Voor μ bestaat verder een reeks van toenemende positieve geheele getallen $n_1(\mu)$, $n_2(\mu)$, $n_3(\mu)$, . . . zoodanig, dat $\sigma_n(\mu)$ voor n tusschen $n_{k-1}(\mu)$ en $n_k(\mu)$ gelijk is aan $\sigma_{n_k(\mu)}(\mu)$. Deze grootheid $\sigma_{n_k(\mu)}(\mu)$ kunnen we noemen de *k -de verstrooiingswijdte van μ* , en als zoodanig voorstellen door $\sigma^{(k)}(\mu)$.

We beweren nu, dat het altijd mogelijk is, μ in m_1 perfecte stukverzamelingen μ_1, \dots, μ_{m_1} te splitsen zoodanig, dat $\sigma(\mu_h) \leq \sigma_{m_1}(\mu)$ en $\alpha(\mu_{h_1}, \mu_{h_2}) \geq \sigma_{m_1}(\mu)$.

Zij n.l. $\sigma_{m_1}(\mu) = \sigma^{(k)}(\mu)$, dan kunnen we het vereischte aantal m_1 krijgen, door elke μ_h samen te stellen uit een zeker aantal $\sigma^{(k)}(\mu)$ -groepen van eenzelfde $\sigma^{(k-1)}(\mu)$ -groep. Dan zijn we ook zeker, dat de voorwaarde $\alpha(\mu_{h_1}, \mu_{h_2}) \geq \sigma_{m_1}(\mu)$ is vervuld.

Verder kunnen we de $d^{(k)}(\mu)$ -groepen van eenzelfde $d^{(k-1)}(\mu)$ -groep in een zoodanige rij plaatsen, dat de afstand tusschen twee op elkaar volgende groepen gelijk is aan $d^{(k)}(\mu)$. Zorgen we, dat elke μ_h uit een niet onderbroken segment van zulk een rij bestaat, dan is ook aan de voorwaarde $d(\mu_h) \leq d_{m_1}(\mu)$ voldaan.

Splitsen we vervolgens op dezelfde wijze elke μ_h in m_2 perfecte stukverzamelingen $\mu_{h1}, \dots, \mu_{hm_2}$ zoodanig, dat $d(\mu_{hi}) \leq d_{m_2}(\mu_h)$ en $a(\mu_{hi_1}, \mu_{hi_2}) \geq d_{m_2}(\mu_h)$, en zetten we dit proces onbepaald voort.

Stellen we dan door r_v een willekeurige rij van r indices voor, dan is steeds

$$d_{m_v}(\mu_{r_v, v-1}) \leq d_{m_1 + m_2 + \dots + m_v + 1 - v}(\mu) \quad \dots \quad (A)$$

De verstrooiingswijdte $d(\mu_{r_v})$ kan, daar μ een perfecte stukverzameling is, slechts voor onbepaalde aangroeiing van r tot nul convergeeren; uit de formule (A) volgt echter, dat voor onbepaalde aangroeiing van r die convergentie tot nul ook werkelijk plaats heeft, en dat wel gelijkmatig voor alle r^{de} splitsingsproducten te zamen.

Tegelijk convergeert de sprongwijdte van elke twee in eenzelfde r^{de} splitsingsproduct gelegen stukken gelijkmatig tot nul, en convergeeren dus die splitsingsproducten zelf gelijkmatig ieder tot een enkel stuk.

Is ten slotte een veranderlijk paar stukken van μ gegeven, dan kan hun afstand alleen dan tot nul convergeeren, als de orde van het kleinste splitsingsproduct, waarin ze beide zijn bevat, onbepaald toeneemt.

De eenvoudigste wijze, waarop het genoemde splitsingsproces kan worden uitgevoerd, is, door alle m_k 's gelijk aan 2 te nemen. Stellen we in dat geval de beide splitsingsproducten der eerste orde voor door μ_0 en μ_2 , die der tweede orde door $\mu_{00}, \mu_{02}, \mu_{20}, \mu_{22}$, enzoo voort, dan worden op deze wijze de verschillende stukken van μ in één-éénduidige correspondentie gebracht met de verschillende uit cijfers 0 en 2 bestaande fundamentealreeksen. En wel convergeeren twee stukken dan en slechts dan tot elkander, wanneer het beginsegment, dat hunne fundamentealreeksen gelijk hebben, onbepaald aangroeit.

Beschouwen we hiernaast, op het lineaire continuüm der reële getallen tusschen 0 en 1, de perfecte punctueele verzameling π van die getallen, welke in het drietallig stelsel kunnen worden voorgesteld door een oneindig aantal cijfers 0 en 2 achter de komma. Het geometrische ordetype van π zullen we voorstellen door ξ .

Twee tot π behorende getallen convergeeren dan en slechts dan tot elkander, wanneer het beginsegment, dat de cijferreeksen van beide gelijk hebben, onbepaald aangroeit.

Brengen we dus een zoodanige één-éénduidige correspondentie tusschen de stukken van μ en de getallen van π tot stand, dat voor elk stuk van μ de indexreeks gelijk is aan de cijferreeks achter de komma van het corresponderende getal van π , dan correspondeert met een grensstuk van een fundamentealreeks van stukken van μ een limietgetal van de corresponderende getallenreeks in π , zoodat we kunnen formuleeren:

STELLING 3. *Elke perfecte stukverzameling bezit het geometrische ordetype ξ .*

Voor het geval, dat de beschouwde verzameling *punctueel is*, en in een plat vlak ligt, vloeit deze stelling onmiddellijk voort uit de volgende bekende eigenschap:

Door elke vlakke afgesloten punctuele verzameling laat zich een enkelvoudige kurrenboog leggen.

De in § 2 vermelde stelling van SCHOENFLIES met stelling 3 combineerende, kunnen we uitspreken:

STELLING 4. *Elke afgesloten verzameling bestaat uit een geometrisch ordetype ξ van stukken, plus een aftelbare verzameling van stukken.*

§ 4.

De groepen van het geometrische ordetype ζ .

Zooals ruimten groepen van één-éénduidige continue transformaties toelaten, wier geometrische ordetypen ¹⁾ weer ruimten zijn, n.l. de eindige continue groepen van LIE, laat het geometrische ordetype ζ groepen van één-éénduidige continue transformaties toe, die eveneens van het geometrische ordetype ζ zijn.

Om zulke groepen te construeeren, gaan we uit van de in § 3 uitgevoerde verdeling van de verzameling μ in m_1 „deelen der eerste orde” $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_1}$, van elk van deze deelen der eerste orde in m_2 „deelen der tweede orde” $\mu_{h1}, \mu_{h2}, \mu_{h3}, \dots, \mu_{hm_2}$, enz.

De deelen der eerste orde onderwerpen we aan een willekeurige transitieve substitutiegroep van m_1 elementen, waarvan we de orde door p_1 , en die we zelf door g_1 voorstellen.

Daarna onderwerpen we de deelen der tweede orde aan een zoodanige transitieve substitutiegroep g_2 van $m_1 m_2$ elementen, die de deelen der eerste orde als systemen van imprimitiviteit, en g_1 als substitutiegroep dier systemen in elkander bezit. De orde van g_2 kunnen we dan voorstellen door $p_1 p_2$.

¹⁾ In dit bijzondere geval vroeger door mij „Parametermannigfaltigkeiten” genoemd. Vgl. Mathem. Annalen 67, p. 247.

De eenvoudigste wijze, om zulk een groep g_2 te construeeren, is, hem te kiezen als het directe product van g_1 en een substitutie-groep γ_2 , die van de deelen der tweede orde den eersten index onveranderd laat, en den tweeden index omzet volgens een enkele transitieve substitutie-groep van m_2 elementen.

Vervolgens onderwerpen we de deelen der derde orde aan een zoodanige transitieve substitutie-groep g_3 van $m_1 m_2 m_3$ elementen, die de deelen der tweede orde als systemen van imprimitiviteit, en g_3 als substitutie-groep dier systemen in elkander bezit. De orde van g_3 kunnen we dan voorstellen door $p_1 p_2 p_3$.

Op deze wijze construeeren we een fundamenteaalreeks van substitutie-groepen g_1, g_2, g_3, \dots .

Zij τ_1 een willekeurige substitutie uit g_1 ; τ_2 een substitutie uit g_2 , die op den eersten index der deelen der tweede orde denzelfden invloed heeft als τ_1 ; τ_3 een substitutie uit g_3 , die op de beide eerste indices der deelen der derde orde denzelfden invloed heeft als τ_2 ; enzovoort.

Het geheel der substituties τ_n bepaalt dan een substitutie der fundamenteaalreeksen van indices in elkander, m.a.w. een *transformatie* τ der stukken van μ in elkander.

Deze transformatie is vooreerst *één-éénduidig*; immers twee verschillende stukken van μ liggen in twee verschillende deelen van een zekere, b.v. de r^{de} orde, en deze worden door τ in weer twee verschillende deelen der r^{de} orde getransformeerd.

Is verder S_1, S_2, S_3, \dots een fundamenteaalreeks van stukken, die S_ω als haar eenig grensstuk bezit, dan moet, als $\lambda(n)$ de laagst mogelijke orde is zoodanig, dat S_n en S_ω in verschillende deelen dier orde liggen, $\lambda(n)$ met n onbepaald toenemen.

Door de transformatie τ gaat de fundamenteaalreeks dus over in een nieuwe fundamenteaalreeks, die als eenig grensstuk heeft het stuk, waarin S_ω door τ overgaat.

Als stukverzameling wordt dus μ door τ *continu* getransformeerd.

Zij $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \dots$ een reeks van substituties, die aan dezelfde voorwaarden voldoen, als boven aan $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ zijn opgelegd. Is dan $\tau_1 \tau'_1 = \tau''_1$; $\tau_2 \tau'_2 = \tau''_2$; enz., dan voldoet de reeks $\tau''_1, \tau''_2, \tau''_3, \dots$ eveneens aan de genoemde voorwaarden.

Worden verder τ' en τ'' op dezelfde wijze gedefinieerd, als zooeven τ , dan is $\tau \tau' = \tau''$.

De transformaties, die aan de voor τ gestelde voorwaarden voldoen, vormen dus een groep, die we door g zullen voorstellen.

Om het geometrische ordetype dezer groep te onderzoeken, verdeelen we op de in § 3 aangegeven wijze een perfekte stukver-

zameling ϱ in p_1 deelen der eerste orde $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{p_1}$; elk daarvan in p_2 deelen der tweede orde $\varrho_{h1}, \varrho_{h2}, \dots, \varrho_{hp_2}$; enzovoort.

De p_1 substituties van g_1 brengen we nu in één-éénduidige correspondentie met de deelen der eerste orde van ϱ . Vervolgens de $p_1 p_2$ substituties van g_2 in een zoodanige één-éénduidige correspondentie met de deelen der tweede orde van ϱ , dat als een substitutie van g_2 en een substitutie van g_1 op den eersten index van de deelen der tweede orde van μ denzelfden invloed hebben, het met de eerste corresponderende deel der tweede orde van ϱ ligt in het met de laatste corresponderende deel der eerste orde van ϱ . Evenzoo brengen we de $p_1 p_2 p_3$ substituties van g_3 in een zoodanige één-éénduidige correspondentie met de deelen der derde orde van ϱ , dat als een substitutie van g_3 en een substitutie van g_2 op de eerste twee indices van de deelen der derde orde van μ denzelfden invloed hebben, het met de eerste corresponderende deel der derde orde van ϱ ligt in het met de laatste corresponderende deel der tweede orde van ϱ . Enzovoort.

De met een reeks $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ corresponderende deelen van ϱ convergeeren dan tot een enkel stuk van ϱ , dat we aan de uit de reeks afgeleide transformatie τ laten beantwoorden. Omgekeerd beantwoordt dan aan elk stuk van ϱ een transformatie τ , en de zoo bereikte correspondentie is *één-éénduidig*.

Verder convergeeren twee transformaties τ en τ' dan en slechts dan tot elkander, wanneer de bijbehorende reeksen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ en $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \dots$ een onbepaald aangroeiend beginsegment gemeen hebben, dus wanneer de corresponderende stukken van ϱ tot elkaar convergeeren. De correspondentie tusschen de transformaties τ en de stukken van ϱ is dus *continu*.

De transformaties τ , m. a. w. de transformaties der groep g , zijn dus in één-éénduidige, continue correspondentie gebracht met de stukken van ϱ , zoodat g het *geometrische ordetype* ζ bezit.

Wanneer we nu nog aan elke substitutiegroep g_n toevoegen een eindige groep g'_n van één-éénduidige continue transformaties van μ in zichzelf, die van de stukken van μ de eerste n indices omzet volgens g_n , doch alle volgende indices onveranderd laat, dan convergeert de *fundamentealreeks der groepen* g'_1, g'_2, g'_3, \dots *gelijkmatig tot de groep* g .

De verzameling der groepen g van het geometrische ordetype , die op de aangegeven wijze kunnen worden geconstrueerd, bezit de machtigheid van het continuüm. Immers reeds de verzameling der uit priemgetallen gevormde reeksen m_1, m_2, m_3, \dots bezit deze mach-

tigheid, en twee verschillende dier reeksen geven aanleiding tot verschillende groepen g .

We kunnen het voorgaande aldus samenvatten:

STELLING 5. *Het geometrische ordetype ζ laat oneindig veel uit een geometrisch ordetype ξ van één-éénduidige, continue transformaties bestaande groepen toe; tot elk dier groepen wordt door een fundamentaalreeks van elk uit een eindig aantal één-éénduidige, continue transformaties bestaande groepen gelijkmatig geconvergeerd.*

Vatten we in het bijzonder die groepen g in het oog, voor welke op de in den aanvang dezer § omschreven wijze telkens g_n is gekozen als het directe product van g_{n-1} en een groep γ_n , dan kunnen we in het bijzonder formuleeren:

STELLING 6. *Het geometrische ordetype ζ laat oneindig veel uit een geometrisch ordetype ξ van één-éénduidige, continue transformaties bestaande groepen toe, die gelijkmatig convergente directe producten zijn van een fundamentaalreeks van eindige groepen van één-éénduidige, continue transformaties.*

§ 5.

De pseudo-optelling in het geometrische ordetype ξ .

Kiezen we de in stelling 6 bedoelde factorgroepen zoo eenvoudig mogelijk, n.l. g_1 als de bij een zekere rangschikking behorende groep van cyclische verschuivingen van den eersten index, en evenzoo elke γ_n als de bij een zekere rangschikking behorende groep van cyclische verschuivingen van den n^{den} index; g is dan commutatief en enkelvoudig transitief, en een transformatie van g is door den stand, dien ze aan een der elementen van μ geeft, eenduidig bepaald.

Kiezen we verder een willekeurig stuk van μ uit als *nulstuk*. Stellen we dit voor door S_0 , en de transformatie, die S_0 overvoert in S_x , en die daardoor bepaald is, door „ $\widehat{+} S_x$ ”. Dat het stuk $S_{\frac{1}{2}}$ door deze transformatie wordt overgevoerd in S_j , wordt dan uitgedrukt door

$$S_{\frac{1}{2}} \widehat{+} S_x = S_j,$$

welke bewerking associatief en commutatief is.

Kiezen we ten slotte, om de overeenkomst met het gewone rekenen zoo groot mogelijk te doen zijn, alle m_n 's gelijk aan 10, nemen we voor elk tiental van n^{de} indices de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in deze rangschikking, en geven we aan het nulstuk slechts indices 0.

De stukken van μ kunnen we dan één-éénduidig voorstellen door de verschillende oneindig voortlopende decimaalbreuken tusschen 0

en 1, waarbij intusschen *eindige* decimaalbreuken *niet* optreden, en 0,30 *niet* gelijk is aan 0,29, terwijl elke groep γ_n bestaat uit de verschillende wijzen, waarop men alle n^{de} decimalen met eenzelfde getal kan vermeerderen, modulo 10.

Nu verstaan we volgens het bovenstaande onder $0,5473\dots \hat{+} 0,9566\dots$ de decimaalbreuk, waarin $0,5473\dots$ wordt overgevoerd door de transformatie, die 0,0 overvoert in $0,9566\dots$, of, wat op hetzelfde neerkomt, de decimaalbreuk, waarin $0,9566\dots$ wordt overgevoerd door de transformatie, die 0,0 overvoert in $0,5473\dots$.

De bewerking, die deze decimaalbreuk geeft, en die we, omdat ze associatief en commutatief is, kunnen noemen de „*pseudo-optelling*” van $0,9566\dots$ bij $0,5473\dots$, geschiedt juist zooals de gewone optelling, met dit onderscheid, dat op elke decimaalplaats het overschot boven 10 wordt verwaarloosd, dus de verschillende decimaalplaatsen elkaar niet beïnvloeden. Derhalve is:

$$0,5473\dots \hat{+} 0,9566\dots = 0,4939\dots$$

Verstaan we analoog onder $0,5473\dots \hat{-} 0,9566\dots$ de decimaalbreuk, waarin $0,5473\dots$ wordt overgevoerd door de transformatie, die $0,9566\dots$ overvoert in 0,0, en noemen we de bewerking, die deze decimaalbreuk geeft, de „*pseudo-aftrekking*” van $0,9566\dots$ van $0,5473\dots$, dan geschiedt deze pseudo-aftrekking op dezelfde wijze als de gewone aftrekking, met dit onderscheid, dat het „leenen” niet gaat ten koste van de voorafgaande decimaalplaatsen, dus weer de verschillende decimaalplaatsen elkaar niet beïnvloeden. Zoo is dus:

$$0,5473\dots \hat{-} 0,9566\dots = 0,6917\dots$$

Pseudo-optelling en pseudo-aftrekking geven, door de bewerking slechts met een groot genoeg eindig aantal op elkaar volgende cijfers direct achter de komma uit te voeren, in het ordetype ζ een resultaat, dat met het ware tot in elken gewenschten graad van nauwkeurigheid overeenkomt. Ook hierin staan ze gelijk met de gewone optelling en aftrekking van reële getallen.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt een mededeeling aan van Dr. W. VAN DER WOUDE, getiteld: „*De kubische involutie van den eersten rang in 't platte vlak.*”

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

1. Is V een plat vlak, dan is 't op verschillende wijzen mogelijk de punten van V zoo in groepen van drie aan elkaar toe te voegen, dat een willekeurig punt deel uitmaakt van slechts een groep. Is P_1 een punt van V , dan moeten er tusschen de coördinaten van P_1 en die van de andere punten der groep, waartoe P_1 behoort, dus

eenige betrekkingen bestaan, waardoor die andere punten volkomen bepaald zijn. 't Is echter mogelijk, dat P_1 zoo gekozen kan worden, dat aan een dezer betrekkingen identiek wordt voldaan; in dat geval zal P_1 deel uitmaken van oneindig veel groepen.

Wij gaan nu van de volgende bepaling uit:

De punten van een vlak V vormen een kubische involutie van den eersten rang, wanneer zij zoo in groepen van drie aan elkaar zijn toegevoegd, dat (met uitzondering van enkele bepaalde punten) elk punt slechts deel uitmaakt van één groep.

Een driehoek, waarvan de hoekpunten tot een zelfde groep behooren, noemen wij een *involutiedriehoek*, elk punt dat een hoekpunt van meer dan één en dus van oneindig veel involutiedriehoeken is, een *bijzonder punt* der involutie; elk punt; dat met één zijner toegevoegde punten samenvalt, heet een *dubbelpunt*. Draait een der zijden van een involutiedriehoek om een vast punt, dan zal 't derde hoekpunt van dezen driehoek een rechte of kromme lijn beschrijven; *wij zullen ons bij dit onderzoek beperken tot 't geval, dat een hoekpunt van een involutiedriehoek een rechte lijn beschrijft, als de overstaande zijde om een vast punt draait.*

2. Als de punten van een vlak V nu een kubische involutie van den eersten rang vormen, die voldoet aan de zoeven genoemde voorwaarde en die wij verder door (i_3) zullen aanduiden, dan kunnen wij aan elk punt van V de verbindingslijn zijner toegevoegde punten projectief toevoegen. Elk hoekpunt van een involutiedriehoek en zijn overstaande zijde zijn dan pool en poollijn ten opzichte van een zelfde kegelsnede, die wij in 't vervolg steeds γ_2 zullen noemen; elke involutiedriehoek is een pooldriehoek van γ_2 . 't Is duidelijk, dat niet omgekeerd elke pooldriehoek van γ_2 een involutiedriehoek van (i_3) is; immers elk punt van V is een hoekpunt van oneindig veel pooldriehoeken van γ_2 , maar van slechts één involutiedriehoek. Is echter S een bijzonder punt der involutie, dan moet S een hoekpunt zijn van oneindig veel involutiedriehoeken, dus is elke pooldriehoek van γ_2 , die S tot hoekpunt heeft, tevens een involutiedriehoek. Wordt een punt G der kegelsnede γ_2 als hoekpunt van een involutiedriehoek aangenomen, dan moet een der beide andere hoekpunten met G samenvallen, dus G is een dubbelpunt der involutie; γ_3 , de meetkundige plaats dezer dubbelpunten, is de *dubbelskromme* der involutie.

Elke lijn l , wier pool ten opzichte van γ_2 geen bijzonder punt der involutie is, is een zijde van slechts één involutiedriehoek, n.l. van dien driehoek, die de pool van l tot hoekpunt heeft. Daarentegen is elke lijn, wier pool een bijzonder punt is, een zijde van

oneindig veel involutiedriehoeken, die alle dat punt tot hoekpunt hebben. Hieruit volgt, dat ook de lijnen van V een kubische involutie (i'_3) van den eersten rang vormen; de poollijnen der bijzondere punten van (i_3) zijn de bijzondere lijnen van (i'_3), de raaklijnen van γ_2 zijn hare dubbellijnen en γ_2 is haar dubbelkromme. Beide involuties zijn ten opzichte van γ_2 polair verwant.

De involutiedriehoeken van γ_2 zijn alle pooldriehoeken van een zelfde kegelsnee γ_2 , die tevens de dubbelkromme van (i_3) is. De lijnen van V vormen een involutie (i'_2), die ten opzichte van γ_2 de poolfiguur van (i_2) is. Elke pooldriehoek van γ_2 , die een bijzonder punt der involutie tot hoekpunt heeft, is tevens een involutiedriehoek.

3. Wij laten een punt een lijn a_1 beschrijven en vragen naar de meetkundige plaats zijner toegevoegde punten. Trekken wij door A_1 , de pool van a_1 ten opzichte van γ_2 , een willekeurige lijn p_1 , dan ligt P_1 , de pool van p_1 , op a_1 , terwijl de beide punten, die aan P_1 zijn toegevoegd, op p_1 liggen; deze beide punten liggen ook op de gevraagde meetkundige plaats. Bovendien is A_1 zelf aan twee punten van a_1 toegevoegd, zoodat A_1 een dubbelpunt van de gevraagde kromme is en elke lijn door A_1 deze dus in een dubbelpunt en nog twee punten snijdt. We vinden derhalve:

Beschrijft een der hoekpunten van een involutiedriehoek een lijn a_1 , dan beschrijven de beide andere een kromme α^4 van den vierden graad met een dubbelpunt in A_1 , de pool van a_1 ten opzichte van γ_2 . Daar a_1 alle bijzondere lijnen snijdt, liggen alle bijzondere punten op α^4 .

Een paar eigenschappen dezer kromme α^4 worden hier nog medegedeeld:

1°. Laten A_2 en A_3 de punten zijn, die aan A_1 zijn toegevoegd, dan moet de poollijn van A_3 ten opzichte van γ_2 — dat is dus de lijn $A_1 A_2$ — α^4 snijden in A_1 en in de punten, die met A_3 een involutiedriehoek vormen. Deze beide punten zijn A_1 en A_2 . Dus zal α^4 in A_1 door de lijnen $A_1 A_2$ en $A_1 A_3$ worden aangeraakt; A_2 en A_3 zijn snijpunten van a_1 en α^4 .

2°. Behalve in A_2 en A_3 zal α^4 nog in twee punten door a_1 gesneden worden; deze punten zijn tevens de snijpunten van a_1 en γ_2 .

3°. Behalve in deze laatste punten zal α^4 nog in 6 punten door γ_2 gesneden worden; de raaklijnen in deze 6 punten aan α^4 moeten door A_1 gaan. Hieruit volgt, dat α^4 van de tiende klasse is waarmee de Plückersche getallen van α^4 volkomen bepaald zijn ($n = 4$, $m = 10$, $d = 1$). Dit sluit, want 't is gemakkelijk na te gaan, dat α^4 behalve A_1 geen enkel dubbelpunt bezitten kan.

4. Doorloopt een hoekpunt van een involutiedriehoek een lijn, waarop een bijzonder punt ligt, dan ontardt de kromme, door de beide andere hoekpunten beschreven, in de poollijn van dat bijzondere punt en een kromme, die van den derden graad moet zijn. Doorloopt een hoekpunt van een involutiedriehoek een bijzondere lijn s , dan zal één der beide andere hoekpunten een vast punt zijn n.l. de pool van s , en 't andere punt zal s zelf doorloopen en nog evenveel lijnen als er bijzondere punten op s liggen. Daar beide punten tezamen een kromme van den vierden graad moeten beschrijven, zullen dus 3 bijzondere punten op s liggen. Eveneens is elk bijzonder punt 't snijpunt van 3 bijzondere lijnen.

Is nu weer a_1 een willekeurige lijn en heeft ook a' dezelfde betekenis als boven, dan zal de kromme a' een lijn b_1 vier maal snijden; hieruit volgt, dat 't vier maal gebeurt, dat een punt van a_1 en een punt van b_1 hoekpunten zijn van een zelfden involutiedriehoek. Deze hoekpunten noemen wij P_1, Q_1, R_1, S_1 en P_2, Q_2, R_2, S_2 terwijl de derde hoekpunten dezer driehoeken door P_3, Q_3, R_3, S_3 mogen worden voorgesteld; verder is T_1 't snijpunt van a_1 en b_1 en zijn T_2 en T_3 de beide punten, die met T_1 een involutiedriehoek vormen.

Doorloopt nu een punt de lijn b_1 , dan beschrijven zijne toegevoegde punten een kromme β' van den vierden graad; a' en β' hebben 16 snijpunten. Deze zijn:

- 1°. de beide punten T_2 en T_3 ;
- 2°. de vier punten P_3, Q_3, R_3, S_3 ;
- 3°. nog tien punten, die dus de eigenschap bezitten, dat er aan elk hunner twee, dus oneindig veel puntenparen zijn toegevoegd en die dus de bijzondere punten zijn. Dus:

De involutie (i_3) heeft 10 bijzondere punten; hunne poollijnen zijn de 10 bijzondere lijnen van (i'_3).

Deze bijzondere elementen hebben zoodanige ligging, dat op elk dezer lijnen drie dezer punten liggen en in elk der punten drie der lijnen elkaar snijden; zij vormen dus een configuratie ($10_3, 10_3$).

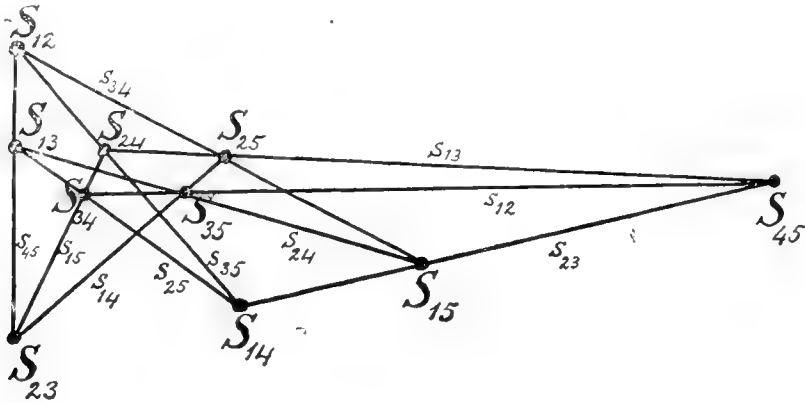
Is s_{12} een bijzondere lijn en S_{12} haar pool ten opzichte van γ_2 , dan zijn er behalve S_{12} nog 6 bijzondere punten, die niet op s_{12} liggen. Is S_{13} een dezer punten en s_{13} de poollijn van S_{13} , dan is 't snijpunt van s_{13} en s_{12} tevens de pool van $S_{12}S_{13}$. Dit punt vormt een involutiedriehoek met S_{12} en nog een punt van s_{12} en een anderen met S_{13} en een punt van s_{13} (een „anderen”, daar S_{12} en S_{13} , die niet op elkaars poollijn liggen, geen hoekpunten van een zelfden involutiedriehoek kunnen zijn); dus is ook 't snijpunt van s_{12} en s_{13} een bijzonder punt en $S_{12}S_{13}$ een bijzondere lijn.

Elke lijn, die 2 bijzondere punten verbindt, die niet op elkaars

poollijn liggen, is een bijzondere lijn; elk punt, dat 't snijpunt is van 2 bijzondere lijnen, die niet door elkaars pool gaan, is een bijzonder punt.

Op s_{12} de poollijn van S_{12} liggen 3 bijzondere punten; de overige 6 worden met S_{12} verbonden door 3 bijzondere lijnen. Elke lijn, die S_{12} verbindt met een der bijzondere punten op s_{12} , is dus geen bijzondere lijn, daar slechts 3 dezer lijnen door S_{12} gaan.

Wij kunnen de ligging der bijzondere punten aangeven door 't volgende figuurtje, waarbij de indices zóó gekozen zijn, dat steeds de punten S_{ik} , S_{kl} en S_{il} op een zelfde lijn liggen, de lijnen s_{ik} , s_{kl} en s_{il} elkaar in een zelfde punt snijden en 't punt S_{ik} en de lijn s_{ik} elkaars pool en poollijn zijn ten opzichte van γ_2 .



5. Wij laten een punt een kegelsnee α_2 en een ander punt een lijn b_1 beschrijven; de beide punten, die aan 't eerste zijn toegevoegd, doorloopen een kromme ω , die aan 't tweede zijn toegevoegd, een kromme β^4 . Daar β^4 en α_2 elkaar in 8 punten snijden, moeten ook b_1 en ω 8 punten gemeen hebben, dus is ω een kromme van den achtsten graad; wij zullen haar verder α^8 noemen. Daar α_2 alle bijzondere lijnen tweemaal snijdt, zal α^8 in elk der 10 bijzondere punten een dubbelpunt bezitten.

Is α_2 om een involutiedriehoek beschreven, dan heeft α^8 ook in de hoekpunten van dezen driehoek dubbelpunten. Daar alle involutiedriehoeken tevens pooldriehoeken zijn van een zelfde kegelsnee γ_2 , kunnen wij om elk paar involutiedriehoeken een kegelsnee beschrijven; is een kegelsnee β_2 om 2 dezer driehoeken beschreven, dan zal de aan haar toegevoegde kromme β^8 in haar omtrek 6 dubbelpunten hebben. Ook de nog overige snijpunten van β_2 en β^8 zijn gemakkelijk aan te geven; 't zijn de 4 snijpunten van β_2 en γ_2 .

We weten bovendien, dat een kegelsnee, die beschreven is om een involutiedriehoek en door 2 der hoekpunten van een anderen

involutiedriehoek, ook 't derde hoekpunt van dezen laatsten moet bevatten.

6. 't Is ook duidelijk, dat wij gemakkelijk kegelsneden kunnen aanbrengen, die om 3 involutiedriehoeken beschreven zijn; daarvoor brengen wij een kegelsnee α_2 door de hoekpunten van een willekeurigen involutiedriehoek en door 2 bijzondere punten, die niet op elkaars poollijn liggen; hiervoor kiezen wij S_{12} en S_{13} . Daar α_2 om een pooldriehoek van γ_2 beschreven is, is zij om oneindig veel dezer driehoeken beschreven; verder is *elke* pooldriehoek van γ_2 , die een der bijzondere punten tot hoekpunt heeft, tevens een involutiedriehoek, zoodat α_2 om drie involutiedriehoeken beschreven is.

Nu zal de kromme α^s in den omtrek van α_2 9 dubbelpunten bezitten, dus moet zij ontaarden en α_2 een der deelen zijn, waarin zij uiteenvalt. Is P_1 een willekeurig punt van α_2 , dan zal dus steeds een van de beide punten P_2 en P_3 , die met P_1 een involutiedriehoek vormen, ook op α_2 liggen, dus ligt ook 't derde hoekpunt op α_2 (5). Laten wij nu P_1 de kegelsnee α_2 beschrijven, dan zullen P_2 en P_3 dezelfde kromme doorloopen; telkens echter als P_1 samenvalt met een der bijzondere punten op α_2 , zullen P_2 en P_3 aan geen andere voorwaarde gebonden zijn, dan dat ze op de poollijn van dat punt moeten liggen en met P_1 een pooldriehoek van γ_2 moeten vormen. Dus de deelen, waarin α^s ontaardt, zijn:

1°. de kegelsnee α_2 , die dubbel geteld moet worden;

2°. evenveel lijnen, als er bijzondere punten op α_2 liggen.

Hieruit volgt, dat er behalve S_{12} en S_{13} nog 2 bijzondere punten op α_2 liggen.

Dit laatste bewijzen wij ook nog op een andere wijze; wij brengen nog een tweede kegelsnee β_2 aan, die om een involutiedriehoek Q_1, Q_2, Q_3 en door S_{12} en S_{13} beschreven is; deze zal α_2 nog in twee punten snijden, die beide van twee, dus van oneindig veel involutiedriehoeken hoekpunten zijn en dus bijzondere punten zijn. Brengen we nog een kegelsnee σ_2 aan, die om een involutiedriehoek R_1, R_2, R_3 en door S_{12} en S_{13} beschreven is, dan moet ook deze α_2 nog snijden in twee bijzondere punten; deze moeten dezelfde zijn als de snijpunten van α_2 en β_2 , omdat op α_2 niet meer dan 4 bijzondere punten kunnen liggen. Dus zullen alle kegelsneden, die door S_{12} en S_{13} gaan en verder om één, dus om oneindig veel involutiedriehoeken beschreven zijn, een bundel vormen; de beide andere basispunten van dezen bundel zijn ook bijzondere punten. Deze bepalen wij eerst: kiezen wij als β_2 't lijnenpaar S_{24} en S_{25} en als σ_2 't paar S_{34} en S_{35} , dan blijkt 't, dat S_{14} en S_{15} de bedoelde basispunten zijn. Dus:

Zijn de 10 bijzondere punten en daardoor ook de dubbelkromme γ_2 der involutie bekend, dan kunnen wij de involutiedriehoeken aldus voortbrengen:

Wij kunnen 5 verschillende kegelsnedenbundels aanbrengeu, waarvan elke kegelsnee om oneindig veel pooldriehoeken van γ_2 beschreven is, die dan terens de bedoelde involutiedriehoeken zijn; de basispunten dezer bundels bestaan uit de puntenstelsels $(S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15})$, $(S_{12}, S_{23}, S_{24}, S_{25})$, $(S_{13}, S_{23}, S_{34}, S_{35})$, $(S_{14}, S_{24}, S_{34}, S_{45})$ en $(S_{15}, S_{25}, S_{35}, S_{45})$.

Deze bundels zullen wij in 't vervolg respectievelijk (B_1) , (B_2) , (B_3) , (B_4) en (B_5) noemen.

Zijn a_1 en a_2 twee kegelsneden, de eerste willekeurig uit (B_1) , de tweede willekeurig uit (B_2) genomen, dan zullen deze beide 4 snijpunten hebben, n.l. S_{12} en de hoekpunten van een involutiedriehoek. Nu kan 't op twee verschillende wijzen gebeuren, dat 2 dezer snijpunten samenvallen: 1°. kan S_{12} tevens een hoekpunt van den involutiedriehoek zijn, 2°. kan een dezer hoekpunten op de dubbelkromme γ_2 liggen. In elk dezer beide gevallen zullen a_1 en a_2 slechts drie verschillende punten gemeen hebben, maar elkaar bovendien in een dezer punten aanraken.

7. Uit deze 5 bundels kiezen wij er een — b.v. (B_1) — willekeurig uit; een willekeurige kegelsnee σ_2 uit (B_1) is om oneindig veel involutiedriehoeken beschreven, wier hoekpunten een involutie van den derden graad in haar omtrek vormen. Deze heeft 4 dubbelpunten in de snijpunten van σ_2 met γ_2 , de dubbelkromme der involutie (i_3). Omgekeerd snijden de kegelsneden uit den bundel (B_1) een involutie van den vierden graad op γ_2 in; deze laatste heeft 6 dubbelpunten in de punten, waarin γ_2 door een kegelsnee uit (B_1) wordt aangeraakt. In elk dezer punten zijn dus 3 punten samengevallen, die tezamen een groep van (i_3) vormen. Derhalve:

De involutie (i_3) heeft 6 driedubbelpunten; in elk dezer punten wordt γ_2 aangeraakt door een kegelsnee uit elk der bundels (B_1) , (B_2) , (B_3) , (B_4) en (B_5) .

8. Een punt, welks toegevoegde punten samenvallen, noemen wij een *vertakkingspunt*, de meetkundige plaats dezer punten de *vertakkingskromme*. Laten wij een punt G de kegelsnee γ_2 doorloopen, dan moet de kromme van den achtsten graad, voortgebracht door de aan G toegevoegde punten, ontwaarden in 2 deelen, waarvan 't eene γ_2 zelf en 't andere de vertakkingskromme is. Hieruit volgt, dat deze laatste van den zesden graad is en in de 10 bijzondere punten dubbelpunten bezit; zij is dus rationaal, zooals behoort, daar ze punt voor punt met een kegelsnee overeenkomt.

Ook op een andere wijze kunnen wij den graad van de vertakkingskromme gemakkelijk afleiden: beschrijft een punt een lijn a_1 , dan doorloopen de toegevoegde punten een kromme α' , die met γ_2 8 snijpunten heeft, waarvan er twee samenvallen met de snijpunten van a_1 en γ_2 , terwijl de andere op 6 snijpunten van a_1 met de vertakkingskromme wijzen.

Is G_{12} een punt der dubbelkromme γ_2 en g de raaklijn in dat punt aan γ_2 , dan zal g de vertakkingskromme in 6 punten snijden, waarvan één G_3 met 't dubbelpunt G_{13} een groep van toegevoegde punten vormt; in de driedubbelpunten der involutie zullen dus γ_2 en de vertakkingskromme elkaar moeten aanraken.

De vertakkingskromme is een rationale kromme van den zesden graad, die in de bijzondere punten dubbelpunten heeft en de dubbelkromme in de driedubbelpunten der involutie aanraakt.

Opmerking. Een rationale kromme van den zesden graad heeft 10 dubbelpunten, waarvan er echter slechts 8 willekeurig aangenomen kunnen worden¹⁾; uit 't voorafgaande volgt echter, dat 10 punten, die een $C_f(10_3, 10_3)$ bepalen, steeds dubbelpunten kunnen zijn van een rationale kromme van den zesden graad.

In een anderen vorm maakt C. F. GEISER (zie zijn in het volgend nummer aangehaalde geschrift) dezelfde opmerking.

9. Wij willen nu 't voorafgaande toepassen op eenige vraagstukken uit de Driedimensionale Meetkunde. Daarvoor beschouwen wij den bundel (B) van kubische ruimtekrommen, die door 5 vaste punten P_1, P_2, P_3, P_4 en P_5 gebracht kunnen worden. Deze snijden op een willekeurig vlak V een kubische involutie van den eersten rang in; de lijnen $P_i P_j$ snijden V in de bijzondere punten S_{ij} , de vlakken $P_k P_l P_m$ snijden V in de bijzondere lijnen s_{ij} der involutie. Door een willekeurig punt van V gaat slechts een kromme uit dezen bundel, door een bijzonder punt S_{ij} gaan echter oneindig veel krommen, die alle ontaard zijn in de vaste lijn $P_i P_j$ en een veranderlijke kegelsnee; deze kegelsneden vormen een bundel met P_k, P_l, P_m en 't snijpunt van $P_i P_j$ met 't vlak $P_k P_l P_m$ als basispunten. Elk dubbelpunt der involutie in V is nu een punt, waarin een ruimtekromme uit den bundel (B) 't vlak V raakt; 't derde snijpunt dezer kromme met V is een punt der vertakkingskromme, dat met 't raakpunt een groep van onderling toegevoegde punten der involutie vormt. Een driedubbelpunt der involutie is een punt, waarin een ruimtekromme uit (B) door V geoseuleerd wordt. Hieruit volgt:

¹⁾ SALMON-FIEDLER: Höhere ebene Kurven, Zweite Auflage, pag. 42.

1°. *Alle kubische ruimtekrommen, die door 5 gegeven punten gaan en een gegeven vlak V aanraken, vormen een oppervlak F^{10} van den tienden graad, dat V aanraakt in een kegelsnee en V bovendien nog snijdt volgens een rationale kromme van den zesden graad.*

2°. *Er zijn 6 kubische ruimtekrommen, die door 5 gegeven punten gaan en een gegeven vlak tot osculatievlak hebben.*

Als een bijzonder geval van deze laatste stelling hebben wij nog: *door 5 gegeven punten gaan 6 ruimteparabolen.*

Door den bundel (B) van kubische ruimtekrommen met P_1, P_2, P_3, P_4 en P_5 als basispunten wordt een vlak V volgens een kubische involutie van den eersten rang gesneden. Is α een kromme uit dezen bundel, die V in A_1, A_2 en A_3 snijdt, dan wordt α uit A_1 geprojecteerd door een kegel, die V volgens de lijnen $A_1 A_2$ en $A_1 A_3$ snijdt. Raakt echter een kromme γ uit (B) 't vlak V in een punt G_{12} en snijdt zij V bovendien in een punt G_3 , dan wordt γ uit G_{12} geprojecteerd door een kegel, die V snijdt volgens $G_{12} G_3$ en de raaklijn in G_{12} aan γ ; uit G_3 wordt γ geprojecteerd door een kegel, die V volgens $G_3 G_{12}$ aanraakt. Wij hebben gezien, dat G_{12} op de dubbelkromme en G_3 op de vertakkingskromme der involutie moet liggen, terwijl $G_3 G_{12}$ de eerste aanraakt; zal dus een kwadratische kegel door de basispunten van den bundel (B) gaan en bovendien V aanraken, dan moet zijn top op de vertakkingskromme liggen en de raaklijn met V moet de dubbelkromme raken.

't Aantal kwadratische kegels, die door 5 gegeven punten gaan en een gegeven vlak aanraken, is enkelvoudig oneindig; de raaklijnen omhullen een kegelsnee. De toppen der kegels vormen een rationale kromme van den zesden graad¹⁾.

De raakvlakken van al deze kegels, wier aantal ∞^2 is, omhullen een oppervlak, waarvan wij de klasse willen bepalen en dat wij voorlooping Φ_n noemen. Is K_2 een dezer kegels en G_3 zijn top, dan zal door een lijn l , in V door G_3 getrokken, nog één raakvlak aan K_2 gaan; daar l met de vertakkingskromme 6 snijpunten heeft, ligt zij dus in nog 6 raakvlakken van Φ_n behalve in V . Verder is V een troop van Φ_n (dat is een raakvlak dat in de punten van een kegelsnee (γ_2) aanraakt), die dubbel geteld moet worden; 't oppervlak Φ_n is dus van de achtste klasse.

De raakvlakken van deze kegels omhullen een oppervlak van de achtste klasse¹⁾.

Wij stellen ten slotte nog de vraag, hoeveel *ruimtecirkels* door 5 gegeven punten gebracht kunnen worden, waarbij wij onder een

1) G. F. GEISER: „Über Systeme von Kegeln zweiten Grades“.

ruimtecirkel een kubische ruimtekromme verstaan, die den isotropen cirkel in twee punten snijdt. Alle kubische ruimtekrommen door deze 5 punten snijden op 't oneindig ver gelegen vlak V_{∞} een involutie in; beschrijft nu een punt den isotropen cirkel, dan zullen zijne toegevoegde punten een kromme van den achtsten graad doorloopen, die met dezen cirkel 16 punten gemeen heeft; 4 dezer punten zijn tevens dubbelpunten der involutie, terwijl de andere twee aan twee op een zelfden ruimtecirkel liggen.

Dus gaan er door 5 gegeven punten 10 ruimtecirkels, waarvan er 4 't vlak in 't oneindige aanraken.

Voor de Bibliotheek wordt aangeboden door den Heer HAGA de dissertatie van den Heer A. AALDERINK: „Thomson-effectbepalingen in ijzer bij verschillende temperaturen” en door den Heer ZWAARDEMAKER: „Leerboek der Physiologie, Deel I, Stuk 2”.

Daar de vereenigde vergadering der beide Afdeelingen zal worden gehouden op Zaterdag 30 April a. s. wordt de April-vergadering der Natuurkundige Afdeeling vastgesteld op Vrijdag 29 April e. k.

De vergadering wordt gesloten.

In het Verslag der Zitting van 26 Februari 1910.

- p. 770 enz. in plaats van 20° K. en 14° K. leze men: 20°,3 K. en 14°,0 K.
- .. 771 r. 13 v. b.: na „stoffen” leze men: „cobalt uitgezonderd”.
- .. 14 „ o.: na „wij” leze men: „het resultaat ongecorrigeerd latende voor de uitzetting tusschen de twee temperaturen”.
- .. 11 „ „ p. 791 r. 12 v. o., en p. 796 r. 3 v. o. i. pl. v. 1,0546 leze men: 1,0548.
- .. 772 „ 4 „ „ i. pl. v. 1,042 leze men: 1,043.
- .. 773 in de tabel leze men:
- | | | |
|--------|-----------|--------|
| 1,0548 | i. pl. v. | 1,0553 |
| 57,6 | „ „ „ | 57,7 |
| 3381 | „ „ „ | 3382 |
| 1,0201 | „ „ „ | 1,020 |
- r. 6 v. o. achter „niet” leze men: „veel”.
- .. 5 „ „ „ „deze” leze men: „benaderde”.
- .. 774 „ 10 „ „ „ „temperaturen” leze men: „bij benadering”.
- .. 9 „ „ „ „ „eene” leze men: „belangrijke”.
- .. 4 „ „ vóór „onveranderlijkheid” voege men in: „benaderde”.
- .. 778 zie de noot toegevoegd in de Engelsche vertaling.
- .. 780 r. 15 v. b. i. pl. v. $\frac{M'}{N}$ leze men: $\frac{M'}{M}$.
- .. 791 enz. In de tabellen leze men: „cm. der schaal” in pl. v. „cm.² der schaal”.
- .. 796 In tabel IX leze men: $\frac{I_{20^{\circ},3\text{K.}}}{I_{15^{\circ},8\text{C.}}}$ i. pl. v. I^2 in cm.² der schaal.
- r. 7 v. o. leze men: 1,0616 i. pl. v. 1,6016.
-

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Vrijdag 29 April 1910.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 854.
- Verslag van de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en H. E. DE BRUYN over eene verhandeling van den Heer H. van CAPPELLE: „Bijdrage tot de kennis van de landijsvormingen in de provincie Friesland en van het oudere fluviatile diluvium in den ondergrond van Noord-Nederland”, p. 854.
- JAN DE VRIES: „Over lineaire poolgroepen behoorende bij een biquadratische vlakke kromme”, p. 855.
- M. J. VAN UVEN: „Infinitesimale iteratie van wederkeerige functies”. (Aangeboden door de Heeren JAN DE VRIES en W. KAPTEYS), p. 860.
- E. J. J. BUTTENDIJK: „Over de gaswisseling der koudbloedige dieren in verband met hunne grootte”. (Aangeboden door de Heeren H. ZWAARDEMAKER en T. PLACE), p. 870.
- C. BRAAK: „Het dubbeldaagsche maansgetij berekend uit opteekeningen van den astatischen seismograaf te Batavia”. (Aangeboden door de Heeren J. P. VAN DER STOK en H. KAMERLINGH ONNES), p. 875.
- C. BRAAK: „Bepaling van het epicentrum van aardbevingen door middel van de opteekening op een station”. (Aangeboden door de Heeren J. P. VAN DER STOK en H. KAMERLINGH ONNES), p. 880. (Met één plaat).
- F. E. C. SCHEFFER: „Over het optreden van maximum- en minimumdruk bij heterogene evenwichten bij constante temperatuur”. (Aangeboden door de Heeren H. F. HOLLEMAN en J. D. VAN DER WAALS), p. 885.
- P. ZEEMAN en B. WINAWER: „Magnetische splitsing der absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken”. (2e mededeeling) p. 889.
- M. W. BEYERINCK: „Emulsieclavulan het product der werking van viscosaccharase op rietsuiker” p. 898.
- ST. LORIA: „Der magneto-optische KERN-effect bei ferromagnetischen Verbindungen und Legierungen”. (Aangeboden door de Heeren H. E. J. G. DE BOIS en J. BOSSCHA), p. 903. (Met één plaat).
- W. H. JULIUS: „Over de verklaring van spectroheliogrammen en lijverplaatsingen en over anomale verstrooiing van het licht”, p. 913.
- C. A. CROMMELIS: „Isothermen van eenatomige gassen en hunne binaire mengsels IV. Opmerkingen over de bereiding van argon. V. Dampspanningen boven -110°C ., kritische temperatuur en kritische druk van argon”. (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en H. A. LORENTZ), p. 924. (Met één plaat).
- H. KAMERLINGH ONNES en A. PERRIER: „Onderzoekingen over de magnetisatie van vloeibare en van vaste zuurstof”, p. 937. (Met één plaat).
- K. F. WENCKEBACH: „Over den invloed der ademhaling op den pols”, p. 974.
- Aanbieding eener verhandeling van den Heer C. U. ARNOLD KAPPELERS: „The migrations of the motoneurones of the Trigeminal, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres”, p. 974.
- Erratum p. 974

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 11 April 1910 waarbij bericht wordt dat H. M. de Koningin bekrachtigd heeft de benoeming van de Heeren H. A. LORENTZ tot Voorzitter en D. J. KORTEWEG tot Onder-Voorzitter der Natuurkundige Afdeeling.

De Voorzitter wenscht den Heer LORENTZ geluk met zijne benoeming en wenscht hem toe dat hij van de leden evenveel medewerking zal mogen ontvangen als hij in zijn 22-jarig Voorzitterschap heeft ondervonden.

2°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 20 April 1910 waarbij bericht wordt, dat nu aan de Akademie geen geleerden bekend zijn bereid zich buiten bezwaar van 's Rijks Schatkist te laten afvaardigen naar het Internationaal Wetenschappelijk Congres te Buenos Aires er geen voldoende termen bestaan om de aanwijzing van een Regeeringsgedelegeerde te bevorderen.

Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 28 April 1910 met verzoek te willen berichten of er Nederlandsche geleerden zijn bereid de Regeering te vertegenwoordigen op het in Augustus a. s. te Stockholm te houden Internationaal Geologisch Congres.

Aan Z.Exc. zal worden medegedeeld dat Prof. G. A. F. MOLENGRAAFF zich daartoe bereid heeft verklaard.

4°. Circulaire van het 1^{ste} Internationaal Geologisch Congres in Augustus 1910 te Stockholm te houden, met verzoek aan de Akademie om een afgevaardigde te zenden.

De Heer MOLENGRAAFF verklaart zich bereid ook als afgevaardigde der Akademie op te treden.

5°. Circulaires van het 3^{de} Internationaal Botanisch Congres 14—22 Mei a. s. te Brussel te houden.

6°. Bericht van het overlijden van het Buitenlandsch Lid der Akademie den Heer Prof. E. PFLÜGER te Bonn op 16 Maart j.l.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Aardkunde. — De Heer MOLENGRAAFF brengt het volgende Verslag uit:

In het opstel getiteld „Bijdrage tot de kennis van de landijsvormingen in de provincie Friesland en van het oudere fluviatile diluvium in den ondergrond van Noord-Nederland” beschrijft Dr. H. VAN CAPPELLE de resultaten verkregen uit het onderzoek der monsters van een tiental grondboringen in Friesland en Drente.

Hij beschrijft het voorkomen van den keileem als een samenhangende laag die op nog al verschillende diepten ligt, en in verband hiermede geeft hij eenige beschouwingen over het voorkomen van kames en âsar in Friesland. Hij gelooft niet dat men ergens in Noord-Nederland het voorkomen van twee afzonderlijke kleileemen mag aannemen.

Verder beschrijft hij het fluviatile diluvium, dat onder den keileem ligt en uit die beschrijving trekt hij de conclusie, dat tot op de diepten, waartoe de boringen reiken, overal daarin een zone voorkomt, die betrekkelijk grof en scherpkantig grint van Scandinafschens oorsprong bevat, welke wijst op den invloed van landijs op geringen afstand. Dit grint is waarschijnlijk gevormd gedurende een glaciaaltijd, die ouder is dan de derde of hoofdijsijd.

Eindelijk deelt de schrijver bijzonderheden omtrent het ontstaan der verschillende soorten van potklei mede.

De beschouwingen van den schrijver leveren een welkome bijdrage tot de kennis van de geologie van het noordelijk deel van Nederland, om welke reden de ondergeteekenden de eer hebben aan de Akademie voor te stellen het opstel van den heer van Cappelle op te nemen in de verhandelingen der Akademie en wel als een der mededeelingen omtrent de geologie van Nederland verzameld door de Commissie voor het geologisch onderzoek.

Daar de inleiding naar het oordeel der ondergeteekenden korter zoude kunnen zijn, nemen zij de vrijheid tevens voor te stellen aan den schrijver in overweging te geven de inleiding, voor zoover die tot verduidelijking van de verdere verhandeling niet noodig is, te bekorten.

G. A. F. MOLENGRAAFF.

H. E. DE BRUYN.

's Gravenhage, 26 April 1910.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan:
„Over lineaire poolgroepen behoorende bij een biquadratische vlakke kromme”.

1. Ten opzichte van een biquadratische kromme γ^4 , met de symbolische vergelijking $a_x^4 = 0$, vormen de punten X, Y, Z, W een poolquadrupel als voldaan is aan de betrekking $a_x a_y a_z a_w = 0$. Kiest men X, Y, Z willekeurig op een rechte r en neemt als vierde punt W het snijpunt van r met de „tripelpoollijn” $p_{x,yz}$ van X, Y, Z , dan verkrijgt men een „lineair” poolquadrupel. De lineaire poolquadrupels

op r vormen blijkbaar een involutie I_3^4 ; haar „hoofdpunten” (vier-voudige elementen) zijn de snijpunten van γ^4 met r .

Neemt men voor de punten op r een zoodanige parameter-voorstelling aan, dat twee der hoofdpunten door $\lambda = 0$ en $\lambda = \infty$ worden aangewezen, dan heeft men voor de groepen der I_3^4 de betrekking

$$\sum_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + p \sum_6 \lambda_1 \lambda_2 + q \sum_4 \lambda_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waardoor aan elk drietal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ één waarde λ_4 wordt toegevoegd, tenzij gelijktijdig voldaan is aan

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + p(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) + q(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0$$

en

$$(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) + p(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + q = 0.$$

Er is dus een „neutrale” involutie I_1^3 , waarvan de groepen door elk punt tot quadrupels worden aangevuld. De rechte r is dus trippelpoollijn voor ∞^1 op haar gelegen drietallen van polen.

2. Stelt men $z_k = x_k + \lambda y_k$ en $w_k = x_k + \mu y_k$ dan heeft men voor de lineaire poolquadrupels op de rechte XY de betrekking

$$a_x a_y (a_x + \lambda a_y) (a_x + \mu a_y) = 0$$

of

$$a_x^3 a_y + (\lambda + \mu) a_x^2 a_y^2 + \lambda \mu a_x a_y^3 = 0.$$

Kiest men X en Y zoo, dat gelijktijdig wordt voldaan aan de drie betrekkingen

$$a_x^3 a_y = 0, \quad a_x^2 a_y^2 = 0, \quad a_x a_y^3 = 0,$$

dan vormen X en Y een „neutraal paar” der I_3^4 ; d. w. z. een paar dat met elke twee punten van r een quadrupel der I_3^4 vormt.¹⁾

In dit geval worden de snijpunten van γ^4 met r aangewezen door

$$a_x^4 + \lambda^4 a_y^4 = 0.$$

Voor hen geldt dus de betrekking²⁾

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = -1,$$

zoodat de hoofdpunten een harmonische groep vormen.

De neutrale punten van zulk een „harmonische” I_3^4 zullen we

1) Daar $a_x (\varepsilon a_x + \varepsilon a_y)^3 = 0$ gelijkwaardig is met $\varepsilon^3 = 0$, is XY de raaklijn in het buigpunt Y der poolcubica van X . Dus is XY bestanddeel van de poolkegelsnede van X en Y , dus poolrechte voor elk punt Z op XY .

2) Men heeft nl.

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{1-i}{-1-i} : \frac{1+i}{-1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^2} = -1.$$

„geassocieerd” noemen t. o. v. γ^4 . Zij vormen met elk punt van hun verbindingslijn r een drietal polen, waarvoor r de tripelpoollijn is.

De rechte welke twee punten U en V van γ^4 verbindt, snijdt haar nog in twee punten, welke bepaald zijn door

$$4a_u^3 a_v + 6\lambda a_u^2 a_v^2 + 4\lambda^2 a_u a_v^3 = 0.$$

Zij liggen harmonisch t. o. v. U en V als voldaan is aan $a_u^2 a_v^2 = 0$.

Voor een gegeven punt U stelt deze vergelijking de poolkegelsnede van U voor. Daar deze kegelsnede de kromme γ^4 in U raakt, dus haar in 6 punten V snijdt, draagt elk punt van γ^4 zes rechten, die door γ^4 in harmonische groepen worden gesneden. Hiermede is de bekende eigenschap bewezen volgens welke er een kromme van de zesde klasse is, waarvan de raaklijnen door γ^4 in *harmonische* groepen worden gesneden.

3. Schrijft men de vergelijking (1) in den vorm

$[(\lambda_1 + \lambda_2) + p]\lambda_3 \lambda_4 + [\lambda_1 \lambda_2 + p(\lambda_1 + \lambda_2) + q](\lambda_3 + \lambda_4) + [p\lambda_1 \lambda_2 + q(\lambda_1 + \lambda_2)] = 0$, dan blijkt, dat I_3^4 een *neutraal paar* zal hebben, wanneer gelijktijdig is voldaan aan de drie betrekkingen

$(\lambda_1 + \lambda_2) + p = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 + p(\lambda_1 + \lambda_2) + q = 0$, $p\lambda_1 \lambda_2 + q(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$, dus als men heeft $2pq = p^3$.

Is $p = 0$, dan wordt het neutrale paar bepaald door $\lambda^2 = q$, is $q = \frac{1}{2}p^2$, dan heeft men daarvoor $\lambda^2 + p\lambda + \frac{1}{2}p^2 = 0$.

Hieruit volgt dat de neutrale punten samenvallen als men heeft $p = 0$ en $q = 0$. Maar dan vindt men de hoofdpunten uit $\lambda^3 = 0$, de neutrale punten uit $\lambda^2 = 0$. Twee *geassocieerde* punten kunnen dus slechts samenvallen in een *buigpunt* van γ^4 , en de 24 buigraaklijnen zijn de eenige rechten, waarop de I_3^4 der poolquadrupels een neutraal dubbelpunt heeft.

De graad van de meetkundige plaats der geassocieerde punten zal dus een veelvoud van 6 moeten zijn.

Om dien graad te bepalen, laten we X een rechte r doorloopen. Uit de boven gevonden betrekkingen

$$a_x^3 a_y = 0, a_x^2 a_y^2 = 0, a_x a_y^3 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

blijkt, dat de poolcubica μ_x^3 dan een bundel, de poolkegelsnede μ_x^2 een stelsel met index 2, de poolrechte μ_x een stelsel met index 3 doorloopt. Hieruit leidt men gemakkelijk af, dat de snijpunten van μ_x^2 en μ_x^3 een kromme γ^6 beschrijven, welke in de 9 basispunten van

den bundel (ρ_x^3) dubbelpunten heeft, terwijl de snijpunten van ρ_x^3 met ρ_x een kromme γ^{10} doorloopen, die in de genoemde basispunten drievoudige punten bezit.

In elk snijpunt van ρ met γ^4 raken ρ_x^3, ρ_x^2 en ρ_x elkaar aan; die vier punten zijn dus tevens raakpunten van γ^8 en γ^{10} . Daar die twee krommen in de bovengenoemde 9 basispunten 54 snijpunten hebben, zullen er 18 punten Y zijn, waar drie overeenkomstige poollijnen ρ_x^3, ρ_x^2 en ρ_x samenkomen.

De meetkundige plaats der geassocieerde punten is dus een kromme van den 18en graad, die γ^4 in haar buigpunten osculeert. ¹⁾

4. De hoofdpunten van een I_3^4 kunnen in het algemeen niet tot een groep der involutie vereenigd worden. Wordt I_3^4 weer door (1) voorgesteld, dan levert $4\lambda^3 + 6p\lambda^2 + 4q\lambda = 0$ haar hoofdpunten; deze zijn dus bepaald door $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \infty, \lambda_3 + \lambda_4 = -\frac{3}{2}p, \lambda_3 \lambda_4 = q$.

Stelt men in (1) $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = \infty$, dan vindt men

$$\lambda_3 \lambda_4 + p(\lambda_3 + \lambda_4) + q = 0.$$

Hieraan voldoen de hoofdpunten λ_3 en λ_4 , als men heeft $3p^2 = 4q$. Maar dan vormen de vier hoofdpunten een *equianharmonische* groep, zooals gemakkelijk door substitutie in de bekende voorwaarde blijkt.

Zijn U en V twee hoofdpunten van zulk een bijzondere I_3^4 , dan worden de andere twee bepaald door

$$4a_u^3 a_v + 6\lambda a_u^2 a_v^2 + 4\lambda^2 a_u a_v^3 = 0. \quad \dots \quad (3)$$

met de voorwaarde

$$a_u a_v (a_u + \lambda_1 a_v) (a_u + \lambda_2 a_v) = 0$$

of

$$a_u^3 a_v + (\lambda_1 + \lambda_2) a_u^2 a_v^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_u a_v^3. \quad \dots \quad (4)$$

Uit (3) volgt evenwel

$$\frac{1}{2b_u b^3_v} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3 b^2_u b^2_v} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2 b^3_u b_v}$$

Door substitutie in (4) vindt men nu

$$4 a^3_u a_v b_u b^3_v = 3 a^2_u a^2_v b^2_u b^2_v. \quad \dots \quad (5)$$

Deze betrekking kan op een eigenaardige wijze geïnterpreteerd

¹⁾ Volgens een bekenden regel vindt men uit (2) door eliminatie van y_k een vergelijking van den 26en graad in x_k . Uit het bovenstaande volgt dat deze kan gesplitst worden in een vergelijking van den 18en graad en twee maal de vergelijking van γ^4 .

worden. De snijpunten van de poolcubica van U , $a_u a_v^3 = 0$, met de rechte door U en het willekeurig aangenomen punt V vindt men uit

$$3 a_u^3 a_v + 3 \lambda a_u^2 a_v^2 + \lambda^2 a_u a_v^3 = 0.$$

Is nu aan (5) voldaan, dan heeft deze vergelijking twee gelijke wortels λ , en UV raakt de poolcubica van U .

De raaklijnen uit het op γ^4 gelegen punt U naar zijn poolcubica worden derhalve door γ^4 in equianharmonische groepen gesneden.

Hiermede is tevens de bekende eigenschap bewezen, volgens welke de rechten, die door γ^4 *equianharmonisch* worden verdeeld, een kromme der *vierde klasse* omhullen. De raaklijnen dezer kromme snijden γ^4 in *lineaire poolquadrupels*.

Is behalve aan (5) ook aan $a_u^2 a_v^2 = 0$ voldaan, dan heeft men òf $a_u^3 a_v = 0$ òf $a_u a_v^3 = 0$.

In beide gevallen heeft de vergelijking $(a_u + \lambda a_v)^4 = 0$ drie gelijke wortels ($\lambda^3 = 0$ of $\lambda^3 = \infty$). Hierdoor is de bekende eigenschap bevestigd, volgens welke de **24 buigraaklijnen** van γ^4 de gemeenschappelijke raaklijnen zijn van een kromme der **4e** met een kromme der **6e** klasse.

Daar de poolkegelsnede van een buigpunt de buigraaklijn als bestanddeel bevat, vervangt deze, volgens § 2, twee van de raaklijnen uit het buigpunt naar de omhulde der harmonische quadrupels; deze kromme raakt dus de buigraaklijnen van γ^4 in de buigpunten.

Dit volgt trouwens ook hieruit, dat geen raaklijn van γ^4 een harmonische groep kan dragen tenzij haar raakpunt buigpunt is.

5. Zijn U en V de raakpunten van een dubbelraaklijn van γ^4 , dan is, blijkens $(a_u + \lambda a_v)^4 = 0$, voldaan aan $a_u^3 a_v = 0$ en $a_u a_v^3 = 0$; elk dier punten is dan het snijpunt van de poolrechte en de poolcubica van het andere punt.

Laat men U de kromme γ^4 doorloopen, dan raken p_u en p^3_u elkaar in U en *hun snijpunt beschrijft een kromme van den 32^{en} graad*. Immers p_u en p^3_u doorloopen resp. stelsels met index 12 en **4**, want de polen der poolrechten en poolcubica's, die door een punt V gaan, worden op γ^4 ingesneden door p^3_v en p_v . Op een rechte bepalen de beide stelsels een verwantschap (**4**,36) en daar γ^4 tweemaal tot de voortgebrachte m.pl. behoort, is de m.pl. van het snijpunt van p_u en p^3_u een kromme γ^{32} .

In elk buigpunt van γ^4 hebben p_u en p^3_u drie punten gemeen; derhalve wordt γ^4 daar door γ^{32} geosculeerd. De overige 56 gemeenschappelijke punten der beide krommen zijn blijkbaar de raakpunten van de 28 dubbelraaklijnen van γ^4 .

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan van den Heer M. J. VAN UVEN over: „*Infinitiesimale iteratie van wederkeerige functies.*”

(Mede aangeboden door den Heer W. KAPTEIJN.)

§ 1. Een functie $\varphi(x)$ zal een *wederkeerige functie van de n^{de} orde* genoemd worden, wanneer ze voldoet aan de functionaalvergelijking

$$\varphi_n(x) = \varphi \left[\underbrace{\varphi \{ \dots \varphi(x) \}}_n \right] = x.$$

De oplossing van deze vergelijking is bekend onder den naam van het „probleem van BABBAGE”¹⁾.

In het volgende zullen we ons uitsluitend bezighouden met de wederkeerige functies van de 2^{de} orde, welke derhalve voldoen aan

$$\varphi_2(x) = \varphi \{ \varphi(x) \} = x, \dots \dots \dots (1)$$

en welke kortweg wederkeerige functies zullen genoemd worden.

De oplossing van het probleem van BABBAGE leert, dat de functionaalvergelijking (1) bevredigd wordt door alle functies $y = \varphi(x)$, die aan x gekoppeld zijn door een *symmetrische* vergelijking

$$S(x, y) = 0. \dots \dots \dots (2)$$

We stellen ons nu tot taak deze wederkeerige functies door infinitesimale iteratie op te bouwen.

Noemen we den iteratieindex n , dan komt het er op aan een functie f' te vinden zóó dat

$$f'(y) = f'(x) + 1 \quad , \quad f'(y_n) = f'(x) + n,$$

waarbij $y_n = \varphi_n(x)$ gesteld is.

Stellen we nog $f'(x) = r$, dan hebben we

$$x = f'^{-1}(r) = g(r) \quad , \quad y = g(r + 1) \quad , \quad y_n = g(r + n).$$

Uit (1) en (2) volgt, dat y_n en y_{n+1} verbonden zijn door de betrekking

$$S(y_n, y_{n+1}) = 0.$$

Daar $y_2 = g(r + 2) = x = g(r)$, zoo moet $g(r)$ uitsluitend afhangen van een periodische functie met periode 2, voor welke functie we zullen kiezen

$$\sigma = e^{i\pi r}. \dots \dots \dots (3)$$

De functie $g(r)$ kan dus geschreven worden als functie van σ , m.a.w.

$$g(r) = h(\sigma).$$

1) Zie o.a. LAURENT: *Traité d'analyse* t. VI, Paris 1890, p. 243.

Dientengevolge heeft \bar{z} men

$$y(r + 1) = h(-\sigma),$$

zoodat de functie h bepaald wordt door de vergelijking

$$S\{h(\sigma), h(-\sigma)\} = 0.$$

§ 2. Een wederkeerige functie $y = \varphi(x)$ is blijkbaar bepaald door de vergelijking $S(x, y) = 0$. We hebben derhalve de verschillende symmetrische vergelijkingen $S(x, y) = 0$ te onderzoeken. We beginnen met de vergelijking

$$S(x, y) = x + y - 2k = 0. \dots \dots \dots (4)$$

Deze vergelijking gaat door de substituties

$$x = h(\sigma), \quad y = h(-\sigma)$$

over in

$$h(\sigma) + h(-\sigma) = 2k$$

of

$$h(\sigma) - k = -\{h(-\sigma) - k\},$$

waaraan voldaan wordt door voor $h(\sigma) - k$ een willekeurige oneven functie $\sigma \cdot \omega(\sigma^2)$ te kiezen. We stellen dus

$$h(\sigma) - k = \sigma \cdot \omega(\sigma^2) \quad (\omega \text{ willekeurig, maar \u00e9nwaardig}).$$

Zoодоende krijgen we

$$\left. \begin{aligned} x = h(\sigma) &= k + \sigma \cdot \omega(\sigma^2) = k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu}), \\ y = h(-\sigma) &= k - \sigma \cdot \omega(\sigma^2) = k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu}), \\ y_n &= &= k + e^{i\pi(\nu+n)} \omega(e^{2i\pi(\nu+n)}). \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Om de functie $y = \varphi(x) = 2k - x$ door infinitesimale iteratie op te bouwen hebben we slechts n geleidelijk te laten toenemen. Even gemakkelijk is het tusschen x en y een zeker aantal functies te interpoleeren.

De onbepaalde elementen in de oplossing zijn 1° de grootheid r , 2° de functie ω .

Hebben we eenmaal een functie ω gekozen, dan kunnen we door de keuze van r aan de veranderlijke x een gegeven waarde toewijzen. Gaan we bijv. uit van een beginwaarde x_0 , dan wordt r gevonden uit de eerste vergelijking (5). Het spreekt van zelf, dat deze aanvangswaarde r_0 van r complex kan uitvallen. Is bijv. $r_0 = \lambda + i\mu$, dan zal bij de iteratie het re\u00e9le deel aangroeien, het imaginaire deel constant blijven.

Willen we, om een voorbeeld te geven, tusschen x en y \u00e9n functie interpoleeren, en kiezen we voor ω

$$\omega(\sigma^2) = 1,$$

dan vinden we

$$x = y_0 = k + e^{i\pi\nu}, y_{\frac{1}{2}} = k + ie^{i\pi\nu}, y_1 = y = k - e^{i\pi\nu}, y_{1\frac{1}{2}} = k - ie^{i\pi\nu}.$$

Zal x de aanvangswaarde x_0 hebben, dan is ν_0 bepaald uit

$$x_0 = k + e^{i\pi\nu_0}$$

of

$$\nu_0 = \frac{1}{i\pi} \log(x_0 - k).$$

Voor de betrekking, die tusschen $y_{\frac{1}{2}}$ en x bestaat, vinden we

$$y_{\frac{1}{2}} = k + i(x - k) = (1 - i)k + ix,$$

en in 't algemeen

$$y_{n+\frac{1}{2}} = (1 - i)k + iy_n$$

§ 3. Het is gemakkelijk in te zien, dat alle symmetrische vergelijkingen van den vorm

$$S(x, y) = \psi(x) + \psi(y) - 2k = 0 \dots \dots \dots (6)$$

op de in § 2 gevolgde wijze kunnen behandeld worden.

We hebben slechts te stellen

$$\psi(x) = k + \sigma \cdot \omega(\sigma^2), \quad \psi(y) = k - \sigma \cdot \omega(\sigma^2),$$

derhalve

$$x = \psi_{-1}\{k + \sigma \cdot \omega(\sigma^2)\}, \quad y = \psi_{-1}\{k - \sigma \cdot \omega(\sigma^2)\},$$

of

$$x = \psi_{-1}\{k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}, \quad y = \psi_{-1}\{k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}, \\ y_n = \psi_{-1}\{k + e^{i\pi(\nu+n)} \omega(e^{2i\pi(\nu+n)})\} \dots \dots \dots (7)$$

Schrijven we de symmetrische vergelijking in de gedaante

$$S(x, y) = K,$$

dan is het wellicht mogelijk $S(x, y)$ te beschouwen als een functie van de uitdrukking $\psi(x) + \psi(y)$, zoodat

$$S(x, y) = F\{\psi(x) + \psi(y)\} = K, \dots \dots \dots (8)$$

waaruit volgt

$$\psi(x) + \psi(y) = F_{-1}(K) = 2k.$$

Hiermede zijn we dan tot het vorige geval teruggekeerd.

Zal $S(x, y)$ als functie van de uitdrukking

$$\psi(x) + \psi(y) = T(x, y)$$

kunnen beschouwd worden, dan moet ze voldoen aan een zekere differentiaal-vergelijking. Laten we deze thans opsporen.

Het is duidelijk, dat $T(x, y)$ voldoet aan

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0.$$

Stellen we

$$\frac{\partial S}{\partial x} = S_x, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = S_y, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = S_{xx}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = S_{xy}, \quad \text{enz.}, \quad \frac{dF}{dT} = F', \quad \frac{d^2 F}{dT^2} = F'',$$

dan hebben we allereerst

$$S = F(T),$$

$$S_x = F' T_x, \quad S_y = F' T_y, \quad S_{xx} = F'' T_x T_x + F' T_{xx} = F'' T_x^2 + F' T_{xx};$$

derhalve

$$\frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{F''}{F'^2} = H(T) = G(S),$$

of

$$S_{xy} = G S_x S_y,$$

en dus ook

$$S_{xxy} = G' S_x^2 S_y + G S_{xx} S_y + G S_x S_{xy}, \quad S_{xyy} = G' S_x S_y^2 + G S_{xy} S_y + G S_x S_{yy},$$

waaruit door eliminatie van G en G' volgt

$$S_x S_y (S_{xx} S_{xy} - S_x S_{xxy}) = S_{xy} (S_{xx} S_y^2 - S_{yy} S_x^2). \quad \dots \quad (9)$$

Stellen we nog

$$S_x = p, \quad S_y = q, \quad S_{xx} = r, \quad S_{xy} = s, \quad S_{yy} = t, \quad S_{xxy} = u, \quad S_{xyy} = v,$$

dan komt er

$$pq(qu - pv) = s(q^2 r - p^2 t). \quad \dots \quad (9a)$$

Elke integraal $S(x,y)$ van deze differentiaalvergelijking kan dus beschouwd worden als een functie van $T = \psi(x) + \psi(y)$.

De functie F wordt als volgt bepaald.

$$\frac{F''(T)}{F'^2(T)} = G(S) = G(F)$$

of

$$- \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{F'} \right) = - \frac{dF}{dT} \cdot \frac{d}{dF} \left(\frac{dT}{dF} \right) = - \frac{d^2 T}{dT^2} = G(F).$$

Hiervan is de oplossing

$$T = C \int e^{-\int G(F) dF} dF + C' = \Phi(F) \left\{ \dots \dots \dots (10) \right.$$

dus

$$F = \Phi^{-1}.$$

Als voorbeeld kiezen we

$$S(x,y) = xy = K = k^2$$

of

$$S(x,y) = e^{\log x + \log y} = e^{2 \log k},$$

bijgevolg

$$\log x + \log y = 2 \log k,$$

waaruit volgt

$$\log x = \log k + \sigma, \quad \omega(\sigma^2), \quad \log y = \log k - \sigma - \omega(\sigma^2),$$

of

$$x = k e^{\sigma \cdot \omega(\sigma^2)}, \quad y = k e^{-\sigma \cdot \omega(\sigma^2)},$$

of

$$x = k e^{e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})}, \quad y = k e^{-e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})}, \quad y_n = k e^{e^{i\pi(\nu+n)} \omega(e^{2i\pi(\nu+n)})}.$$

Deze uitkomst kunnen we ook nog iets anders inkleeden. We stellen n.l.

$$\sigma \cdot \omega(\sigma^2) = \chi(\sigma) - \chi(-\sigma)$$

en krijgen dan

$$x = k e^{\chi(\sigma) - \chi(-\sigma)} = k \frac{e^{\chi(\sigma)}}{e^{\chi(-\sigma)}} = k \frac{\Omega(\sigma)}{\Omega(-\sigma)} = k \frac{\Omega(e^{i\pi\nu})}{\Omega(-e^{i\pi\nu})}$$

dus

$$y_n = k \frac{\Omega(e^{i\pi(\nu+n)})}{\Omega(-e^{i\pi(\nu+n)})} \dots \dots \dots (11)$$

We stellen nu $k = 1$ en $\Omega(\sigma) = 1 - \sigma$, en vinden zodoende

$$x = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} = \frac{1 - e^{i\pi\nu}}{1 + e^{i\pi\nu}}, \quad y_n = \frac{1 - e^{i\pi(\nu+n)}}{1 + e^{i\pi(\nu+n)}}$$

derhalve

$$i\pi(\nu + n) = \log \frac{y_n - 1}{y_n + 1} + i\pi,$$
$$i\pi\nu = \log \frac{x - 1}{x + 1} + i\pi,$$

en

$$\log \frac{y_n - 1}{y_n + 1} = \log \frac{x - 1}{x + 1} + i\pi n \dots \dots \dots (12)$$

Stellen we daarentegen $k = 1$ en $\Omega(\sigma) = e^{\frac{\sigma}{2}}$, dan komt er

$$x = \frac{e^{\frac{\sigma}{2}}}{e^{-\frac{\sigma}{2}}} = e^{\sigma} = e^{e^{i\pi\nu}}, \quad y_n = e^{e^{i\pi(\nu+n)}},$$

dus

$$i\pi(\nu + n) = \log \log y_n,$$
$$i\pi\nu = \log \log x$$

en

$$\log \log y_n = \log \log x + i\pi n \dots \dots \dots (13)$$

Nu is vroeger ¹⁾ aangetoond, dat de vergelijking (12) de iteratie van $y = \frac{1}{x}$ bepaalt, wanneer $\frac{1}{x}$ opgevat wordt als een lineair-ge-

1) M. J. VAN UVEN: Over de banen eener door infinitesimale iteratie verkregen functie in haar complexe vlak. Zittingsversl. der Kon. Akad. 27 Nov. 1909, p. p. 482, 483, 486, 487.

broken functie van x , terwijl (13) aangeeft hoe $y = x^{-1}$ geïtereerd wordt, indien x^{-1} als exponentieele functie wordt beschouwd. Uit het hierboven medegedeelde blijkt nu, dat deze beide oplossingen van het iteratieprobleem van $y = \frac{1}{x}$ slechts twee van de oneindig vele zijn.

§ 4. Is een zekere symmetrische betrekking tusschen x en y gegeven, bijv.

$$S(x, y) = 0,$$

dan kan het gebeuren, dat we door een symmetrische transformatie

$$x = \mathcal{U}(\xi, \eta) \quad , \quad y = \mathcal{V}(\eta, \xi) \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

van de vergelijking $S(x, y) = 0$ kunnen geraken tot een eveneens symmetrische vergelijking $\Sigma(\xi, \eta) = 0$ van den vorm

$$\Sigma(\xi, \eta) = \psi(\xi) + \psi(\eta) - 2k = 0.$$

In dit geval hebben we

$$\begin{aligned} \xi &= \psi^{-1}\{k - \sigma \cdot \omega(\sigma^2)\} \quad , \quad \eta = \psi^{-1}\{k - \sigma \cdot \omega(\sigma^2)\} \quad , \\ x &= \mathcal{U}[\{k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}, \{k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}], \\ y &= \mathcal{V}[\{k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}, \{k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}], \\ y_n &= \mathcal{V}[\{k + e^{i\pi(\nu+n)} \omega(e^{2i\pi(\nu+n)})\}, \{k - e^{i\pi(\nu+n)} \omega(e^{2i\pi(\nu+n)})\}]. \end{aligned}$$

We zullen in 't bijzonder stilstaan bij de projectievere transformatie

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}{\delta(\xi + \eta) + \varepsilon} \quad , \quad y = \frac{\beta\xi + \alpha\eta + \gamma}{\delta(\xi + \eta) + \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

waarbij we ter afkorting zullen stellen

$$\delta(\xi + \eta) + \varepsilon = \lambda \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Is $S(x, y)$ een symmetrische algebraïsche functie van den m^{den} graad, dan zal $S(x, y)$ na de substitutie (15) overgaan in een uitdrukking $S[\xi, \eta]$ van den vorm

$$S[\xi, \eta] = \frac{\Sigma(\xi, \eta)}{\lambda^m}.$$

De vergelijking $S(x, y) = 0$ wordt dan omgezet in de vergelijking $\Sigma(\xi, \eta) = 0$. De functie $\Sigma(\xi, \eta)$ moet nu voldoen aan

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \xi \partial \eta} = \Sigma_{\xi\eta} = 0.$$

De differentiaalvoorwaarde wordt dus

$$\Sigma_{\xi\xi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \{\lambda^m S[\xi, \eta]\} = 0,$$

of

$$\lambda^3 S_{\xi\xi} + m\lambda^2 (S_{\xi\xi} + S_{\eta\xi}) + m(m-1)\lambda S = 0 \quad . \quad . \quad (17)$$

Nu hebben we

$$\begin{aligned}
S_{\xi} &= S_x x_{\xi} + S_y y_{\xi} \quad , \quad S_{\epsilon} = S_x v_{\epsilon} + S_y w_{\epsilon} , \\
S_{\xi\epsilon} &= S_{xx} x_{\xi} v_{\epsilon} + S_{xy} (x_{\xi} w_{\epsilon} - v_{\epsilon} y_{\xi}) + S_{yy} y_{\xi} w_{\epsilon} + S_x v_{\xi\epsilon} + S_y w_{\xi\epsilon} ; \\
x_{\xi} &= \frac{(\alpha - \beta) \delta \eta + (\alpha \epsilon - \delta \gamma)}{\lambda^2} \quad , \quad y_{\xi} = \frac{-(\alpha - \beta) \delta \eta + (\beta \epsilon - \delta \gamma)}{\lambda^2} \\
x_{\epsilon} &= \frac{-(\alpha - \beta) \delta \xi + (\beta \epsilon - \delta \gamma)}{\lambda^2} \quad , \quad y_{\epsilon} = \frac{(\alpha - \beta) \delta \xi + (\alpha \epsilon - \delta \gamma)}{\lambda^2} , \\
x_{\xi\epsilon} &= \delta \frac{(\alpha - \beta) \delta (\xi - \eta) - \{(\alpha + \beta) \epsilon - 2\delta \gamma\}}{\lambda^3} , \\
y_{\xi\epsilon} &= \delta \frac{-(\alpha - \beta) \delta (\xi - \eta) - \{(\alpha + \beta) \epsilon - 2\delta \gamma\}}{\lambda^3} .
\end{aligned}$$

Uit (15) volgt

$$\begin{aligned}
\lambda &= \delta (\xi + \eta) + \epsilon = \frac{-(\alpha + \beta) \epsilon - 2\delta \gamma}{\delta (x + y) - (\alpha + \beta)} , \\
\xi &= \frac{-(\alpha \epsilon - \delta \gamma) x + (\beta \epsilon - \delta \gamma) y + (\alpha - \beta) \gamma}{(\alpha - \beta) \{ \delta (x + y) - (\alpha + \beta) \}} , \\
\eta &= \frac{(\beta \epsilon - \delta \gamma) x - (\alpha \epsilon - \delta \gamma) y + (\alpha - \beta) \gamma}{(\alpha - \beta) \{ \delta (x + y) - (\alpha + \beta) \}} .
\end{aligned}$$

Stellen we nog

$$\begin{aligned}
\delta (x + y) - (\alpha + \beta) &= l , \\
(\alpha + \beta) \epsilon - 2\delta \gamma &= c ,
\end{aligned}$$

dan vinden we, na herleiding, ten slotte

$$\begin{aligned}
x_{\xi} &= \frac{l}{c} (\delta x - \alpha) , \quad y_{\xi} = \frac{l}{c} (\delta y - \beta) , \quad x_{\epsilon} = \frac{l}{c} (\delta x - \beta) , \quad y_{\epsilon} = \frac{l}{c} (\delta y - \alpha) \\
x_{\xi\epsilon} &= \frac{l^2}{c^2} \delta \{ 2\delta x - (\alpha + \beta) \} , \quad y_{\xi\epsilon} = \frac{l^2}{c^2} \delta \{ 2\delta y - (\alpha + \beta) \} ,
\end{aligned}$$

terwijl tevens geldt

$$\lambda = -\frac{c}{l} .$$

De vergelijking (17) gaat nu over in

$$\begin{aligned}
&S_{xx} (\delta x - \alpha) (\delta x - \beta) + S_{xy} \{ (\delta x - \alpha) (\delta y - \alpha) + (\delta x - \beta) (\delta y - \beta) \} + \\
&+ S_{yy} (\delta y - \alpha) (\delta y - \beta) + \delta S_x \{ 2\delta x - (\alpha + \beta) \} + \delta S_y \{ 2\delta y - (\alpha + \beta) \} - \\
&- m \delta S_x \{ 2\delta x - (\alpha + \beta) \} - m \delta S_y \{ 2\delta y - (\alpha + \beta) \} + m(m-1) \delta^2 S = 0 ,
\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
\delta^2 [x^2 S_{xx} + 2xy S_{xy} + y^2 S_{yy} - 2(m-1)(x S_x + y S_y) + m(m-1) S] - \\
- (\alpha + \beta) \delta [x S_{xx} + (x + y) S_{xy} + y S_{yy} - (m-1)(S_x + S_y)] + \\
+ [\alpha \beta S_{xx} + (\alpha^2 + \beta^2) S_{xy} + \alpha \beta S_{yy}] = 0 .
\end{aligned}$$

Ten einde aan deze vergelijking een overzichtelijker vorm te geven, zullen we de uitdrukking S homogeen maken door invoering van een derde veranderlijke, z .

We hebben dan

$$\begin{aligned} m(m-1)S &= x^2 S_{xx} + 2xy S_{xy} + y^2 S_{yy} + 2xz S_{xz} + 2yx S_{yz} + z^2 S_{zz}, \\ (m-1)S_x &= x S_{xx} + y S_{xy} + z S_{xz}, \\ (m-1)S_y &= x S_{xy} + y S_{yy} + z S_{yz}; \end{aligned}$$

derhalve

$$\begin{aligned} x^2 S_{xx} + 2xy S_{xy} + y^2 S_{yy} - 2(m-1)(xS_x + yS_y) + m(m-1)S &= z^2 S_{zz}, \\ x S_{xx} + (x+y) S_{xy} + y S_{yy} - (m-1)(S_x + S_y) &= -z(S_{xz} + S_{yz}). \end{aligned}$$

Stellen we nu nog $z=1$, dan vinden we als differentiaalvoorwaarde $\sigma^2 S_{zz} + (\alpha + \beta) \sigma(S_{xz} + S_{yz}) + [\alpha\beta S_{xx} + (\alpha^2 + \beta^2) S_{xy} + \alpha\beta S_{yy}] = 0$. (18)

Wanneer we het geval $\sigma=0$, overeenkomende met de *afjien*e transformatie, voor 't oogenblik uitsluiten, mogen we in de vergelijking (18) zonder bezwaar $\sigma=1$ stellen; daardoor krijgt (18) de gedaante $S_{zz} + (\alpha + \beta)(S_{xz} + S_{yz}) + [\alpha\beta S_{xx} + (\alpha^2 + \beta^2) S_{xy} + \alpha\beta S_{yy}] = 0$. (18a)

Over de grootheden α en β kan nu nog naar willekeur beschikt worden.

Is $S(x,y)$ van den *tweeden* graad, dan zijn alle tweede afgeleiden constant, zoodat de vergelijking (18a) een verband legt tusschen de constanten van de vergelijking en de constanten van de transformatie. Derhalve kunnen we zeggen:

De *algemeene symmetrische tweedegraadsvergelijking* kan door een *oneindig aantal projectieve transformaties* gebracht worden in den vorm $\Psi(x) + \Psi(y) = 2k$.

Is bijv. gegeven

$$S(x, y) = a_2(x+y)^2 + 2b_2xy + 2a_1(x+y) + a_0 = 0,$$

dan hebben we

$$S_{xx} = 2a_2, S_{xy} = 2(b_2 + a_2), S_{yy} = 2a_2, S_{xz} = 2a_1, S_{yz} = 2a_1, S_{zz} = 2a_0.$$

De voorwaarde (18a) luidt nu

$$a_0 + 2a_1(\alpha + \beta) + (a_2 + b_2)(\alpha + \beta)^2 - 2b_2\alpha\beta = 0 \quad . \quad (19)$$

Kiest men derhalve α en β zóó, dat aan (19) voldaan is, dan is de vorm S gebracht tot de gedaante

$$(A\bar{\xi}^2 + B\bar{\xi}) + (A\eta^2 + B\eta) = 2C,$$

of, als men wil,

$$(\bar{\xi}^2 - 2B'\bar{\xi} + C') + (\eta^2 - 2B'\eta + C'') = 2k,$$

of, als we $C' = B'^2$ kiezen,

$$(\bar{\xi} - B')^2 + (\eta - B')^2 = 2k,$$

zoodat

$$\Psi(\bar{\xi}) = (\bar{\xi} - B')^2 = k + \sigma \cdot \omega(\sigma^2) = k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu}),$$

of

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= B' + \sqrt{k} + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu}), \\ \eta &= B' + \sqrt{k} - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu}), \end{aligned}$$

terwijl

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\alpha_1^2 B' + \sqrt{k + e^{i\pi/\nu} \omega(e^{2i\pi/\nu})} + \beta_1^2 B' + \sqrt{k - e^{i\pi/\nu} \omega(e^{2i\pi/\nu})} + \gamma}{\delta_1^2 B' + \sqrt{k + e^{i\pi/\nu} \omega(e^{2i\pi/\nu})} + \sqrt{k - e^{i\pi/\nu} \omega(e^{2i\pi/\nu})} + \varepsilon}, \\ y_n &= \frac{\alpha_1^2 B' + \sqrt{k + e^{i\pi(\nu+n)} \omega(e^{2i\pi(\nu+n)})} + \beta_1^2 B' + \sqrt{k - e^{i\pi(\nu+n)} \omega(e^{2i\pi(\nu+n)})} + \gamma}{\delta_1^2 B' + \sqrt{k + e^{i\pi(\nu+n)} \omega(e^{2i\pi(\nu+n)})} + \sqrt{k - e^{i\pi(\nu+n)} \omega(e^{2i\pi(\nu+n)})} + \varepsilon}. \end{aligned} \right\} (20)$$

Is de vorm $S(x,y)$ van den *derden* graad, dan zijn de tweede afgeleiden van den eersten graad, dus van den vorm $p_1(x+y) + p_0$. De vergelijking (18a) wordt dus eveneens van den eersten graad, bijv.

$$P_1(x+y) + P_0 = 0.$$

Daar deze betrekking moet gelden voor alle waarden van $x + y$, hebben we te voldoen aan

$$P_1 = 0 \quad , \quad P_0 = 0,$$

zoodat we nu *twee* betrekkingen gekregen hebben tusschen de constanten van de vergelijking en de *twee* constanten α en β van de transformatie. We concludeeren hieruit:

De *algemeene symmetrische derdegraadsvergelijking* kan door een *eindig aantal projectieve transformaties* gebracht worden in den vorm $\psi(x) + \psi(y) = 2k$.

Stel bijv.:

$$S(x,y) \equiv a_3(x+y)^3 + 3b_3(x+y)xy + 3a_2(x+y)^2 + 6b_2xy + 3a_1(x+y) + a_0 = 0,$$

dan hebben we

$$\begin{aligned} S_{xx} &= 6 \{a_3(x+y) + b_3y + a_3\}, \quad S_{yy} = 6 \{(a_3 + b_3)(x+y) + a_2 + b_3\}, \\ S_{yy} &= 6 \{a_3(x+y) + b_3x + a_2\}, \quad S_{xz} = 6 \{a_2(x+y) + b_2y + a_1\}, \\ S_{yz} &= 6 \{a_2(x+y) + b_2x + a_1\}, \quad S_{zz} = 6 \{a_1(x+y) + a_0\}. \end{aligned}$$

De vergelijking (18a) wordt nu

$$\begin{aligned} [a_1 + (2a_2 + b_2)(\alpha + \beta) + (a_3 + b_3)(\alpha + \beta)^2 - b_3\alpha\beta] (x+y) + \\ + [a_0 + 2a_1(\alpha + \beta) + (a_2 + b_2)(\alpha + \beta)^2 - b_2\alpha\beta] = 0, \end{aligned}$$

zoodat α en β bepaald zijn door

$$a_1 + (2a_2 + b_2)(\alpha + \beta) + (a_3 + b_3)(\alpha + \beta)^2 - b_3\alpha\beta = 0 \quad , \quad . \quad (21)$$

$$a_0 + 2a_1(\alpha + \beta) + (a_2 + b_2)(\alpha + \beta)^2 - 2b_2\alpha\beta = 0 \quad . \quad . \quad (19)$$

Uit deze vergelijkingen vinden we twee waarden voor $\alpha + \beta$ en twee bijbehorende waarden van $\alpha\beta$, dus twee stel (α, β) of (β, α) . Er zijn dus in 't algemeen *twee* projectieve transformaties mogelijk, die de symmetrische derdegraadsvergelijking in den door ons gewenschten standaardvorm overbrengen. Deze is nu

$$(A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi) + (A\eta^3 + B\eta^2 + C\eta) = 2D.$$

We kunnen de constanten nog zóódanig wijzigen, dat er komt

$$(\xi - B')^3 + 3\mu(\xi - B') + \{(\eta - B')^3 + 3\mu(\eta - B')\} = 2k,$$

zoodat

$$\begin{aligned} \psi(\xi - B') &= (\xi - B')^3 + 3\mu(\xi - B') = k + \sigma \cdot \omega(\sigma^2) = k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu}), \\ \psi(\eta - B') &= (\eta - B')^3 + 3\mu(\eta - B') = k - \sigma \cdot \omega(\sigma^2) = k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu}), \end{aligned}$$

derhalve

$$\begin{aligned} \xi &= B' + \psi_{-1}\{k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}, \quad \eta = B' + \psi_{-1}\{k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}, \\ x &= \frac{\alpha[B' + \psi_{-1}\{k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}] + \beta[B' + \psi_{-1}\{k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}] + \gamma}{\delta[2B' + \psi_{-1}\{k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\} + \psi_{-1}\{k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}] + \varepsilon}, \\ y &= \frac{\alpha[B' + \psi_{-1}\{k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}] + \beta[B' + \psi_{-1}\{k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}] + \gamma}{\delta[2B' + \psi_{-1}\{k + e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\} + \psi_{-1}\{k - e^{i\pi\nu} \omega(e^{2i\pi\nu})\}] + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (23)$$

Beschouwen we nu de *affiene* transformatie, dan hebben we in de vergelijking (18) slechts $\sigma = 0$ te stellen; er komt dan

$$\alpha\beta(S_{xx} + S_{yy}) + (\alpha^2 + \beta^2)S_{xy} = 0$$

of

$$\frac{S_{xy}}{S_{xx} + S_{yy}} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = const. \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Bij de tweedegraadsvergelijking kan hieraan steeds worden voldaan, en wel door twee waarden van de verhouding $\alpha : \beta$; bijgevolg:

de *algemeene symmetrische tweedegraadsvergelijking* kan door twee *affiene transformaties* gebracht worden tot den vorm $\psi(x) + \psi(y) = 2k$.

Bij de derdegraadsvergelijking eischt de vergelijking (24)

$$\frac{(a_3 + b_3)(x + y) + a_2 + b_2}{(2a_3 + b_3)(x + y) + 2a_2} = const.,$$

dus

$$\frac{a_3 + b_3}{2a_3 + b_3} = \frac{a_2 + b_2}{2a_2}$$

of

$$2a_3 b_2 + b_2 b_3 - a_2 b_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

De *algemeene symmetrische derdegraadsvergelijking* kan dan *alleen* door een *affiene transformatie* tot den vorm $\psi(x) + \psi(y) = 2k$ gebracht worden, wanneer voldaan is aan de voorwaarde (25).

Deze voorwaarde drukt uit, dat de drie asymptoten van de door de gegeven vergelijking voorgestelde kubische kromme door één punt gaan.

We hadden, in verband met deze toelichting, de vergelijking (25) ook langs meetkundigen weg kunnen verkrijgen. Van een kubische kromme, welke tot vergelijking heeft

$$A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + A\eta^3 + B\eta^2 + C\eta = 2D,$$

gaan n.l. eveneens de drie asymptoten door één punt, een eigenschap die bestand is tegen een affiene transformatie.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan, namens den Heer F. J. J. BUYTENDIJK: „*Over de gaswisseling der koudbloedige dieren in verband met hunne grootte*”.

(Mede aangeboden door den Heer T. PLACE).

In eene vorige mededeeling¹⁾ heb ik kunnen aantoonen, dat bij de visschen en evenzoo bij een aantal ongewervelde zeedieren het zuurstof verbruik der kleinere individuën belangrijk grooter is, dan dat der grootere van de zelfde soort.

Door de welwillendheid van den Directeur van het Kon. Zoöl. Genootschap „Natura Artis Magistra” te Amsterdam ben ik in staat gesteld de gaswisseling van een groot getal koudbloedige dieren te onderzoeken, teneinde na te gaan, of het bij zeedieren vastgestelde verschijnsel, ook bij amphibiën en reptiliën voorkomt.

De oudere onderzoekingen van REIGNAULT en REISET²⁾ MOLESCHOTT POTT e. a.³⁾ omtrent de gaswisseling der lagere werveldieren omvatten slechts weinige diersoorten en waren niet in samenhang met mijne vraagstelling uitgévoerd. Een reeks proeven, bij dieren van uiteenlopend lichaamsgewicht verricht, geven KREHL en SOETBEER⁴⁾, die calorimetrisch de warmteafgifte van eenige dieren onderzochten.

Zij vonden bij een temperatuur van 25,3° C.

Lacerta gewicht	110 gr.	produceert per uur en	K.G.	0.8	Caloriën.
Rana mugiens	„ 600	„ „ „ „	„	0.5	„
Alligator	„ 1380	„ „ „ „	„	0.3	„
Uromastix	„ 1250	„ „ „ „	„	0.26	„

Zij meenden deze uiteenlopende calorienwaarden en vooral de verandering der cijfers met de temperatuur te moeten verklaren uit de soortverschillen der proefdieren, en de hoogere warmteproductie der eerste beide dieren niet aan hunne kleinere afmetingen, maar aan hunne levenswijze in de gematigde luchtstreek te moeten toeschrijven, terwijl zij vonden, dat het protoplasma der tropische dieren meer spaarzaam werkt vooral bij hooger temperatuur.

Bij de kleinere door mij onderzochte dieren bepaalde ik de verandering in de luchtsamenstelling van een ruimte, waarin zich het proefdier gedurende zekeren tijd bevond. Deze tijd werd zoodanig gekozen, dat de lucht ten slotte 3 - 4% CO₂ bevatte. In dat geval

1) Verslagen Kon. Ak. v. Wetensch. 27 Mrt. 1909, blz. 886—892.

2) REIGNAULT en REISET. Annales de Chimie et de Phys 1849. Bd. 26. blz. 299.

3) Zie ZUNTZ in Handbuch der Phys. van HERMANN.

4) KREHL en SOETBEER, Pflügers Archiv. Bd. 77 blz. 611—638.

was het CO_2 gehalte niet storend voor de ademhalingsintensiteit van het dier en was de proefflout, uit de analyse der lucht voortspruitend, verminderd. ¹⁾ De luchtanalyse werd volgens HEMPEL ²⁾ uitgevoerd. De CO_2 absorptie geschiedde met geconcentreerde NaOH , de O_2 binding in een gaspipet gevuld met phosphorus (de kamertemperatuur was steeds boven 15°C). Grootere dieren bracht ik in eene ruimte waar een luchtstroom doorheen gevoerd werd. De intredende lucht was CO_2 vrij gemaakt, van de uitredende werd de CO_2 in flesschen met barytwater vastgelegd, en de hoeveelheid door titreeren van het resteerende Ba(OH)_2 bepaald.

In de verschillende proefreeksen heb ik dieren bijeengebracht, welke in lichaamsvorm zooveel mogelijk overeenkomen, en waarvan de meeste tot zeer naverwante soorten behooren. Hierdoor komt het mij voor dat de vergelijking der resultaten mogelijk is en de optredende verschillen aan het verschil in grootte zijn toe te schrijven. Dat de herkomst der dieren uit verschillend warm klimaat niet van overwegenden invloed is, zooals KREHL en SOETBEER meenen, blijkt uit het regelmatig verloop der cijfers in de tabellen. Verder maak ik, in verband hiermede, op het feit opmerkzaam, dat de Platyd. maur. (proef II Tabel I) uit Noord-Afrika veel meer CO_2 produceert p. uur en KG. dan de Alligator soorten en de Krokodil welke evenzoo uit de warme luchtstreek afkomstig zijn.

T A B E L I

Temp. 18—19 C.	O_2 p. uur en KG.	CO_2 p. uur en KG.	Lichaams- gew.
I <i>Lacerta viridis</i> var. <i>maculosa</i> (zeer bewegelijk)	—	551 cc	7.25 gr.
II <i>Platydictylus mauritanica</i> (in rust)	270 cc	171	8.055
III <i>Molga torosa</i> (in rust)	156	78	17.5
IV <i>Salamandra maculosa</i> (in rust)	128.7	99	28.32
V Alligator <i>sclerops</i> (in rust)	—	43	530.—
VI Alligator <i>lucius</i> (zeer bewegelijk)	—	90	797.—
VII <i>Krokodillus porosus</i> (matig bewegend)	—	39	1467.—

Men ziet, dat bij de toename van het lichaamsgewicht de gaswisseling per KG. en uur berekend, afneemt. Alle dieren waren volwassen en sinds langen tijd in gevangenschap bij een temperatuur

¹⁾ Voor warmbloedige dieren zie Frédéricq in Diction. de Physiologie Bd. II, blz. 419.

²⁾ HEMPEL, Gasanalytische Methodik.

$\pm 20^{\circ}$ C. gehouden, terwijl de voedingstoestand zoo goed mogelijk was. De uiteenlopende cijfers, welke men omtrent de gaswisseling van kikvorsch en bij gelijke temp. en jaargetijde vindt opgegeven, zijn stellig voor een groot deel aan den verschillende voedingstoestand toe te schrijven. Vandaar, dat de volgende tabel waar alle dieren zoo goed mogelijk gevoed waren, van belang is.

T A B E L II

Temp. 18—19° C.	O ₂ p. uur en K.G.	CO ₂ p. uur en K.G.	Lichaamsgew.
I Pachytis Bombinator	325 cc	240 cc	5.88 gr.
II Hyla arborea	314	240	7.78
III Rana esculenta	210.9	152.7	30.—
IV „ „	80.7	58.3	116.—
V „ aspersa	—	45	563.—
VI Bubo marinus	—	22.1	1200.—

Alle dieren maakten tijdens de proef zoo goed als geen beweging, zoodat de uitkomsten direct vergelijkbaar zijn en opnieuw hetzelfde resultaat toonen als de proeven uit Tabel I. Den invloed der beweging op de gaswisseling kon ik bij deze dieren niet nagaan. De onrust verraadt zich echter bij de reuzenpad door het z.g. opblazen (lucht-slikken). Een Bubo marinus produceerde in dezen toestand in plaats van 22.1 cc. CO₂ p. uur en K.G., 60.7 ccCO₂.

T A B E L III a

	CO ₂ p. K.G. en uur	Lichaams- gew.	Temp.
I Angius fragilis (bewegend)	473 cc	22.21	21° C.
II Amphysbaena alba (zeer bewegelijk)	168	373.4	20°

T A B E L III b

III Coronella austriaca	292 cc	24.8	19° C.
IV Tropicodonotus natrix	432	46.2	20°
V „ „	324	74.3	19°
VI Boa constrictor	52.5	810.—	19°
VII „ „	32	2830.—	19°

TABEL IV

		CO ₂ p. uur en K.G.	Temp.
Boa constrictor 2830 Gr.			
a	nuchter (zie Tabel III b pr VII)	32	19° C.
b	een duif gegeten	na 4 uur 52.9	20.5°
c		52 49.4	20°
d		124 55.5	—
Boa constrictor 3123 Gr.			
a	2 ratten gegeten	na 2 uur 41.5	19°
b		24 42.5	19°
c		48 52.9	19°

Waren de tot dusver genomen proeven bijna alle aan volwassen dieren verricht, bij de volgende proeven over de gaswisseling der schildpadden, gaat met een verschil in lichaamsgewicht tevens een verschil in leeftijd gepaard.

TABEL Va

		CO ₂ p. uur en K.G.	Lichaams- gew.	Temp.
I	<i>Chelodina longicollis</i>	53.3 cc	505 Gr.	19° C.
II	" "	39	805	20°

TABEL Vb

III	<i>Chrysemus chinaria</i> (var. <i>belli</i>)	48.4	273	19°
IV	" " " (zeer beweeglijk)	50	1570	19°

TABEL Vc

V	<i>Testudo graeca</i>	115	636	19°
VI	" <i>tabulata</i>	62	1099	20°
VII	" "	68	1650	23°

TABEL Vd

VIII	<i>Emys orbicularis</i>	220	71	19°
IX	" "	74	135	19°
X	" "	33	589	19°
XI	" "	18	1190	19°

Alle slangen en slanghagedissen waren nuchter, de ringslangen (IV en V) hadden sinds eenige maanden niet gegeten, de beide Boa's sinds twee weken geen voedsel gebruikt.

De invloed der voeding op de stofwisseling der Boa constrictor is wel merkbaar, is echter niet zoo groot als men zou verwachten, gelijk uit de volgende Tabel blijkt. (Zie p. 873).

Men kan uit deze Tabel behalve het reeds meer vermelde verschijnsel ook den invloed van den groei op de stofwisseling waarnemen, daar de gaswisseling bij de groeiende *Emys orbicularis* sterker toeneemt met daling van het lichaamsgewicht, dan bij volwassen dieren het geval is.

Bij de <i>Emys orbicularis</i> geeft een toename van het	
lichaamsgew. in verhouding van	1 : 17
een afname der CO ₂ productie p. KG. en uur van	12 : 1
Bij de slangen vindt men bij een toename van	1 : 17.5
afname der CO ₂ productie p. KG. uur	8.3 : 1
Bij de Amphibiën uit Tabel II bij een toename van	1 : 15
afname der CO ₂ productie p. KG. uur	4 : 1
Bij de Amphibiën uit Tabel I zijn deze cijfers toename	1 : 18.7
afname der CO ₂ productie	2.3 : 1

Uit de hier medegedeelde proeven en de onderzoekingen, welke verder aan warmbloedige dieren vroeger door vele onderzoekers zijn verricht, kan men dus zien, dat altijd van gelijksoortige of naverwante dieren de kleinere een relatief veel sterker stofwisseling hebben dan de grootere dieren.

De verklaring van dit algemeen verschijnsel is, naar mij voorkomt, niet te zoeken in den invloed der lichaamsoppervlakte op de stofwisseling, daar bij de hierv vermelde, noch de vroeger aan zeedieren verrichte, experimenten van een evenredigheid tusschen gaswisseling en het oppervlak (gelijk gesteld aan $K^{\text{B}} \overline{\text{gew.}}^2$) mij niets is gebleken. Het komt mij voor, dat dan ook de theorie, welke von HOESSLIN ¹⁾ ontwerpt, met experimenten zou moeten worden getoetst. Zijne veronderstelling, dat de stofwisseling der koudbloedige dieren, evenals die der warmbloedige, evenredig met hunne oppervlakte is, schijnt geenszins door proeven vastgesteld.

De schrijver meent verder, dat de hoeveelheid der voedingsstoffen, welke het bloed den weefsels bij de verschillende dieren toevoert, in evenredigheid met de oppervlakte der dieren is, waarbij hij van de vele momenten wel enkele niet in de berekening heeft opgenomen.

¹⁾ v. HOESSLIN, Archiv. f. (Anat. u.) Physiol 1888 blz. 323—380.

Bovendien wordt in het dierlijk organisme de sterkte der voedseltoevoer naar de weefsels bepaald door de sterkte der stofwisseling, en niet omgekeerd: de stofwisseling door de circulerende bloedhoeveelheid. De invloed der bewegingen van kleinere en grotere dieren op hunne stofwisseling laat zich ook zonder onderzoek niet berekenen.

Wel kan men besluiten, dat de z.g. oppervlaktewet der warmbloedige dieren, zooals deze door RUBNER ¹⁾ voor honden zoo volkomen is bewezen, haar oorsprong vindt in het hier vermelde algemeene levensverschijnsel. Krachtens dit beginsel geschiedt klaarblijkelijk de regulatie der temperatuur bij de kleinere warmbloedige dieren niet door relatief verminderde afgifte van warmte (dikker huid- of huidbekleding, nauwer vaten enz.), maar door een relatief sterker warmte productie.

Utrecht, 25 April.

Geophysica. — De heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer C. BRAAK: „*Het dubbeldaagsche maansgetij berekend uit opteekeningen van den astatische seismograaf te Batavia.*”

(Mede aangeboden door den Heer KAMERLINGH ONNES).

1. Sinds het begin van December 1908 is in het Observatorium te Batavia een astatische seismograaf van WIECHERT van ongeveer 1000 K.G. opgesteld. Dit instrument is zeer gevoelig voor hellingsveranderingen en het lag derhalve voor de hand na te gaan in hoeverre de getijbeweging in de aarde, welke door HECKER ²⁾ nader is onderzocht, uit de diagrammen kon worden afgeleid, aangezien dit getij te Batavia belangrijk grooter is dan te Potsdam.

Na dat een voorloopige bewerking bevredigende uitkomsten had geleverd, zijn voor dit doel de opteekeningen gedurende het halfjaar Juli—December 1909 verwerkt. Daarbij heb ik mij tot nog toe bepaald tot den E-W component van het dubbele maansgetij.

De seismograaf bestaat uit een cilindervormig lichaam, wegende ruim 900 K.G., hetwelk rust op een voet van ongeveer 70 c.M. lengte. Het geheel wordt gedragen door een viertal staallamellen, waardoor een Cardanische vrijheid van beweging wordt verkregen. De

¹⁾ RUBNER Zeitschr. f. Biolog. Bd. 19.

²⁾ O. HECKER. Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers unter dem Einfluss von Sonne und Mond. Veröffentl. des Kön. Preuss. Geod. Inst. Neue Folge n^o. 32. 1907.

beweging wordt overgebracht op beroet papier, dat per uur eenmaal rondbeweegt en eens per dag wordt verwisseld. De peiler, die onafhankelijk is van den vloer, rust op een breede fundeering. Het gebouw staat met de lengte-richting noord-zuid en is aan den oost- en westkant door veranda's tegen de zonnestralen beschermd.

De dagelijksche warmtegolf heeft vooral op den E-W slinger een belangrijken invloed, die op het diagram duidelijk zichtbaar is. Deze storing is zóó groot, dat slechts de uren 7^u p. m. tot 8^u a. m. voor bewerking in aanmerking kwamen. Op dagen met sterke storing kwamen ook op deze uren nog aflezingen te vervallen.

Bij afwezigheid van een basislijn werd telkens uitgemeten de afstand tusschen de opteekening te 7^u en 10^u, 8^u en 11^u enz. Om nulpunts-veranderingen en langzaam verloopende storingen gedeeltelijk te elimineeren werden daarna de verschillen genomen van den afstand 13^u—10^u en 10^u—7^u enz. welke verschillen, behoudens een kleine correctie, het getij te 10^u geven met dubbele amplitude. Bij oppervlakkige beschouwing is in deze getallen reeds het maansgetij te onderkennen.

2. Voor het halfjaar Juli—December 1909 werden nu de gegevens volgens maansuren gerangschikt. Wel waren ook voor de maanden April, Mei en Juni de aflezingen beschikbaar, maar ze werden niet gebruikt omdat de gevoeligheidsbepalingen in deze maanden voor het beoogde doel te wenschen overlieten.

Als contrôle op de betrouwbaarheid der gegevens werd ieder uur afzonderlijk gerangschikt. Men krijgt op deze wijze voor 10^u p. m. tot 5^u a. m. een achttal onafhankelijke reeksen van getallen, waaruit de volgende resultaten voor het maansgetij werden afgeleid. De amplitude is uitgedrukt in m.M.

10 ^u p. m.	0.605 <i>cos</i> (2 <i>t</i> —253° 52')	118
11	0.748 <i>cos</i> (2 <i>t</i> —261° 9')	134
12	0.501 <i>cos</i> (2 <i>t</i> —266° 21')	146
1 a. m.	0.500 <i>cos</i> (2 <i>t</i> —277° 28')	159
2	0.451 <i>cos</i> (2 <i>t</i> —256° 19')	167
3	0.625 <i>cos</i> (2 <i>t</i> —239° 41')	167
4	0.650 <i>cos</i> (2 <i>t</i> —234° 10')	154
5	0.732 <i>cos</i> (2 <i>t</i> —245° 57')	98

Achter elk der uitkomsten is het aantal waarnemingen vermeld.

Stelt men het gewicht evenredig met dit aantal en berekent men het gemiddelde van amplitude en argument, dan vindt men :

$$0.5913 \cos (2t - 254^{\circ}33').$$

Aan de amplitude moet nog een correctie worden aangebracht, omdat het argument in 3 uur niet 90° , maar $3 \times 28.^{\circ}98$ verandert. De amplitude moet derhalve nog door $1 - \cos 3 \times 28.^{\circ}98 = 0.9465$ worden gedeeld.

Daar de aflezing bij het uursein geschiedde, en dit laatste wordt gegeven 5.5 minuten vóór het uur volgens middelbaren Batavia-tijd, ondergaat het argument nog een correctie van $-2.^{\circ}40'$. Men verkrijgt op deze wijze :

$$0.6248 \cos (2t - 251^{\circ}53').$$

3. De gevoeligheid van den seismograaf werd langs twee verschillende wegen bepaald.

1°. Werden uit het gewicht en de afmetingen der onderdeelen het totale gewicht en de hoogte van het zwaartepunt boven het steunpunt afgeleid en de uitslag gemeten, die de schrijfstift vertoont wanneer kleine gewichten boven op den slinger worden geplaatst.

2°. Werd de slingertijd bepaald en de indicator-vergrooting door directe meting afgeleid.

De afwijkingbepalingen werden verricht twee malen 's maands. Een gewicht van 5 gram werd daarbij aangebracht op een afstand van 342.5 m.M. van den verticaal door het zwaartepunt, eerst aan den oost-, daarna aan den westkant en ten slotte weer aan den oostkant. De toestel neemt niet terstond den nieuwen evenwichtsstand aan, maar vertoont eenige traagheid. Het gewicht werd daarom telkens gedurende een half uur in denzelfden stand gelaten. Het uitmeten geschiedde van af een basislijn, die telkens mede op het diagram werd opgeteekend door den schrijfarm een halve minuut in een bepaalden stand vast te houden. Dit gaf voor den dubbelen uitslag het onderstaande resultaat; de uitslagen zijn in m.M.

2 Juli	21.5	17 Oct.	21.0
14 „	22.0	3 Nov.	19.7
29 ..	20.2	16 „	19.7
14 Aug.	20.9	4 Dec.	19.1
3 Sept.	20.8	17 „	19.9
18 „	20.4	3 Jan.	19.4
8 Oct.	21.0		

of gemiddeld 20.43 m. M.

Voor de hoogte van het zwaartepunt werd gevonden 895 m.M., voor het totale gewicht van den slinger 985 K.G. Hieruit volgt voor de hellingsverandering overeenkomende met 1 m.M. op het diagram :

$$\frac{2 \times 5 \times 342.5 \times 206265}{20.43 \times 985000 \times 895} = 0''.03923$$

Voor den slingertijd werden de volgende bepalingen gedaan :

Juli	10.0,	10.0,	10.2,	10.0	gemiddeld	10.0 ^s	sec.
Aug.	10.0,	10.2,	10.2,	10.4	„	10.1	„
Sept.	10.0,	10.0,	10.0		„	10.0	„
Oct.	10.0,	9.8,	9.0		„	9.6	„
Nov.	9.7,	9.7			„	9.7	„
Dec.	9.7,	9.6			„	9.6 ^s	„

waaruit volgt de gemiddelde waarde :

$$9.85 \text{ sec.}$$

De hiermede equivalente slingerlengte is :

$$24.04 \text{ meter.}$$

Voor de bepaling der indicator-vergrooing werden beurtelings elk der horizontale stelschroeven, waarmede de slinger bovenaan kan worden vastgeklemd, tegen dezen aangeschroefd, en daarna 90° zoowel naar rechts als naar links omgedraaid en er tevens voor gezorgd, dat de slinger steeds goed tegen de schroef aanlag. De uitslagen op het diagram waren :

$$60.3, \quad 60.2, \quad 60.1 \text{ en } 60.2 \text{ m.M.}$$

$$\text{gemiddeld } 60.2 \text{ m.M.}$$

overeenkomende met $\frac{1}{4}$ schroefgang

$$= 0.3517 \text{ m.M.}$$

De stelschroeven bevinden zich 122.5 c.M., het zwaartepunt 89.5 c.M. boven het steunpunt. De indicator-vergrooing wordt derhalve :

$$\frac{60.2 \times 122.5}{0.3517 \cdot 89.5} = 234.3$$

en de hellingsverandering overeenkomende met 1 m.M.

$$\frac{206265}{234.3 \times 24040} = 0''.03661$$

Voor den N—S component werd volgens de twee methoden respectievelijk

$$0''.04515 \text{ en } 0''.04376 \text{ gevonden.}$$

Voor beide componenten geeft de tweede methode derhalve iets kleinere waarden; overigens is de overeenstemming bevredigend. Het systematisch verschil zou kunnen worden toegeschreven eenerzijds aan nog niet geheel opgeheven traagheid bij de afwijkings-

bepalingen, anderzijds aan een geringe toename van den slingertijd met de amplitude bij de slingerbepalingen. Practisch waren deze invloeden niet aan te toonen. Laat men n.l. het gewichtje langer op den slinger staan, dan beginnen storende invloeden dergelijke kleine verschillen te overdekken, terwijl aan de nauwkeurigheid der slingertijd-bepalingen bij verschillende uitslag een grens wordt gesteld door de vrij snelle afname der amplitude. Beide bovengenoemde invloeden zijn echter in tegengestelde richting. Voor de afwijkingsbepalingen werd nog afzonderlijk vastgesteld dat zij, voor de gebruikte uitslagen, evenredig waren met het aangewende gewicht. Zoo werden voor 5 gram de uitslagen:

15.4, 15.5, 15.3, 15.2, 15.5, 15.6. gemidd. 15.42 m.M.
voor 2.5 gram:

7.7 7.7 7.6 7.6 7.8 7.8 gem. $\frac{15.40}{2}$ m.M.

gemeten.

Van die beide methoden van gevoeligheidsbepaling verdient waarschijnlijk de tweede de voorkeur. Het feit dat voor den E-W-slinger, die trager is dan de N-S-slinger, een grooter verschil wordt gevonden dan voor den laatsten, schijnt er op te wijzen, dat bij de toepassing der eerste methode de traagheid nog schadelijk gewerkt heeft. Daarenboven zijn de bepalingen volgens de tweede methode eenvoudiger. De laatst gevonden waarde 0."03661 is daarom voor de verdere berekening als basis aangenomen. De E-W component van het dubbeldaagsche maansgetij wordt dan voorgesteld door:

$$0."01144 \cos (2t - 251^{\circ}53').$$

4. De amplitude van het theoretische getij, in de onderstelling dat de aarde volkomen hard is, is gelijk aan:

$$\frac{3m}{2M} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos \phi \cos^4 \frac{I}{2} \left(1 - \frac{5}{2} e^2 \right)$$

waarin m en M de massa's van de maan en de aarde, a en r de stralen van de aarde en de maansbaan, ϕ de breedte, I de helling van de maansbaan op den equator en e de excentriciteit der maansbaan voorstelt. Hierin is:

$$\frac{m}{M} = 81.4 \quad \frac{a}{r} = 60.27 \quad \phi = 6^{\circ}11' \quad I = 25^{\circ}35'$$

en $e = 0.055$.

Het maansuur 0 komt overeen met het oogenblik van den bovensten maansdoorgang. Wij vinden dus ten slotte voor het theoretische getij:

$$0."0155 \cos (2t - 270^{\circ})$$

voor het werkelijke getij:

$$0."0114 \cos (2t - 251^{\circ}53').$$

Geophysica. -- De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer C. BRAAK. „*Bepaling van het epicentrum van aardbevingen door middel van de opteekening op één station*”.

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

Bij de bewerking van de seismogrammen van den astatischen WIECHERT-seismograaf bleek mij herhaaldelijk, dat zich uit de verhouding der beide componenten der aardbeweging het azimuth van het epicentrum vrij nauwkeurig laat bepalen. Daar berichten van andere seismografische stations eerst na verloop van langeren tijd te Batavia binnenkomen, werd af en toe van deze methode reeds gebruik gemaakt om, alleen met behulp van de alhier verkregen seismogrammen, voorloopig de epicentra vast te stellen. Op deze wijze konden ook o. a. over de *Korintji*-beving van 4 Juni 1909 nadere inlichtingen worden verstrekt, toen van Singapore en Banka telegrammen omtrent waargenomen aardshokken binnen kwamen.

De voornaamste bevingen van het jaar 1909 werden bewerkt om te onderzoeken met welke nauwkeurigheid het azimuth zich laat bepalen.

Intusschen paste GALITZIN¹⁾ dezelfde methode toe, daarbij gebruik makende van twee afzonderlijke loodrecht op elkaar staande seismografen met zeer sterke vergrooting, terwijl hij de demping zoo ver opvoerde, dat de slingeren aperiodisch werden. Op deze wijze werden zeer bevredigende resultaten verkregen.

Zooals reeds hierboven werd opgemerkt, kan echter ook de WIECHERT-seismograaf met vrucht voor hetzelfde doel worden gebruikt. De beide componenten moeten onafhankelijk van elkaar zijn, aan welke voorwaarden door nauwkeurige opstelling kan worden voldaan. Dat de demping slechts 5 : 1 is, behoeft aan de nauwkeurigheid geen afbreuk te doen, indien men met haar rekening houdt in verband met de periode der trillingen. De betrekkelijk geringe vergrooting vormt het voornaamste bezwaar; de kleinere bevingen zullen daardoor buiten beschouwing moeten blijven.

Aan dit laatste bezwaar kan men gedeeltelijk tegemoet komen door, behalve den eersten uitslag, nog een aantal der eerst volgende trillingen uit te meten, voorzoover ze in beide componenten volkomen met elkaar overeenkomen. Indien de eigen perioden der beide slingers geheel of nagenoeg gelijk zijn, mag dan bij eerste benadering voor

¹⁾ Fürst B. GALITZIN. Zur Frage der Bestimmung des Azimuts des Epicentrums eines Bebens Bull. de l'Acad. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, 1909.

de bepaling der ware bodembeweging dezelfde berekening worden toegepast als voor den eersten uitslag.

Voor de afleiding der ware bodembeweging werd gebruik gemaakt van de door WIECHERT gegeven uitdrukking:

$$W = \frac{V}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right\}^2 + 4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2}}$$

waarin:

$$\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 = \frac{(\log \text{nat. } \varepsilon)^2}{\pi^2 + (\log \text{nat. } \varepsilon)^2}$$

en:

V = indicator-vergrooting.

T_0 = eigen periode.

T = periode der bodembeweging.

ε = dempingsverhouding.

De bepaling van V geschiedde door directe meting. De afleiding uit de afwijking door kleine gewichten en den slingertijd is door de traagheid van het instrument onnauwkeurig, tenzij het gewicht telkens minstens een half uur op den slinger blijft staan. V was gedurende het geheele jaar voor den E—W component = 234 voor den N—S component = 186. Voor T_0 en ε werd telkens het maandgemiddelde gebruikt.

De maandgemiddelden van T_0 en ε zijn:

	T_{0E}	T_{0N}	ε_E	ε_N
Jan.	10.3	10.2	4.8	5.1
Febr.	11.0	11.1	5.6	5.1
Maart	11.0	10.8	4.9	4.3
April	10.7	10.9	4.9	4.5
Mei	10.2	10.2	4.3	4.0
Juni	10.4	10.4	5.7	5.3
Juli	10.0	10.4	5.7	5.3
Aug.	10.1	10.3	5.8	5.5
Sept.	10.0	10.1	5.4	5.5
Oct.	9.6	9.8	5.4	4.4
Nov.	9.7	10.1	4.5	4.4
Dec.	9.6	10.0	4.3	5.0

In de eerste plaats zullen hier een aantal bevingen worden behandeld, waarbij de amplitude van den eersten uitslag groot genoeg is om een voldoende nauwkeurige meting toe te laten. In het maandelijksch aardbevingsbericht komen deze bevingen voor onder nos. 29, 58, 124, 211, 237, 242 en 262. Copiën der diagrammen vindt men op de plaat.

De seismograaf is zoodanig opgesteld dat, wanneer de slinger zich ten opzichte van het frame naar O. en Z. beweegt, de schrijfstift op de diagrammen naar beneden uitslaat. Dit zal derhalve plaats vinden bij een schok uit het W. of N. Na een langzaam aanzwellen der beweging, als op vele der diagrammen voorkomt, schijnt een kleine zigzagbeweging op sommige der diagrammen de aankomst van den eigenlijken stoot aan te duiden. Bij den E.—W. component van n^o. 124 is duidelijk te zien, dat de knik overeenkomt met het begin van den eigenlijken beginstoot.

Uitmeting der eerste, in beide componenten overeenkomstige, golven geeft de volgende uitslagen, waarbij telkens de afstand der opeenvolgende uiterste standen is gemeten.

No.	Datum 1909		Uitslagen in mM.					W_E W_N	Azimuth te uitslag	Gemiddeld Azimuth	Werkelijk Azimuth	
29	3. II	E—W	7.5	25.6	43.9	53.7	56.7	1.24	N 54 W	N 56 W	N 60 W	
		N—S	4.4	13.8	26.2	26.0	31.4					
58	13. III	E—W	2.3	9.6	6.0	7.2	8.0	1.23	N 32 O	N 33 O	N 35 O	
		N—S	2.9	5.5	5.9	9.9	12.3					
124	4. VI	E—W	63	2				1.24	N 48 W		N 51 W	
		N S	46.0									
211	28. IX	E—W	4.2	8.4	10.2	14.1		1.25	Z 75 W	Z 72 W	Z 73 W	
		N—S	0.9	2.4	3.2	4.3						
237	30. X	E—W	3	0	14.7			1.22	Z 74 O	Z 76 O	Z 76 O	
		N S	0.7	2.6								
242	10. XI	E—W	3.9	15.6	15.9	9.8		1.28	N 27 O	N 27 O	N 32 O	
		N—S	5.9	22.7	23.7	15.2						
262	10. XII	E—W	[4.0]	14.0	20.0	22.1	19.2	13.9	1.31	N 81 O	N 71 O	N 65 O
		N S	[0.5]	3.4	5.3	6.2	5.4	4.1				

De vierde kolom bevat de verhouding der vergrootingen der beide componenten. Zooals blijkt, verandert deze slechts weinig. De invloed van de periode en de demping is gering en derhalve kunnen ook onnauwkeurigheden in deze grootheden slechts onbeduidenden invloed hebben.

Het azimuth is afzonderlijk berekend uit den eersten uitslag alleen en alle gemeten uitslagen gezamenlijk (kolom 6). Zondert men n°. 262 uit, waarbij de eerste uitslag zichtbaar is gestoord, zoo blijken beide methoden binnen de grenzen der nauwkeurigheid tot hetzelfde resultaat te leiden. De laatste methode, die ook bij kleine uitslagen dienst kan doen, zal in het vervolg alleen worden toegepast.

Het werkelijke azimuth werd gedeeltelijk uit de aardbevingsberichten uit den Archipel, gedeeltelijk door middel van de opteekeningen te Batavia, Manila, Zi-ka-wei en Osaka afgeleid en wel :

N°. 29, uit de Lampongsche districten, volgens aardbevingsberichten.

N°. 58, nabij Tokio, volgens de dagbladen.

N°. 124, in Korintji, volgens aardbevingsberichten.

N°. 211, in Zuid-Bantam, volgens aardbevingsberichten.

N°. 237, in de golf van Carpentaria, volgens opteekening te Batavia, Manila en Zi-ka-wei.

N°. 242, nabij Kioe-sioe, volgens opteekening te Batavia, Manila, Zi-ka-wei en Osaka.

N°. 262, nabij de Carolinen, volgens opteekening te Batavia, Manila en Osaka.

De beide methoden laten vaak aan nauwkeurigheid te wenschen over, eensdeels door onvoldoende berichten, anderdeels door onnauwkeurigheid der tijdsopgaven voor de aankomst der eerste en tweede voortrillingen en het vaak ontbreken der opgaven voor de aankomst der laatste. Voor de afstandsberekening uit de looptijden werden de krommen van WIECHERT en ZÖPPRITZ gebruikt.

Vermelding verdient nog dat het kwadrant, waaruit de bevingen komen, zich in den regel uit de richting van den eersten uitslag ondubbelzinnig laat bepalen. Slechts bij uitzondering (hier n°. 211) komt de eerste stoot uit de richting van het epicentrum, in verreweg de meeste gevallen daarentegen van den tegenovergestelden kant.

Op de boven aangegeven wijze werd nog voor een aantal andere bevingen het azimuth bepaald. De resultaten zijn in de onderstaande tabel vereenigd.

N ^o .	Datum	Epicentrum	Lengte O. v. Gr.	Breedte	Azimuth	
					berekend	werkelijk
4	2 I	Preanger	107.6	7.1 Z	Z 25° O	Z 35° O
13	15 I	t/W. v. Mindanas	132.2	5.4 N	N 65 O	N 65 O
19	23 I	Luristan	50.0	32.5 N	N 43 W	N 50 W
27	31 I	Cheribon	108.1	7.2 Z	Z 19 O	Z 51 O
28	2 II	Celebes	119.7	0.7 Z	N 63 O	N 67 O
29	3 II	Z.-Sumatra	105.1	5.2 Z	N 56 W	N 60 W
52	8 III	Banjoemas	109.2	7.2 Z	Z 26 O	Z 66 O
56	13 III	t/O. van Tokio	140.7	34.5 N	N 33 O	N 35 O
58	13 III	t/O. van Tokio	140.7	34.5 N	N 33 O	N 35 O
59	17 III	Celebes	121.6	1.0 N	N 63 O	N 64 O
61	18 III	Celebes	121.5	1.2 Z	N 69 O	N 71 O
85	15 IV	t/N. v. Formosa	124.0	30.0 N	N 29 O	N 21 O
114	17 V	Z.-Sumatra	103.2	4.0 Z	N 75 W	N 60 W
120	31 V	Harafoera-zee	135.0	10.8 Z	Z 78 O	Z 80 O
124	4 VI	Korintji	101.6	2.1 Z	N 48 W	N 51 W
143	15 VI	Preanger	107.4	7.0 Z	Z 33 O	Z 40 O
155	8 VII	Samarkand	67.0	40.0 N	N 37 W	N 34 W
176	14 VIII	Japan	139.0	36.5 N	N 38 O	N 34 O
198	11 IX	Philippijnen	124.8	10.0 N	N 53 O	N 48 O
203	17 IX	Z.-Sumatra	103.1	4.1 Z	N 70 W	N 60 W
210	27 IX	Preanger	107.1	6.9 Z	Z 22 O	Z 20 O
211	28 IX	Bantam	106.0	6.4 Z	Z 72 W	Z 73 W
237	30 VIII	G. v. Carpentaria	138.3	12.0 Z	Z 76 O	Z 76 O
242	10 XI	t/W. v. Kioe-sioe	131.0	31.0 N	N 27 O	N 32 O
243	10 XI	Cheribon	108.2	7.1 Z	Z 31 O	Z 56 O
261	10 XII	Ceram	128.5	3.3 Z	0	N 82 O
262	10 XII	Carolinen	146.0	11.5 N	N 70 O	N 65 O

De overblijvende afwijkingen tusschen berekend en werkelijk azimuth komen slechts gedeeltelijk voor rekening van fouten in het berekende azimuth. Voor de van verre komende bevingen zijn ze gering. Voor de bevingen waarvoor deze afwijkingen het grootst zijn: no's 4, 27, 52, 114, 203 en 243, welke alle van nabij gelegen plaatsen komen, zijn ze ongetwijfeld hoofdzakelijk toe te schrijven aan de gebrekkige gegevens waaruit het werkelijk azimuth is afgeleid, en laat zich de plaats van het epicentrum nauwkeuriger afleiden uit de diagrammen dan uit de binnengekomen berichten.

Wettedreden, 24 Maart 1910.

C. BRAAK.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan van den Heer F. E. C. SCHEFFER: „*Over het optreden van maximum- en minimum-druk bij heterogene evenwichten bij constante temperatuur.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

In de ruimtefiguur voor een binair stelsel, waarin volkomen mengbaarheid in den vloeistofoestand, volkomen ontmenging in den vasten toestand optreedt en waar de dampspanningen van de vloeistoffen voortdurend dalen van $x=0$ tot $x=1$, treden twee driefasenlijnen op, waar één der beide componenten in den vasten toestand coëxisteert met vloeistof en damp. Terwijl de drukwaarden op de driefasenlijn van de eerste component voortdurend met de temperatuur stijgen, is dit met de lijn voor de tweede component niet het geval; ROOZEBOM vermoedde, dat deze laatste in haar P - T -projectie altijd een maximum bezit ¹⁾ Later toonde KOHNSTAMM aan, dat dit maximum niet altijd behoefde op te treden ²⁾; uit de vergelijking van de driefasenlijn, in 1897 door VAN DER WAALS afgeleid ³⁾, kon de conditie worden afgeleid, wanneer wel en wanneer geen maximum optrad, doordien voor dit laatste de waarde van $(\eta_d - \eta_s) - \frac{\sigma d}{x_l} (\eta_l - \eta_s)$ nul moet zijn. Deze conditie kan evenwel even goed op het optreden van een minimum als van een maximum wijzen.

Het optreden van een minimumdruk op de driefasenlijn van de tweede component, wordt zelfs zeer waarschijnlijk, wanneer in de P - x -lijnen van het vloeistof-dampvlak een minimum voorkomt. Voor

¹⁾ BAKHUIS ROOZEBOM, Heterogene Gleichgewichte, II. 331.

²⁾ KOHNSTAMM, Kon. Acad. v. Wetensch. 23 Febr. 1907.

³⁾ VAN DER WAALS, Kon. Acad. v. Wetensch. 21 April 1897.

dit geval is in fig. 1 de P - T -projectie van de ruimtefiguur aangegeven en in fig. 2 de T - x -projectie der beide driefasenstrooken. De driefasenlijn $O_A E$ ligt steeds boven de sublimatielijn van A ; de lijn $O_B E$ steeds boven die van B ; in het punt R raakt de minimumlijn aan de driefasenlijn; hier krijgen dus vloeistof en damp onder driefasendruk gelijke samenstelling, wat in fig. 2 overeenkomt met een snijding van vloeistof- en dampvlak van de driefasenstrook van de tweede component. Rangschikken we de drie fasen naar haar gehalte aan B , dan is dus de volgorde bij temperaturen boven die van R : LGS_B ; beneden R : GLS_B . We zien dus, dat bij temperaturen beneden R de bovengenoemde conditie vervuld kan zijn ($x_d > x_l$, waar deze waarden betrekking hebben op de eerste component), opdat de waarde van $\frac{dp}{dt}$ nul wordt, wat dus in ons

geval het optreden van een minimum veroorzaakt.

De conditie voor het optreden van een minimum is evenwel niet aan het aanwezig zijn van een minimumdruklijn op het vloeistof-dampvlak gebonden; ze is daarvan geheel onafhankelijk, zoodat de mogelijkheid bestaat, dat in de P - T -projectie van de driefasenlijn van de tweede component een minimumdruk optreedt, terwijl toch het vloeistof-dampvlak continu van $x = 0$ tot $x = 1$ daalt.

Volkomen analoog hiermede zal in het geval, dat op het vloeistof-dampvlak een lijn van maximumdruk voorkomt, deze lijn aan de driefasenlijn van de eerste component raken (fig. 3 en 4). In het punt R is de waarde van $\frac{dp}{dt}$ positief $\left(= \frac{Q_{ld}}{V_d - V_l} \right)$; tusschen R en O_A is nu het optreden van een maximum mogelijk, zooals ook reeds door KOHNSTAMM werd vermeld. In dit geval kunnen dus twee maxima optreden, hoewel hier het optreden van geen van beide noodzakelijk is. Uit de T - x -projectie blijkt, dat bij temperaturen tusschen R en O_A (fig. 4) aan de conditie, dat $x_d > x_l$, is voldaan en de waarde van $\frac{dp}{dt}$ nul kan worden.

Terwijl nu in de ruimtefiguur in de boven besproken gedaante slechts maximum- en minimumdruklijnen kunnen optreden op het vloeistof-dampvlak, daar de concentratie der vaste stof nooit van 1 of 0 verschilt, wordt het mogelijk, dat ook maximum- en minimumdruklijnen voor de coexistentie van vast en vloeistof en van vast en gas optreden, wanneer de concentratie van de vaste stof niet aan de grenzen 1 en 0 is gebonden.

In de eerste plaats kan dit optreden, wanneer in de ruimtefiguur

één of meer verbindingen optreden; over het voorkomen van minimumdruklijnen op het SG -vlak en het SL -vlak, die in maximumsublimatiepunt en minimumsmeltpunt aan de driefasenlijn raken, zijn in deze Verslagen reeds meerdere verhandelingen van VAN DER WAALS, BAKHUIS ROOZEBOOM, SMITS e. a. verschenen.

In de tweede plaats kunnen dergelijke lijnen voorkomen in systemen, waar de vaste stof een mengsel is van de componenten in wisselende verhouding (mengkristallen). Nemen we aan, dat er volkomen menging in den vasten toestand optreedt, dan kunnen we de mogelijke gevallen gemakkelijk overzien uit fig. 5. In deze figuur is een cirkelvormige kromme geteekend, waarvan de driefasenlijn een deel uitmaakt; dit geeft ons een eenvoudig middel alle mogelijkheden te overzien. We concludeeren uit deze figuur, dat er zes typen mogelijk zijn, waarbij één lijn van maximum- of minimumdruk aan de driefasenlijn raakt (ab , bc , cd , de , ef , fa , waar deze letters telkens de tripelpunten der componenten aangeven). Evenzoo kunnen we zes gevallen onderscheiden, waar twee rakingen optreden ($a(b)c$, $b(c)d$, $c(d)e$, $d(e)f$, $e(f)a$, $f(a)b$) en zes, waarin drie der bedoelde lijnen een punt met de driefasenlijn gemeen hebben ($a(bc)d$, $b(cd)e$, $c(de)f$, $d(ef)a$, $e(fa)b$, $f(abc)e$)¹⁾.

De overige conclusies meen ik te mogen voorbijgaan; slechts even zij er op gewezen, dat uit fig. 5 o.a. ten duidelijkste blijkt, dat wanneer op de driefasenlijn een punt voorkomt, waarin $x_s = x_l$ en één, waarin $x_l = x_d$, dat dan eveneens een punt op de driefasenlijn moet voorkomen, waarin vast en gas gelijke samenstelling hebben, eene conditie, die we volkomen analoog ook bij het optreden eener dissocieerende verbinding aantreffen.

Bespreken we nader het geval, waarin in de ruimtefiguur drie lijnen van minimumdruk voorkomen (fig. 6), dan krijgen we een P, T -projectie, die groote analogie vertoont met die eener dissocieerende verbinding, die minder vluchtig is dan beide componenten. In R_1 raakt de lijn, waar S en L gelijke samenstelling hebben, aan de driefasenlijn, in R_2 die, waarin S en G gelijk zijn samengesteld; deze punten kunnen we in analogie met de corresponderende merkwaardige punten eener dissocieerende verbinding noemen: minimumsmeltpunt en maximumsublimatiepunt van de zich als enkelvoudige stof gedragende mengsels; deze beide punten, die bij eene dissocieerende verbinding bij één samenstelling liggen, komen hier bij verschillende x voor. Dit brengt tevens mede, dat de P, T -lijn voor constante x door R_1 (die dus een keerpunt bezit) niet door R_2 gaat

¹⁾ In deze verhandeling is aangenomen, dat de vaste stof steeds onder volumevergroting smelt.

en omgekeerd, zoodat de twee keerpunten der P, T -lijn van de verbinding in ons geval niet meer op één, maar op twee verschillende lijnen voorkomen. ¹⁾

De T, v -projectie der driefasestroom, die in Fig. 7 wordt weergegeven, vertoont de snijdingen van vloeistof- en vasttak in R_1 , van vast- en gastak in R_2 , van vloeistof- en gastak in R_3 ; de drie genoemde punten corresponderen met de gelijknamige in de P, T -projectie (fig. 6).

Ten slotte zij vermeld, dat het optreden van maximum- of minimumdruk op de driefaselijijn gemakkelijk uit de vergelijkingen, die VAN DER WAALS in 1897 gaf, kan worden nagegaan.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(\eta_d - \eta_s) - \frac{x_d - x_s}{x_l - x_s} (\eta_l - \eta_s)}{(v_d - v_s) - \frac{x_d - x_s}{x_l - x_s} (v_l - v_s)}$$

verkrijgt de waarde nul, wanneer de teller nul wordt, dus daarvoor is noodig: $x_d - x_s > x_l - x_s$; aan deze conditie wordt voldaan op de driefaselijijn tusschen O_A en R_1 , waar dus een maximumdruk en tusschen O_B en R_3 , waar een minimumdruk kan optreden.

Het zal eenvoudig zijn ook voor de andere gevallen de mogelijke gedaanten afte leiden; het feitenmateriaal, dat ons ten dienste staat, is nog te onvolledig om over het voorkomen der besproken gevallen zekerheid te verkrijgen; toch wijzen de smeltlijnen van het systeem HgI_2 — $HgBr_2$, ²⁾ l - en l -carvoxim, ³⁾ monochloor-monobroomhydrochinondiacetaat, ⁴⁾ p -azoxyphenetol- p -methoxykaneelzuur, ⁵⁾ p -azoxyphenetol-cholesterylbenzoaat ⁵⁾ en nog tal van andere op het optreden van maximum- en minimumlijnen op het SL -vlak en zijn er reeds vrij veel voorbeelden bekend van maximum- en minimumlijnen op het LG -vlak, hoewel in deze laatste gevallen over den aard van de vaste phase meestal geen volledige zekerheid bestaat.

¹⁾ SMITS, Kon. Acad. v. Wetensch. 27 April 1906.

²⁾ REINDERS, Dissertatie, Amsterdam 1899.

³⁾ ADRIANI, „ „ 1900.

⁴⁾ KÜSTER, Zeitschr. f. Physik. Chemie 8. 583.

⁵⁾ A. PRINS, Dissertatie, Amsterdam, 1908.

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN biedt eene mededeeling aan mede namens den Heer B. WINAVER: „*Magnetische splitsing der absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken*”. (Tweede mededeeling ¹⁾).

21. De buitenste componenten eener magnetisch gesplitste lijn zijn als men waarneemt in een richting, die een hoek ϑ met de krachtlijnen maakt, elliptisch gepolariseerd.

In onze proeven van §§ 12—17 werd herhaaldelijk over die elliptische polarisatie gesproken. In § 12 werden de eenvoudige regels geresumeerd, welke betrekking hebben op de trillingsellipsen die den polarisatie-toestand der buitenste componenten karakteriseeren voor het geval dat men met *zeer fijne* spectraallijnen in een *sterk* veld te doen heeft.

De rechtlijnige trillingen van de middelste component van een triplet liggen volgens de elementaire theorie in het door den straal en de krachtlijn gebrachte vlak terwijl de amplitudo evenredig met $\sin \vartheta$ is.

RIEM's theoretische beschouwingen in zijne in § 1 geciteerde verhandeling voeren dan ook tot deze conclusie.

22. In VOIGT's ²⁾ theoretisch onderzoek van het geval dat de waarnemingsrichting een willekeurigen hoek met de magnetische krachtlijnen vormt, wordt de opvallende gevolgtrekking gemaakt dat ook de middelste component van een triplet eene *elliptische* trilling kan uitvoeren. Deze uitkomst hangt ten nauwste daarmee samen, dat de wederkeerige invloed van naburige molekulen in aanmerking wordt genomen.

De beschouwingen van LORENTZ (vergl. boven § 1) over het vraagstuk dat ons bezighoudt, voeren tot uitkomsten, die wij ons veroorloven in het kort te resumeeren.

Voor willekeurige waarden van den hoek ϑ tusschen lichtbundel en magnetische kracht zullen zich bij iedere frequentie elliptische trillingen met tegengestelde draaiingsrichting kunnen voortplanten.

Voor de *buitenste* componenten van een scherp triplet wordt één van de beide elliptische trillingen geheel geabsorbeerd.

Heeft men niet te doen met een scherp triplet d. w. z. met drie banden, die volkomen van elkaar gescheiden zijn, dan kan men toch nog iets over den stand der trillingsellipsen van de buitenste componenten zeggen.

Neem twee assen aan, OY en OX' , waarvan de een loodrecht

¹⁾ Eerste mededeeling in deze Verslagen 29 Januari 1910, p. 621.

²⁾ W. VOIGT, Weiteres zur Theorie der magneto-optischen Wirkungen. Ann. d. Phys. I. (1900) p. 389.

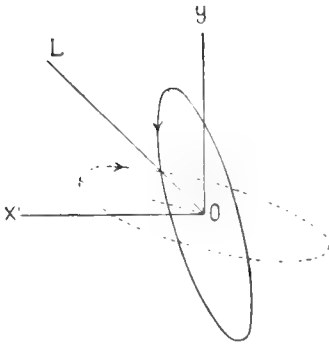


Fig. 1.

staat op het vlak door den lichtstraal en de magnetische kracht gebracht, terwijl de andere loodrecht staat op den lichtstraal en in het zooeven genoemde vlak ligt. De eene trillingsellips zal dan, ook wat de bewegingsrichting betreft, het spiegelbeeld zijn van de andere ten opzichte van de lijn, die den hoek tusschen OX' en OY' middendoor deelt.

Voor de *middelste* component van het triplet is de uitkomst verschillend naar gelang ϑ grooter of kleiner is dan ϑ_1 , een hoek die bepaald wordt door de formule

$$\tan \vartheta_1 \sin \vartheta_1 = \frac{g}{v}.$$

Hierin is g een grootheid die als maat voor de breedte der absorptie-lijnen kan dienen en van de constanten van den damp afhangt, terwijl v de grootte van de verandering der frequentie van de vrije trillingen der electronen bepaalt en evenredig met de veldsterkte verandert.

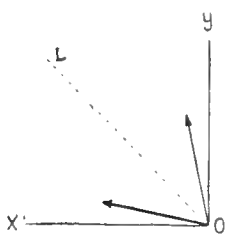


Fig. 2.

Voor het geval dat $\vartheta > \vartheta_1$ is, kunnen zich in den damp twee linear gepolariseerde golven voortplanten met gelijke brekingsindices en ongelijke absorptie-coëfficiënten. De rechtlijnige trillingen maken gelijke hoeken met de lijn OL die den hoek XOY' middendoor deelt. De bundel waarvan de trillingen den kleinsten hoek met de krachtlijnen maken, wordt het sterkst geabsorbeerd. In de figuur is dit door een dikkeren pijl aangegeven.

Naarmate ϑ grooter wordt naderen de beide trillingsrichtingen meer en meer tot OL om bij $\vartheta = \vartheta_1$ samen te vallen met OL . De absorptie-coëfficiënten voor beide trillingen zijn dan ook gelijk geworden.

Geheel anders wordt de toestand voor $\vartheta < \vartheta_1$.

Dan kunnen zich twee tegengesteld elliptisch gepolariseerde bundels voortplanten, die even sterk geabsorbeerd worden maar ongelijke voortplantingssnelheden hebben. Fig. 1 kan hier tot opheldering dienen. Naarmate ϑ tot 0 nadert, naderen de trillingsellipsen tot cirkels, die in tegengestelden zin worden doorloopen.

Een verdere benadering voor $\vartheta = \vartheta_1$ toont, dat de beide trillingen niet precies samenvallen maar een weinig elliptisch blijven. De twee gebieden, dat van de lineaire en dat van de elliptische trillingen vallen iets over elkaar.

23. Er zijn nu drie uitkomsten van LORENTZ's theorie die het eenvoudigst aan het experiment getoetst kunnen worden.

Wij denken ons de omstandigheden waarin de absorbeerende damp zich bevindt, zóó, dat de elementaire theorie niet van toepassing is. De componenten eener gesplitste lijn mogen dus niet door een zoo goed als volkomen doorschijnend gebied gesecheiden zijn. De dampdichtheid moet dus betrekkelijk groot of de veldsterkte vrij klein worden gekozen. Wij werken als altijd met een veld met horizontale krachtlijnen en laten het invallend licht in een horizontaal vlak loopen.

De drie bedoelde voorspellingen, die dus moeten gelden indien het zuiver transversale of zuiver longitudinale effect buiten beschouwing worden gelaten, zijn :

1°. de assen der trillingsellipsen van de buitenste componenten hellen ten opzichte van de verticaal.

2°. de trillingen van de middelste component (c. q. componenten) zijn naar omstandigheden lineair en niet horizontaal of wel elliptisch met niet horizontale as.

3°. Er bestaat een hoek ϑ_1 die de gebieden van het longitudinale en van het transversale effect scheidt.

Schuine stand der trillingsellipsen van de buitenste componenten.

24. Het is ons gelukt bij de beide D -lijnen in het omgekeerde effect den schuinen stand der trillingsellipsen van de buitenste componenten experimenteel vast te stellen en het bedrag der helling van de assen te meten.

Zeër in het oog vallend is die schuine stand volstrekt niet.

Bij een hoek ϑ waarbij de trillingen reeds zeer duidelijk elliptisch waren, konden wij toch eerst na eenige moeite den schuinen stand vaststellen.

Eenige bijzonderheden mogen voor een bepaald geval volgen. Bij $\vartheta = 69^\circ$ en een veld van omstreeks 18000 gauss werden de eerste waarnemingen verricht.

De aandacht werd gevestigd op D_2 , en de damp zoo dicht gemaakt dat de twee buitenste componenten van het sextet niet afzonderlijk te zien waren. Voor de spleet van den spectrokoop werd een Nicol geplaatst met zijn trillingsvlak onder een hoek van bijv. 35 graden met den horizont. Zeer donker is nu het centrale deel der splitsingsfiguur, maar slechts zeer slauw zijn de uiterste componenten van het pseudo-triplet zichtbaar.

Dit heeft het voordeel dat een geringe verandering der intensiteit der buitenste componenten gemakkelijk in het oog zal vallen. De richting van het veld duiden wij als veldrichting 1 aan.

Bij de omgekeerde veldrichting 2, waren de buitenste componenten donkerder.

Deze proef werd eenige malen herhaald en de uitkomst bevestigd.

De Nicol werd nu in een stand symmetrisch ten opzichte van dien van daareven gesteld. Thans waren bij de veldrichting 1 de buitenste componenten zwarter. Uit deze proeven volgt dat de trillingsellipsen der buitenste componenten niet symmetrisch ten opzichte van de verticaal staan, dat zij dus schuin staan.

25. Bij een damp van een dichtheid die tusschen de eerste en tweede phase (§ 13) in ligt en bij $\vartheta = 69^\circ$ hebben wij de richting van de kleinste as der trillingsellips gemeten. De Nicol die voor de spleet was geplaatst, kan om zijn as gedraaid worden. De grootte der draaiing kan op een verdeeld cirkeltje in graden worden afgelezen. Het juist verdwijnen of weer te voorschijn komen der uiterste componenten leverde een geschikt criterium op om den stand der kleine en daarmee van die der groote as der trillingsellips te bepalen. De uitkomst der metingen was dat de helling der groote as ten opzichte van de verticaal 5° onder de omstandigheden der proef bedroeg. Het bleek dat zoowel voor de componenten naar den kant van het rood als naar dien van het violet de helling gelijk en in gelijken zin was.

Met behulp van eene eenvoudige figuur willen wij nog de richting van de helling in verband met die van het veld aangeven.

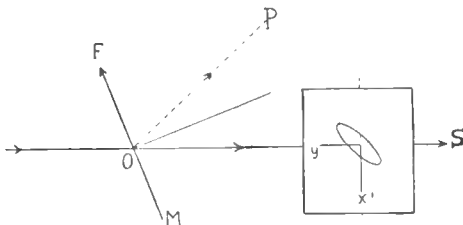


Fig. 3.

Laat OS de lichtbundel zijn die de in O geplaatste lichtbron doorloopt. OF moge de richting der magnetische kracht aangeven.

Voor een waarnemer, die in de richting SO ziet, helt dan het bovengedeelte der trillingsellips naar rechts. Het op den straal normale vlak YX' met de ellips, is om de stippellijn neergeslagen in vlak SOM . De zijde van het vlak die uit L zichtbaar was, is nu te zien. Voor de in tegengestelde richting doorloopen ellipsen is bij onveranderde richting van het veld, gelijk reeds werd opgemerkt, de helling dezelfde.

26. *Dezelfde* natriumvlam die in de richting OS , wat het inverse

effect betreft, werd onderzocht, hebben wij in de richting OP (d. i. voor een hoek $FOP = MOS = 180^\circ - \vartheta$) wat aangaat het verschijnsel der partieele polarisatie, dat door EGOROFF en GEORGIEWSKY werd ontdekt, eenigermate bestudeerd. Hierbij werd gebruik gemaakt van een kijker die op de vlam was ingesteld en voorzien was van een plaatje van SAVART met Nicol. Deze polariscoop kan om zijn as gedraaid worden en de stand er van op een verdeelden cirkel, in graden verdeeld, worden afgelezen. Het was aldus mogelijk om te zien aan de strepen in den polariscoop of het vlak der partieele polarisatie al of niet verticaal stond. Het bleek duidelijk dat dit laatste het geval was. De strepen waren het duidelijkst indien de waarnemer in P ze zag loopen van links boven naar rechts onder. Altijd bij de veldrichting die in de figuur is aangegeven. Werd de richting van het veld omgekeerd dan werden de strepen onduidelijk. Ze waren eerst weer goed te zien, indien de hoofdrichting van den polariscoop van rechts boven naar links beneden liep. De uitkomst van deze waarnemingen bewijst ten minste, dat het geheele verschijnsel niet symmetrisch ten opzichte van de verticaal is en dat dus schuine trillingen moeten bestaan. Het zij ons vergund te vermelden, dat de Heer LORENTZ aan een onzer mondeling had medegedeeld, dergelijke verschijnselen als in deze § zijn beschreven ook waargenomen te hebben.

27. Bij het verrichten van de proef in de vorige § beschreven moet er zorgvuldig op gelet worden dat de as van den kijker nauwkeurig in een horizontaal vlak, door de polen van den electromagneet gaande, ligt. Neemt men waar in een niet horizontaal vlak dan kan daardoor een scheeve stand van de assen der trillingsellipsen worden voorgespiegeld, zooals uit eene geometrische beschouwing gemakkelijk blijkt. Bij omkeering van het veld zou dan echter de helling ten opzichte van de verticaal onveranderd blijven.

28. Het vlak der partieele polarisatie kan vrij nauwkeurig bepaald worden. Terwijl echter de helling der buitenste ellipsen van sextet en quartet omsteeks 5° bedraagt, maakte onder onveranderde omstandigheden van den damp en bij hetzelfde veld het vlak der partieele polarisatie een hoek van 21° met de verticaal.

Het schijnt op het eerste gezicht vreemd, dat de polariscoop van SAVART zoo gevoelig voor een geringen schuinen stand der ellipsen is.

Het verschijnsel der partieele polarisatie is zoo gecompliceerd dat men wel niet spoedig het volledig zal kunnen behandelen.

Wij meenen echter dat het wel mogelijk is de richting aan te geven waarin de verklaring van het opvallend verschil tusschen de

aanwijzingen van beide instrumenten te zoeken is. Zij meten n.l. verschillende grootheden.

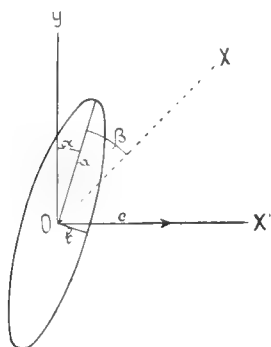


Fig. 4.

Zoolang de helling der ellipsen in het door de gemagnetiseerde lichtbron uitgestraalde licht gelijk nul is, trilt ook het resulterende licht symmetrisch ten opzichte van de verticaal.

Zoodra echter de genoemde helling niet nul is, maar een kleine waarde α heeft, staat het vlak waarin de resulterende lichtbeweging een maximum heeft onder een hoek $\alpha + \beta$, die veel grooter kan zijn.

Het uitgezonden licht der natriumvlam bestaat :

1°. uit horizontale trillingen met de intensiteit c^2 . (Wij zien hierbij af van een in § 30 ter sprake komende verandering).

2°. uit trillingen in ellipsen, waarvan de groote assen onder een hoek α met de verticaal staan. De assen dier ellipsen noemen wij a en b .

De intensiteit I_x in een richting $O X$ wordt

$$I_x = c^2 \sin^2 (\alpha + \beta) + a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta \dots (1)$$

Deze uitdrukking wordt een maximum als β voldoet aan de vergelijking :

$$c^2 \sin 2(\alpha + \beta) + (b^2 - a^2) \sin 2\beta = 0. \dots (2)$$

Hieruit volgt reeds dat β niet 0 kan zijn, want anders zou ook α nul moeten zijn.

Uit (2) volgt :

$$\frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\beta} = \frac{a^2 - b^2}{c^2} \dots (3)$$

De groote van β hangt dus af van de intensiteiten der horizontale en verticale trillingen. In het algemeen is $a > b$, terwijl meestal in het uitgestraalde licht de verticale trillingen overwegen dus ook $a > c$. β moet een positieve grootheid zijn.

Stelt men $a = 5^\circ$ $\alpha + \beta = 21^\circ$ en $b = 0,3 a$ (vg. § 29) dan volgt uit (3)

$$\frac{a^2}{c^2} = 1,4$$

wat zeer goed mogelijk is. De waarnemingen met den polariscoop en met den Nicol alleen, zijn dus volstrekt niet in tegenspraak met elkaar.

29. Wij hebben bij het omgekeerde effect enkele metingen gedaan over de ellipticiteit der buitenste componenten bij verschillende invalshoeken. Wij bezigden de bekende methode waarbij van een

kwartgolfplaatje en Nicol wordt gebruik gemaakt. De assen der kwartgolfplaat worden evenwijdig geplaatst aan die der invallende ellips zoodat het nittredende licht lineair is. Zijn b en a de horizontale en verticale of de bijna horizontale en bijna verticale halveassen dan is $\frac{b}{a} = \tan \alpha$.

Het kwartgolfplaatje uit mica was voor de buurt der D -lijnen zeer nauwkeurig, zooals een onderzoek volgens de vroeger beschreven methode leerde ¹⁾ Drie verschillende bepalingen gaven als waarde voor de fout 1,8, 0,1, 1,0 %.

Deze nauwkeurigheid van het plaatje is voor onze tegenwoordige bepalingen overbodig. De metingen zijn zeer moeilijk en hebben betrekking op het gemiddelde van de buitenste componenten van het sextet, dus op een uiterst smal deel van het spectrum. De gebezigde dampdichtheid laat zich slechts bij benadering definiëren (10).

De uitkomsten over de ellipticiteit van de buitenste componenten van het sextet zijn in onderstaande tabel vereenigd.

ϑ	b/a	Opmerkingen
$69^\circ \frac{1}{2}$	0.31	0.30 Damp van gemiddelde dichtheid (§ 10)
	0.31	
	0.28	
47°	0.45	0.45 „
	0.45	
	0.45	
39°	0.47	0.47 Damp iets dichter
	0.50	
	0.67	0.66 Dunne damp (§ 10)
	0.70	
	0.70	
0.60		
	0.64	
	0.67	
	0.63	
	0.65	
	0.65	

De verhouding der assen bij een bepaalden hoek hangt ongetwijfeld ook enigszins van de dampdichtheid af. Een deel der schommelingen in de uitkomsten bij één hoek is wel daaraan toe te schrijven.

Bij $\vartheta = 69^\circ \frac{1}{2}$ was de helling van de groote as der ellips ten opzichte van de verticaal in dichten damp 5° ; in zeer dunne damp werd voor dezen hoek 0° gevonden.

¹⁾ ZEEMAN, deze Verslagen. October 30. 1909.

Bij $\vartheta = 47^\circ$ werd voor de helling in damp van gemiddelde dichtheid $4^\circ \frac{1}{2}$ gevonden. De strepen van SAVART maakten toen een hoek van 28° met de verticaal.

Schuine stand der trillingen in de middelste componenten.

30. Terwijl de schuine stand der trillingsellipsen in de buitenste componenten het eerst bij het sextet kon worden aangetoond, is ons juist bij het quartet de experimenteele bevestiging van de tweede bovengenoemde gevolgtrekking van LORENTZ (23) het eerst gelukt.

De niet horizontale stand der trillingen bij het quartet der lijn D_1 kan op soortgelijke wijze als het aantoonen van de helling der ellipsen (24) worden bewezen,

De trillingsrichting van den Nicol voor de spleet werd onder een helling van omstreeks 30° met den horizont geplaatst. De buitenste componenten van het quartet D_1 zijn dan bijna niet zichtbaar. De binnenste componenten zijn vrij donker. De veldrichting duiden wij door 1 aan. Onder den invloed van het omgekeerde veld 2 worden de middelste componenten donkerder. Bracht men den Nicol in den symmetrischen stand dan was het juist bij de veldrichting 1 dat de middelste componenten het duidelijkst waren.

De hoek ϑ was bij deze proef 47° .

Twee metingen om de helling der trilling ten opzichte van den horizont te bepalen leverden de waarden $4^\circ \frac{1}{2}$, resp. $5^\circ \frac{1}{2}$. Deze metingen zijn echter zeer moeilijk, vooral ook door de nabijheid der buitenste componenten, die duidelijker worden, naarmate bij het zoeken van de juiste instelling, het trillingsvlak van den Nicol meer verticaal wordt.

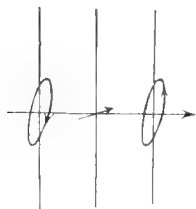


Fig. 5.

31. Wij hebben nog een proef genomen die de uitkomst van (30) bevestigt en tevens laat zien welk verband er bestaat tusschen de helling van de trillingen bij de verschillende componenten. Schematisch is dat verband in fig. 5 voorgesteld. De voor de middelste componenten van een quartet en van een sextet experimenteel verkregen uitkomst mag zeker ook wel kwalitatief op een triplet worden overgebracht.

De bedoelde proef was de volgende: De Nicol werd onder een azimut van 40° met de verticaal geplaatst; de positieve draaiingsrichting in figuur 5 zij gerekend tegengesteld aan die der beweging der wijzers van een uurwerk. Vervolgens werd de Nicol op 320° van gebracht (dus in de symmetrische positie). Wij noemen de laatste positie B , de eerstgenoemde A .

Het veld werd onveranderd van richting gehouden.

In de positie *A* waren alle lijnen zwakker dan in de positie *B*.

Uit deze waarneming volgt zoowel het scheef staan van de ellipsen en van de trillingen der middelste componenten, als ook dat de relatieve positie der trillingen moet zijn als in fig. 5.

32. In zijn reeds meermalen genoemd onderzoek vermeldt RIGHI (noot p. 291 der in § 1 geciteerde verhandeling) dat VOIGT's theoretisch onderzoek over het algemeene geval van voortplanting van licht in een richting schuin ten opzichte van de krachtlijnen te laat verscheen om hem bij zijn onderzoek te kunnen leiden. RIGHI meent echter dat in zijne talrijke proeven bijzonderheden in het gedrag van de middelste component als waarop VOIGT wijst, hem wel niet hadden kunnen ontgaan, indien ze er waren en dat de elementaire theorie van LORENTZ alle waargenomen verschijnselen verklaart.

Dit schijnt in tegenspraak met onze uitkomsten. Deze tegenspraak verdwijnt echter, indien men aanneemt, dat bij de proeven van RIGHI de onderzochte damp zeer dun was, of het veld steeds zoo sterk dat de componenten der gesplitste lijnen volkomen van elkaar waren gescheiden. In het laatste geval hebben ook wij volkomen overeenstemming met de elementaire theorie, voorzoover de polarisatie der componenten en de richting der trillingen aangaat, kunnen constateeren. Ook lag het bij RIGHI's proeven niet voor de hand de richting van het magnetische veld omtekeeren, waardoor de bijzonderheden welke op het „scheve” in de trillingsrichtingen betrekking hebben, zich het gemakkelijkst vertoonen.

Toepassing van de uitkomsten (§§ 24—31) op de studie der zonnevlekken.

33. De trillingsrichting in de middelste component van een triplet, dat in het transversale effect wordt waargenomen is evenwijdig aan het magnetisch veld. In de buitenste componenten staat de trillingsrichting loodrecht op het veld. Ook voor dichte dampen gaan deze regels door, indien men maar met het zuiver transversale effect te doen heeft. Wordt in een richting schuin ten opzichte van het veld waargenomen, dan is alleen in zeer verdunde dampen de projectie der magnetische kracht op een vlak loodrecht op de gezichtslijn door de eenvoudige regels der elementaire theorie uit de trillingsrichting der componenten te vinden. Zoodra echter de lijnen van een omgekeerd triplet niet meer door volkomen doorschijnende gedeelten van elkaar gescheiden zijn, en de lijnen in de zonnevlekken schijnen in dit geval te verkeeren, moet men rekening houden met de in fig. 5 schematisch voorgestelde bijzonderheden.

Bij het maken van kaarten van de magnetische velden in zonnevlekken, waarbij intensiteit, richting en zin der magnetische kracht in de vlekken wordt aangegeven, zal dus het bepalen van de richting der magnetische kracht eenige moeilijkheid kunnen veroorzaken.

Over de grootte der correctie welke aan de aanwijzingen der elementaire theorie in bijzondere gevallen moet worden aangebracht, zal later nog gesproken worden.

De regel, die den zin der afwijking bepaalt, moge hier aangeduid worden.

De richting waarin de trillingsellipsen in de buitenste componenten naar den kant van het rood en van het violet worden doorloopen, leert ons of ϑ scherp of stomp is. Is ϑ stomp (fig. 3) dan is de relatieve stand van de richtingen der magnetische kracht, van de groote as der trillingsellipsen en van de trillingsrichting van den middelsten component als in fig. 5.

Men denke zich uit een punt O een lijn OB evenwijdig aan de groote as der ellipsen van de buitenste componenten getrokken en een lijn OM evenwijdig aan de trillingsrichting van de middelste, zoodanig dat hoek BOM scherp is. De projectie OF van de magnetische kracht op een vlak normaal op de gezichtslijn maakt dan een scherpen hoek met OB zoodanig dat BOF grooter is dan BOM , de positieve draaiingsrichting gerekend van OB naar OM .

Het al of niet onderling loodrecht staan van de groote as der ellipsen en van de middelste component laat zien of men de elementaire theorie al dan niet mag toepassen.

Mikrobiologie. — De Heer BELJERINCK biedt eene mededeeling aan over: „*Emulsielaevulan, het produkt der werking van viscosaccharase op rietsuiker.*”

In de Verslagen der Akademie van 9 Februari 1910 werd gewezen op het bestaan van een enzym, de viscosaccharase, dat uit rietsuiker en raffinose een niet voor diffusie vatbaar slijm voortbrengt. Bij het verdere onderzoek dienaangaande, dat ik gemeenschappelijk met den Heer D. C. J. MINKMAN heb uitgevoerd, bleek, dat het slijm een met het laevulan van LIPPMANN¹⁾ na verwant maar daarmee niet identiek lichaam is.

Ons laevulan ontstaat in de waterige voedseloplossingen op geheel dezelfde wijze als in de vroeger beschreven agarplaten, zoodat deze oplossingen in een melkwhite emulsie veranderen; de vloeistof tusschen de zwevende laevulandroppels opaliseert krachtig. In warm

¹⁾ Chemie der Zuckerarten 3^{te} Aufl. Pag. 428, 806, 1312, 1904.

water is de stof tamelijk oplosbaar en de specifieke draaiing van het gepolariseerd licht, die wegens de opalisatie slechts bij benadering te bepalen is, bedraagt ongeveer

$$\alpha_D = - 80^\circ$$

terwijl LIPPMANN voor zijn laevulan opgeeft

$$\alpha_D = - 221^\circ.$$

Op grond van dit belangrijke verschil in het draaiend vermogen zou een nieuwe naam bijv. „sinistran”, wellicht wenschelijk kunnen schijnen. Daar „laevulan” echter een kollektief begrip is, waartoe ongedwongen ook de meer en de minder oplosbare vorm onzer stof kunnen gebracht worden, zullen wij ons hier van de meer algemeene benaming bedienen, te meer daar het vaststaat, dat het laevulan der literatuur even als het onze uit celwandstof van bakteriën bestaat.

Behalve door LIPPMANN is laevulanvorming door bakteriën ook waargenomen door MAASSEN¹⁾, die echter het emulsieverschijnsel niet beschrijft, zoodat ook in dit geval waarschijnlijk een van ons emulsie-laevulan verschillende modifikatie wordt voortgebracht. De hierbij betrokken mikrobe is een sporenvormend gistingsorganisme, dat MAASSEN *Semiclostridium commune* noemt, maar door ons nog niet gevonden werd.

Bereiding en eigenschappen van emulsie-laevulan.

Aanvankelijk waren wij van meening, dat het emulsie-laevulan het best bereid zou kunnen worden door gebruik te maken van *Bacillus emulsionis*, daar wij hadden vastgesteld, dat deze soort het eenmaal gevormde laevulan niet verder aantast, terwijl *B. megatherium* en *B. mesentericus*, die eveneens krachtige emulsievormers zijn, het lichaam wel aantasten en als voedsel opgebruiken zoodra de rietsuiker verdwenen is. Niettemin is het ons gebleken, dat het met eenige voorzichtigheid veel gemakkelijker is met behulp vooral van *B. mesentericus* groote hoeveelheden laevulan te maken, dan door middel van *B. emulsionis*, hetgeen berust op de omstandigheid, dat eerstgenoemde soort, vooral bij hogere temperaturen, een buitengewoon groote vegetatiekracht bezit, terwijl de laatste steeds langzaam groeit en een betrekkelijk laag, beneden of bij 30° C. gelegen temperatuuroptimum heeft.

Wij hebben daarom voor de laevulanbereiding hooibacteriën gebruikt, dat is de gewone vorm van *B. mesentericus*, zooals men die door bekende ophoopingmethoden op aardappelschijven of in montextract verkrijgt. Overigens is deze vorm zoo algemeen in onze omgeving, en zoo zeer aangepast aan het leven in rietsuikeroplossingen van verschillende samenstelling, dat deze na pasteurisatie of kort

¹⁾ Arbeiten aus dem Kais. Gesundheitsamte, Biol. Abt. Bd. 5 Pag. 1, 1905.

opkoken en bij warm bewaren reeds vanzelf tot laevulanvorming overgaan, juist door de ontwikkeling der spontane hooibacillensporen, zoodat zulke voedingsvloeistoffen ook van zelve melkachtig en slijmig worden, door het ontstaan der mikroskopische laevulanemulsie.

Voor de proeven werd gebruik gemaakt van groote ERLÉNMEYER-kolven, waarin 500 cM³. eener kultuurvloeistof van de volgende samenstelling was gebracht: leidingswater met 20% rietsuiker, 0.05% KNO₃ en 0.05% K₂HPO₄ terwijl gekultiveerd werd bij ± 27° C.

Zeer spoedig verkrijgt deze, met *B. mesentericus* geënte vloeistof het genoemde melkachtige uiterlijk; dezelfde emulsie, welke aan de koloniën van *B. mesentericus*, *B. megatherium* en *B. emulsionis* op rietsuikeragarplaten een zoo eigenaardig karakter geeft vormt zich thans in groote hoeveelheid in de kultuurvloeistof, die ook overigens met laevulan verzadigd is, en waardoor een zeer sterke en eigenaardige opalisatie ontstaat, zooals ons die bij geen andere stof bekend is. Bovendien vormt zich langzamerhand op den bodem der kolven een dikke doorzichtige slijmlaag, die eveneens gebleken is uit laevulan te bestaan, waarin echter de hoofdmassa der bakteriënlichamen zelve is opgehoopt, terwijl de daarboven staande vloeistof arm aan bakteriën maar rijk aan viscosaccharase en laevulanemulsie is. De zuurvorming in deze kultuurvloeistof is gering.

Het laevulan kan met alcohol geprecipiteerd worden, waarvoor zooveel alcohol voldoende is, dat het mengsel ongeveer 50% bevat. Eerst bij veel grooter alcoholconcentratie precipiteeren ook andere stoffen. Door oplossen in kokend water en opnieuw precipiteeren met alcohol is de reiniging gemakkelijk. Na drogen en stampen ontstaat een sneeuw wit, bijna smakeloos poeder.

Uit een kolf als boven beschreven, waarin aanvankelijk dus 100 G. rietsuiker aanwezig was, werd na 7 dagen kultuurtijd 8 G. zuiver droog laevulan verkregen, terwijl toen nog in de vloeistof aanwezig waren 20 G. invert- en 70 G. rietsuiker. Maar het aan den bodem gehechte laevulanslijm was daarbij niet verzameld.

Uit een andere aan de voorgaande geheel gelijke kolf, die aanvankelijk dus ook 100 G. rietsuiker bevatte, werd na 17 dagen 15 G. laevulan verkregen terwijl nog 45 G. rietsuiker en 35 G. invertsuiker aanwezig bleken. Het hierin achtergebleven aan den bodem vastgehechte slijm, bestaande uit *B. mesentericus* met dikke celwanden van laevulan, werd overgoten met een oplossing van 2% rietsuiker, 0.05% KNO₃ en 0.05% K₂HPO₄. Na 18 dagen werd uit de 10 G. oorspronkelijk aanwezige rietsuiker 2.25 G., dus 22.5% laevulan verkregen.

Zuiver laevulan is in koud water moeilijk, in kokend veel beter oplosbaar; alle oplossingen opaliseeren buitengewoon sterk. Het redu-

ceert koperproefvocht niet; eerst na langdurig koken is zwakke reductie merkbaar. Het is niet vatbaar voor alcohol- en melkzuurgisting, maar wordt door de boterzuurfermenten bij luchtafsluiting in even sterke gisting gebracht als rietsuiker, waarbij waterstof, koolzuur en vluchtig zuur ontstaat. Tal van bacteriën kunnen het, bij luchttoetreding groeiend, als voedsel gebruiken; *Azotobacter chroococcum* kan het opgebruiken onder stikstofbinding en zuurvorming.

Bij behandeling met zuren gaat het, vooral bij verwarming, met groote gemakkelijheid in laevulose over en wordt zoodoende geschikt voor alcohol- en melkzuurgisting. Na de inversie ontstaat bij verwarming met resorcine en sterk zoutzuur de voor laevulose karakteristieke roodkleuring, terwijl de op pentose wijzende violetkleuring met oreine en zoutzuur ontbreekt. Na behandeling met zwavelzuur laat zich in het distillaat geen merkbare hoeveelheid furfurol aantoonen.

Gelijk gezegd bedraagt de specifieke draaiing, die niet nauwkeurig is te bepalen door de sterke opalisatie

$$\alpha_D = -80^\circ$$

en na hydrolyse

$$\alpha_D = -70^\circ$$

dat is dus geringer dan van zuivere laevulose, waarvoor wij

$$\alpha_D = -92^\circ$$

vonden.

Na lange verhitting met zuur in de autoclaaf op 120° neemt de draaiing iets af, zoodat zelfs

$$\alpha_D = -64^\circ$$

gevonden werd.

Het is niet onwaarschijnlijk, dat dit tekort moet verklaard worden uit de vernietiging van een gedeelte van de laevulose.

Daar het ons gebleken was, dat het op den bodem der kolven afgezette slijm minder oplosbaar is dan het door alcohol uit de daarboven staande geemulsioneerde vloeistof verkregene, hebben wij het laevulan daaruit alleen door afzonderlijke proeven bereid. Wij vermoeden namelijk, dat daarin wellicht dextran zou kunnen voorkomen, dat veel minder oplosbaar in water is dan laevulan. Intusschen bleek, dat het uit het bodemslijm verkregen zuivere produkt na inversie geen andere draaiing geeft dan het emulsielaevulan, zoodat besloten moet worden, dat de hooibacteriën volstrekt geen dextran maken, maar

dat hun celwand uit verschillende laevulanmodifikaties van ongelijke oplosbaarheid bestaat.

Niet alleen in kultuurvloeistoffen van de bovengenoemde samenstelling brengt *B. mesentericus* laevulan voort, maar dit geschiedt eveneens gemakkelijk in gistafkooksel met 2 tot 20% rietsuiker, waarbij toevoeging van krijt gunstig blijkt te zijn; de temperatuur bij het kultiveeren kan ook verschillend gekozen worden en zelfs tot 40° C. worden opgevoerd, maar dan vooral moet gezorgd worden, dat het laevulan zelf niet wordt aangetast.

Uit het voorafgaande moet worden afgeleid, dat de groote slijmklompen, welke *B. mesentericus* en de overige emulsioneerende soorten, waartoe zonder twijfel ook *Semiclostridium commune* van MAASSEN moet gerekend worden, zoo gemakkelijk op rietsuiker-agarplaten voortbrengen, evengoed uit laevulan bestaan als de emulsie, die in de kultuurvloeistoffen en rondom de koloniën dezer soorten in de agar voorkomt. Er is dus ook geen twijfel aan, dat het in de agar niet diffundeerende slijm dezer slijmkoloniën door viscosaccharase uit rietsuiker wordt gevormd, en dat dit enzym slechts ten deele het eigenlijke bakteriënlichaam, indien de wand daarbij gerekend wordt, verlaat. Blijkbaar wordt ook in den celwand zelve door het enzym nieuw laevulan gevormd door de omzetting van de rietsuiker, waarmede die celwand evengoed doortrokken moet zijn als de agarplaat.

De vorming van celwandstof tengevolge van enzymwerking, welke in de vroegere mededeeling waarschijnlijk werd genoemd, kan dus thans, wat het laevulan betreft, als bewezen worden beschouwd.

Op het dextran en de dextranbakteriën, waarover onze onderzoekingen zich eveneens hebben uitgestrekt, zal bij een latere gelegenheid teruggekomen worden. Voorloopig kan intusschen reeds gewezen worden op het feit, dat dit lichaam, waardoor het gepolariseerde licht sterk rechts wordt gedraaid (wij vonden $\alpha_D = +120^\circ$ terwijl in de literatuur door verschillende onderzoekers voor dextran opgegeven wordt $\alpha_D = +199^\circ$ tot $+230^\circ$) evenals het laevulan uitsluitend uit rietsuiker ontstaat. Zoowel het laevulan als het dextran worden door de mikroben dus noch uit laevulose, noch uit glukose, noch uit eenigerlei andere suiker dan rietsuiker en raffinose voortgebracht. De door andere mikroben uit glukose, laevulose en maltose gevormde slijmige wandstoffen zijn van geheel andere natuur.

Natuurkunde. -- De Heer DR BOIS biedt namens den Heer STANISLAW LORIA eene mededeeling aan uit het Bosscha-Laboratorium: „*Der magneto-optische KERR-Effekt bei ferromagnetischen Verbindungen und Legierungen.*“

(Mede aangeboden door den Heer BOSSCHA).

Das von KERR in 1876 entdeckte Phänomen hängt, wie die späteren Arbeiten von KERR¹⁾ selbst und auch die von KAZ²⁾, RIGHI³⁾, KUNDT⁴⁾, SISSINGH⁵⁾ und ZEEMAN⁶⁾ gezeigt haben, sowohl von der Orientierung der reflektirenden Fläche in bezug auf die magnetischen Vektoren, wie auch von dem Einfallswinkel und der Lage der Polarisationssebene der auffällenden Strahlung in ziemlich komplizierter Weise ab. Im einfachsten und weitaus wichtigsten Falle, bei „polarer“ Magnetisierung und nahezu normaler Inzidenz des senkrecht oder parallel zur Einfallsebene polarisierten Lichtes, erwies sich die Drehung der grossen Axe der, nach RIGHI⁷⁾ im allgemeinen elliptischen, reflektierten Strahlung als abhängig von der Wellenlänge und der Magnetisierung.

Die Dispersion dieser Drehung bot — nach den von DR BOIS⁸⁾ ausgeführten Messungen — gewisse Gesetzmässigkeiten dar. Für Eisen, Cobalt und Nickel verlief die Dispersioncurve ausschliesslich im Gebiete *negativer* Werte; bei Eisen stieg sie von Violett bis Rot mit Andeutung eines Minimums im Ultraviolett; beim Nickel passierte sie ein Minimum im Gelb, beim Cobalt ein nur schwach angedeutetes Minimum im Blaugrün. Ausschliesslich im Bereiche *positiver* Werte verlief hingegen die Dispersioncurve des Magnetits, die ein ausgeprägtes Maximum im Gelb zeigte. In allen untersuchten Fällen treten also algebraische Maxima auf und erwies sich die Drehung der Magnetisierung proportional. Die Dispersion wurde dann von INGER-SOLL⁹⁾ in 's Ultrarote verfolgt; dieser Forscher findet die rotatorischen Gesamtcurven ähnlich einer gewöhnlichen Dispersioncurve in der Gegend eines äusserst breiten Absorptionsbereichs; insbesondere fand er für Nickel und Magnetit Nulldrehungen und hernach Zeichenwechsel zwischen λ und $1,5\mu$.

Der weitere Fortschritt auf diesem Gebiete wurde durch den

1) J. KERR, Phil. Mag. (5) 3 p. 339, 1877 & 5 p. 161, 1878.

2) P. C. KAZ, Proefschrift, Amsterdam 1884.

3) A. RIGHI, Ann. de Chim. et Phys. (6) 4 p. 433, 1885.

4) A. KUNDT, Wied. Ann. 23 p. 228, 1884; 27 p. 199, 1886.

5) R. SISSINGH, Arch. Néerl. (1) 27 p. 173, 1894.

6) P. ZEEMAN, Leiden Comm. no. 15, 1895; no. 29, 1896. Arch. Néerl. 27 p. 252, 1894.

7) A. RIGHI, Ann. de Chim. et Phys. (1) 9 p. 120, 1886.

8) H. DR BOIS, Wied. Ann. 39 p. 25, 1890.

9) L. R. INGER-SOLL, Phil. Mag. (6) 11 p. 41, 1906 & 18 p. 74, 1909.

Umstand gehemmt, dass die Anzahl ferromagnetischer Substanzen, an denen der KERR-Effekt studiert werden konnte, mit den vier oben aufgezählten bisher erschöpft war. Man suchte dagegen nach KUNDT's Vorgang verwandte magnetooptische Erscheinungen an halb durchsichtigen, elektrolytisch oder durch Kathodenzerstäubung hergestellten Schichten der Metalle gleichzeitig im reflektierten und im durchgehenden Lichte zu studieren. Obzwar neuere Untersuchungen ¹⁾ der optischen Eigenschaften solcher dünner Schichten ferromagnetischer Metalle wieder etwas verwirrende, wenn auch interessante Ergebnisse gezeitigt haben, so geht doch aus ihnen deutlich hervor, dass die Verhältnisse äusserst kompliziert und je nach der Struktur und der Herstellungsweise der Schicht recht verschieden sein können.

Eine reflektierende Fläche auf einer solchen Schicht ist jedenfalls physikalisch weniger gut definiert als eine spiegelnde massive Metallfläche. Es war daher von Interesse zu versuchen, ob die geringe Zahl von Körpern, auf die man beim Studium des KERR-Effektes angewiesen war, sich heutzutage nicht vergrössern liesse.

Einige Hoffnung erweckten in dieser Hinsicht die erfolgreichen Bemühungen mehrerer Chemiker ferromagnetische Substanzen künstlich darzustellen. Es kommen hier in erster Linie in Betracht die von HILPERT ²⁾ hergestellten Metaferrite, Verbindungen verschiedener Oxyde mit dem Eisenoxyd. In allen diesen, der chemischen Struktur nach dem Ferroferrit (Eisenoxyduloxyd) verwandten Verbindungen, fungiert das Eisenoxyd als saurer Bestandteil und erscheint dann als Träger ferromagnetischer Eigenschaften. Von diesen Verbindungen lassen sich jedoch bisher nur das Cupriferrit und das Calciumferrit in einem für meine Zwecke geeigneten Zustande herstellen. Zweitens bieten gewisse Legierungen mehr oder weniger ferromagnetischer Metalle Interesse, und zwar zunächst: die Legierungen des Systems Nickel-Eisen ³⁾, die bekannte ternäre HEUSLER'sche und die WEDEKIND'schen ⁴⁾ binären Manganlegierungen. Die magnetooptischen Eigenschaften dieser Legierungen sind — soviel mir bekannt ist — zum Teil wenig, zum Teil noch gar nicht untersucht worden. Es liegt nur eine russische Mitteilung von TOKMATSCHEW ⁵⁾ vor, der eine Versuchsreihe mit der HEUSLER'schen Legierung beschrieben hat, sowie

¹⁾ C. A. SKINNER & A. Q. TOOL, *Phil. Mag.* (6) **16** p. 833, 1908. H. BEHRENS Inaug. Diss. Münster i. W. 1908. L. R. INGERSOLL, loc. cit.

²⁾ S. HILPERT, *Ber. deutsch. Chem. Ges.* **42** p. 2248, 1909. *Verh. deutsch Phys. Ges.* **11** p. 293; 1909.

³⁾ CH. ED. GUILLAUME, *Les aciers au nickel*, Paris 1898.

⁴⁾ E. WEDEKIND, *Ztschr. f. phys. Chem.* **66** p. 614; 1909. K. HONDA, *Ann. d. Phys.* **32**, 1910.

⁵⁾ S. TOKMATSCHEW, *Journ. d. russ. phys.-chem. Ges.*, **42** (phys. T.) p. 15, 1910.

eine Beobachtung INGERSOLL's a. a. O. Ich habe einige der genannten Körper, sowie das altbekannte magnetische Chromoxyd magnetooptisch untersucht und möchte im folgenden über die vorläufig erzielten Ergebnisse berichten.

Versuchsordnung. Als Lichtquelle wurde ausschliesslich die Sonne benutzt. Das durch einen geradsichtigen lichtstarken Monochromator¹⁾ zerlegte, 1:4 divergierende Lichtbündel passierte (Fig. 1) eine Linse (L), ein total reflektierendes Prisma (P), eine LIPPICH'sche, aus zwei Nicols bestehende Halbshattenvorrichtung (N_1, N_2), fiel nahezu senkrecht auf den zwischen den Polen des Elektromagneten angebrachten Spiegel und wurde nach der Reflexion von einem Analysator (N_3) und einem vierfach vergrössernden Fernrohre aufgefangen. Die Dioptrik (Linsen, Grösse der Diaphragmen, lichte Weite und Oeffnungswinkel der konischen Bohrung des Polschuhs und Holms u. s. w.) war mit Rücksicht auf die Erhaltung eines möglichst hellen und gleichmässigen Gesichtsfeldes und die Vermeidung aller störenden Reflexe im voraus berechnet worden²⁾.

Die Beobachtungen wurden bei nahezu senkrechter Inzidenz ausgeführt. Nach RIGHI³⁾ ist bis zu 15° Inzidenz kaum eine Aenderung der Erscheinung wahrzunehmen. Die Hauptstrahlen des auffallenden und des reflektierten Lichtkegels bildeten indessen bei meiner Anordnung einen Winkel von nur 2° bis 3° . Das auffallende Licht war immer in der Einfallsebene horizontal polarisiert.

RIGHI hatte gefunden, dass auch bei normaler Inzidenz linear polarisierten Lichtes eine schwache Elliptizität der vom magnetisierten Spiegel reflektierten Schwingung wahrgenommen werden kann; ZEEMAN⁴⁾ hat auch später diese Elliptizität bei Eisen und Cobalt der Messung unterzogen. Ich sah mich in Anbetracht der Unvollkommenheit von manchen der benutzten Spiegel und der Kleinheit der zu messenden Drehungen genötigt, von der Untersuchung der etwa vorkommenden Elliptizität vorläufig abzusehen und mich auf die Bestimmung der Minimumdrehungen zu beschränken. Uebrigens war bei den besten Spiegeln und bei sorgfältiger Vermeidung diffusen Lichtes kein störender Einfluss solcher Nebeneffekte bemerkbar. Die wechselnde Auslöschung jeder Hälfte des Gesichtsfeldes war befriedigend, sodass Spuren von Elliptizität, wenn sie vorhanden sind,

1) H. DU BOIS, Verh. d. D. Phys. Ges. 11 p. 708, 1909.

2) Eine Beschreibung des zu diesem Aufbau benutzten Polarisators und Analysators findet sich bei H. DU BOIS, Wied. Ann. 46, p. 545, 1892.

3) A. RIGHI, Ann. de chim. et de phys. (1) 9 pp. 120, 132, 1886.

4) P. ZEEMAN, Leiden-Comm. No 15, 1895.

äußerst gering sein müssen. Wenn auch die auftretenden Drehungen manchmal sehr klein waren, so konnte man sie doch mit der Halbschattenmethode noch sicher feststellen und ziemlich genau messen. Ich glaubte daher von der Verwendung multipler Reflexionen absehen zu können weil diese andere Complicationen und Fehlerquellen mit sich bringen. Die Analysatorazimute wurden mittels besonders angebrachter Spiegel und verticaler Skala gemessen.

Das Feld wurde von einem kleinen *de Bois'schen* Halbringelektromagneten erzeugt, dessen Widerstand 9Ω betrug. Um die Kommutierung ohne Durchschlagsgefahr zu ermöglichen wurde jedesmal ein Nebenschluss von etwa 60Ω angelegt. Zur Bestimmung der Feldintensität bediente ich mich eines dünnen geeichten Glasetalons mit versilberter Hinterfläche. Das Etalon wurde dicht vor der Oberfläche des Spiegels angebracht und man mass die doppelte Drehung des zweimal durch das Glas hindurchgehenden Lichtes ($\lambda = 589 \mu\mu$). Auf Grund der von SIERTSEMA¹⁾ gemachten Angaben konnte man sich rechnerisch überzeugen, dass die drehende Wirkung der ganzen von dem Lichtstrahl hin und zurück passierten Luftschicht von keiner Bedeutung für die Messungsergebnisse sein konnte. Ein Versuch die Drehung in der Luft direct mit Hilfe eines Silberspiegels zu bestimmen zeigte auch dass dieselbe innerhalb der Fehlergrenzen liegt. Von einer diesbezüglichen Korrektur konnte daher abgesehen werden. Alle Messungen sind mit „polarer“ Magnetisierung und bei gewöhnlicher Temperatur ausgeführt worden.

Versuchsmaterial. Zur Untersuchung gelangten: *Cupriferrit* ($\text{CuO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$), *Calciumferrit* ($\text{CaO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$), *Magnetit* (Ferroferrit) ($\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$), *Titaneisen* (Ilmenit) ($\text{Ti}_2\text{O}_3 \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$), *Nickeleisen* („Invar“) (36 Ni , 64 Fe), und die *HEUSLER'sche Legierung* (26 Mn , 13 Al , 61 Cu). Die beiden ersten sind für mich von Herrn Dr. HILPERT im eisenhüttentechnischen Laboratorium der technischen Hochschule Charlottenburg in liebenswürdiger Weise hergestellt worden; der natürliche Magnetit befand sich in der Sammlung des Bosscha-Laboratoriums; es ist dieselbe polierte Octaëderfläche, die seinerzeit schon von *de Bois*²⁾ untersucht worden ist. Ein schön ausgebildeter Krystall des Ilmenits aus Miask (Ural) ist mir von Hrn. Geh. Rat Prof. Dr. LIEBISCH zur Verfügung gestellt worden. Die HEUSLER'sche Legierung ist von der chem. Fabrik DE HAËN in Seelze geliefert worden; das Metall war im Innern sehr blasig, konnte jedoch an der Oberfläche geschliffen und poliert werden und gab sehr gute Spiegel. Das „Invar“

1) L. H. SIERTSEMA, Versl. Kon. Akad. Wet. Amsterdam 7 p. 289, 1899.

2) H. DE BOIS, Wied. Ann. 39, p. 25, 1890.

Nickeleisen enthielt etwa 36 % Nickel und war französischer Herkunft (Société de Commentry-Fourchambault). Das Chromoxyd verdanke ich dem freundlichen Entgegenkommen des Hrn Dr. KOPPEL. Allen den genannten Herren, die mir bei der Beschaffung des Versuchsmaterials in freundlicher Weise behilflich waren spreche ich auch hier meinen wärmsten Dank aus.

Die im folgenden vorkommenden Bezeichnungen bedeuten: \mathfrak{H} Feldintensität, ausgedrückt in Kilogauss, \mathfrak{J} Magnetisierung, \mathfrak{J}_m ihr Sättigungswert, ε einfache Drehung, ausgedrückt in Bogenminuten, K , KERR'sche Constante. In den Tabellen enthält die mit N bezeichnete Verticalspalte die Anzahl der zu einer Serie gehörenden Ablesungen. Sie variiert je nach der Art des Spiegels und der veränderlichen Sonnenbeleuchtung. λ gibt die benutzte Wellenlänge in μ an; Δ die direct an der Skala in mm. abgelesene Doppeldrehung beim Kommutieren des Stromes. In der vierten Spalte sind die Mittelwerte der einfachen Drehungen enthalten, in der fünften und sechsten der in Minuten resp. procentual ausgedrückte mittlere Fehler.

Der Sinn der Drehung ist wie üblich auf denjenigen des Magnetisierungsstroms bezogen; danach ist z.B. die KERR'sche „polare“ Drehung beim Eisen negativ.

Versuchsergebnisse. Ich wende mich nunmehr zu den für die einzelnen Substanzen erhaltenen Resultaten:

1. *Cupriferrit*. Die Ergebnisse der an zwei Cupriferrit-Spiegeln ausgeführten Messungen der magnetischen Drehung in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge in einem Felde von 10,2 kgs. sind numerisch in Tab. 1, graphisch auf Fig. 2. wiedergegeben.

TAB. 1.

$\varepsilon = \text{Funct } (\lambda)$		Cupriferrit		$\mathfrak{H} = 10.25 \text{ Kgs.}$
N	(μ)	Δ (mm)	ε (Minuten)	ε
19	436	+ 8.3	+ 1.31'	$\pm 0.04' = 3.5\%$
48	477	+ 11.1	+ 1.75'	$\pm 0.05' = 3 \text{ "}$
53	539	+ 8.1	+ 1.28'	$\pm 0.04' = 3 \text{ "}$
40	574	+ 2.6	+ 0.41'	$\pm 0.02' = 6 \text{ "}$
52	599	- 2.3	- 0.36'	$\pm 0.03' = 8 \text{ "}$
45	637	- 6.0	- 0.95'	$\pm 0.01' = 1 \text{ "}$
51	688	- 4.9	- 0.78'	$\pm 0.03' = 4 \text{ "}$

Die Dispersioncurve bietet demnach im Vergleich mit anderen bekannten Substanzen einen bis jetzt im sichtbaren Gebiete noch nicht beobachteten Typus. Die im Violett *positive*, dann im Blau maximale Drehung nimmt mit wachsender Wellenlänge allmählich ab, geht in der Nähe von $587 \mu\mu$ durch den Nullpunkt, wird hernach für längere Wellen *negativ*, bildet zwischen 640 und $670 \mu\mu$ ein abgeflachtes Minimum und steigt dann wieder langsam empor. Die Drehungen sind gering; ihr Maximalwert beträgt nur $+ 1,75'$, lässt sich aber doch schon ziemlich genau messen. Der erwähnte Zeichenwechsel lässt sich den von INGERSOLL im Ultrarot festgestellten anreihen und bildet eine charakteristische und theoretisch wichtige Erscheinung.

Die Abhängigkeit der Drehung von der Feldintensität wurde auch untersucht und ergab das in der Tab. 2 und Fig. 3 enthaltene Resultat. Die Drehung wächst anfangs dem Felde proportional,

T A B. 2.

$\varepsilon = \text{funct } (\mathfrak{H})$		Cupriferrit		$\lambda = 477 \mu\mu$
N	\mathfrak{H} (kgs)	Δ (mm)	ε (Minuten)	$\delta\varepsilon$
40	0.93	+ 5.3	+ 0.85'	$\pm 0.02' = 2\%_{10}$
22	2.25	+ 8.4	+ 1.34'	$\pm 0.04' = 3 \text{ „}$
59	4.47	+ 9.7	+ 1.56'	$\pm 0.03' = 2 \text{ „}$
31	7.19	+ 10.2	+ 1.63'	$\pm 0.03' = 2 \text{ „}$
20	9.32	+ 10.4	+ 1.66'	$\pm 0.03' = 2 \text{ „}$
48	10.15	+ 11.1	+ 1.75'	$\pm 0.05' = 3 \text{ „}$

erreicht jedoch bald einen Maximalwert und bleibt dann fast unverändert. In Anbetracht der Form der Kurve $\varepsilon = \text{funct } (\mathfrak{H})$ und der von du Bois an Eisen, Cobalt und Nickel gesammelten Erfahrungen kann man mit grosser Wahrscheinlichkeit die Proportionalität zwischen ε und \mathfrak{H} behaupten. Betrachtet man diese als ausreichend gesichert so ist man imstande auf Grund der magnetooptischen Untersuchung allein die Grössenordnung bezw. eine untere Grenze für die maximale Magnetisierung festzustellen. Nach du Bois¹⁾ ergibt nämlich im Falle einer unbegrenzten homogenen Platte, deren Magnetisierung gleichförmig nach der Normalen erfolgt, die Abscisse des Schnitt-

¹⁾ H. du Bois, Wied. Ann. 31 p 965, 1887; Phil. Mag. (5) 29 p. 301, 1890.

punktes der Geraden $\varepsilon = K\lambda = K\lambda_0 \frac{1}{\lambda}$ und der Asymptote $\varepsilon = const.$ ohne weiteres den Wert $\frac{1}{\lambda} \lambda_m$.

Demnach wäre für Cupriferrit $\lambda_m \geq 140$ C.G.S. Der kleine Anstieg des oberen Teiles der auf Fig. 3 wiedergegebenen Curve ist wohl dadurch zu erklären, dass den Bedingungen jenes idealen Falles mit Stücken von unregelmässiger Gestalt nur angenähert entsprochen werden kann; die tatsächlich unvermeidlichen Abweichungen dürften aber den scheinbaren Wert von λ_m alle herabdrücken, so dass man eine untere Grenze misst; insbesondere würden Risse, Poren und Verunreinigungen einen solchen Einfluss ausüben.

T A B. 3.

$\varepsilon = \text{Funct } (\lambda)$		Magnetit	$\lambda_0 = 11.56 \text{ Kgs}$	
N	$\lambda (\mu\mu)$	$\lambda_c (\text{mm})$	$\varepsilon (\text{Minuten})$	$\delta\varepsilon$
30	436	- 24.0	- 3.81'	$\pm 0.03' = 0.9\%$
25	442	- 19.9	- 3.15'	$\pm 0.05' = 1.5$ „
15	453	- 9.6	- 1.52'	$\pm 0.03' = 2$ „
20	464	0	0	—
40	477	+ 6.7	+ 1.06'	$\pm 0.03' = 2$ „
26	510	+ 19.4	+ 3.07'	$\pm 0.02' = 0.6$ „
25	539	+ 24.3	+ 3.84'	$\pm 0.02' = 0.5$ „
30	574	+ 28.2	+ 4.45'	$\pm 0.02' = 0.4$ „
30	599	+ 24.9	+ 3.94'	$\pm 0.02' = 0.5$ „
31	637	+ 21.0	+ 3.32'	$\pm 0.04' = 1$ „
30	688	+ 16.0	+ 2.50'	$\pm 0.07' = 3$ „

2. *Magnetit.* Die Dispersion des KERR-Effektes ist in der Tab. 3 und auf der Fig. 4 (ausgezogene Curve) wiedergegeben. Vergleicht man letztere mit den seiner Zeit von du Bois an demselben Präparat (natürliche Octaëderfläche eines holoëdrisch regulären Krystalls) erhaltenen Werten (punktierte Curve) so findet man folgendes: Abgesehen von einer Verschiebung der ganzen Wellenlängenskala um etwa 10 bis 30 $\mu\mu$ — die wohl durch die primitive Methode der spektralen Zerlegung, auf die du Bois vor 20 Jahren angewiesen war, erklärlich ist — stimmen die beiden Curven in dem Spektralbereiche zwischen 486 und 671 $\mu\mu$ gut überein. Die im Gelb durch ein Maximum + 4.45' gehende Curve fällt mit abnehmender Wellenlänge steil

herunter. Du Bois¹⁾, welcher der Lichtschwäche wegen nicht weiter als im Blau messen konnte, beobachtete dass die Drehung im Violett zu schwinden schien und hat auch schon die Vermutung ausgesprochen dass sie im Ultraviolett ihren Sinn ändern würde. In der Tat lässt sich dieser Umkehrpunkt schon im sichtbaren Teile des violetten Spektrums bei $464 \mu\mu$ feststellen. Für noch kleinere Wellen wird die Drehung ziemlich stark *negativ* und scheint dann einem Minimum zuzustreben. Der Lichtschwäche wegen war es mir leider unmöglich mit noch kürzeren Wellenlängen als $436 \mu\mu$ zu arbeiten; ich hoffe jedoch später auf photographischem Wege die Curve noch weiter verfolgen zu können.

Jedenfalls genügt das vorhandene Beobachtungsmaterial um festzustellen, dass in der Dispersion des KERR-Effektes beim Magnetit ($\text{FeO} \cdot \text{F}_2\text{O}_3$) im natürlichen krystallisirten Zustande derselbe Typus zum Vorschein kommt, der auch beim künstlichen Cupriferrit ($\text{CuO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$) im vorigen festgestellt wurde. Ohne vorläufig auf die theoretische Bedeutung dieses Tatbestandes eingehen zu wollen möchte ich nur hervorheben, dass die Dispersioncurve des KERR-Phänomens in beiden Fällen ein Maximum, einen Nullpunkt und wahrscheinlich auch in beiden Fällen ein Minimum aufweist. Es sind Versuche im Gange um festzustellen ob und wie dieser Verlauf mit den optischen Konstanten der untersuchten Körper zusammenhängt, bezw. zu der gewöhnlichen Absorptions- und Dispersioncurve in Beziehung steht.

Aehnlich wie bei Cupriferrit wurde auch hier die Abhängigkeit der Drehung vom magnetischen Felde untersucht. Das Resultat ist in Tab. 4 und Fig. 5 enthalten.

T A B. 4.

$\varepsilon = \text{funct } (\delta)$		Magnetit		$\lambda = 574 \mu\mu$
N	δ (Kgs)	Δ (mm)	ε (Minuten)	$\partial\varepsilon$
15	2.10	+ 12.9	+ 2.07'	$\pm 0.04' = 2 \text{ } \frac{0}{10}$
15	3.40	+ 21.3	+ 3.37'	$\pm 0.05' = 1.5 \text{ } "$
15	5.87	+ 28.7	+ 4.54'	$\pm 0.07' = 1.5 \text{ } "$
15	8.87	+ 28.0	+ 4.43'	$\pm 0.05' = 1 \text{ } "$
15	10.82	+ 28.9	+ 4.57'	$\pm 0.06' = 1 \text{ } "$
30	11.56	+ 28.2	+ 4.45'	$\pm 0.02' = 0.4 \text{ } "$

¹⁾ H. du Bois a. a. O. p. 38.

Es ergibt sich $\mathfrak{J}_m \geq 358$ C. G. S., was mit der entsprechenden Angabe von DU BOIS ¹⁾ übereinstimmt (350).

Die magnetischen Eigenschaften der Magnetitkrystalle sind unlängst von QUITNER nach dem Vorgange von WEISS ²⁾ systematisch untersucht worden. Aus den ausgeführten Messungen folgt für die hier allein in Betracht kommende, dem Felde parallele Componente der Magnetisierung ein Sättigungswert von etwa 475 C. G. S. Auf diese Discrepanz wird später noch zurückzukommen sein; namentlich ist zu bemerken dass natürliche Magnetite von der schematischen Formel ($\text{FeO}, \text{Fe}_2\text{O}_3$) zuweilen etwas abweichen und der Einfluss hiervon sich schwerlich übersehen lässt.

3. *Andere ferromagnetische Verbindungen.* Die Analogie der Dispersion, welche in so ausgeprägter Form an dem der chemischen Struktur nach nahe verwandten Cupri- und Ferroferrit im Gegensatz zu Eisen, Cobalt und Nickel zum Vorschein getreten ist, legte es nahe auch andere ferromagnetische Ferrite und Oxyde in den Bereich der Untersuchung zu ziehen. In dieser Hinsicht war in erster Linie das *Calciumferrit* von Interesse. Das Material ist nur schwach magnetisch und sehr brüchig. Ein kleines ausgesuchtes Stück wurde in leicht schmelzbare Wood'sche Legierung eingefasst und poliert. An einem ausreichend guten Spiegel konnte jedoch kein KERR-effekt wahrgenommen werden. Er ist, sofern er überhaupt existiert jedenfalls kleiner als 0,35'. Ebenso wenig konnte ich bei *Ilmenit* ³⁾ die Drehung feststellen. Das Licht wurde sowohl an einer Basisfläche des Krystalls, wie auch an einer, der Hauptaxe parallelen Ebene reflectiert. In keinem der beiden Fälle konnte eine Drehung festgestellt werden. ($< 0,3'$). Auch bei dem zweifellos ferromagnetischen Chromoxyd Cr_2O_3 war es unmöglich eine Drehung nachzuweisen. Von Legierungen wurden folgende untersucht:

4. *Nickelisen* mit 36% Nickel, auch „Invar“ genannt, hat bekanntlich einen unmerklich kleinen Ausdehnungskoeffizienten, ist stark magnetisch und zeigt deutlich den KERR-Effekt. Die Drehung erfolgt im ganzen untersuchten Spektralbezirke im *negativen* Sinn und ändert sich nur wenig mit der Wellenlänge (Tab. 5, Fig. 6).

1) H. du Bois, Phil. Mag. (5) 29, p. 301, 1890.

2) P. WEISS, Journ. de Phys. (3) 5 p. 435, 1896; (4) 9, 1910. V. QUITNER, Dissertation, Zürich, 1908.

3) Vgl. B. BAVINK, Magn. Influenz in Krystallen; Göttinger Dissert. 1904.

T A B. 5.

$\varepsilon = \text{Funct}(\lambda)$		„Invar“		$\lambda = 13.30 \text{ Kgs.}$
N	$\lambda (\mu\mu)$	$\Delta (\text{mm})$	$\varepsilon (\text{Minuten})$	$\partial\varepsilon$
15	436	- 74.4	- 11.78'	$\pm 0.05' = 0.4\%$
15	477	- 78.8	- 12.48'	$\pm 0.06' = 0.5 \text{ „}$
15	539	- 83.5	- 13.22'	$\pm 0.06' = 0.4 \text{ „}$
20	574	- 86.3	- 13.66'	$\pm 0.03' = 0.2 \text{ „}$
15	599	- 86.8	- 13.74'	$\pm 0.05' = 0.3 \text{ „}$
15	637	- 86.7	- 13.72'	$\pm 0.07' = 0.5 \text{ „}$
15	688	- 86.2	- 13.54'	$\pm 0.06' = 0.4 \text{ „}$

T A B. 6.

$\varepsilon = \text{funct}(\lambda)$		„Invar“		$\lambda = 574 \mu\mu$
N	$\lambda (\text{kgs})$	$\Delta (\text{mm})$	$\varepsilon (\text{Minuten})$	$\partial\varepsilon$
31	0.54	- 6.5	- 1.02'	$\pm 0.02' = 2 \text{ ‰}$
15	1.80	-23.2	- 3.67'	$\pm 0.02' = 0.5 \text{ „}$
15	3.20	-39.0	- 6.17'	$\pm 0.03' = 0.5 \text{ „}$
15	6.32	-69.7	-11.03'	$\pm 0.05' = 0.4 \text{ „}$
15	10.37	-84.5	-13.36'	$\pm 0.03' = 0.2 \text{ „}$
15	12.60	-86.6	-13.71'	$\pm 0.02' = 0.1 \text{ „}$
20	13.30	-86.3	-13.66'	$\pm 0.03' = 0.2 \text{ „}$
15	14.51	-86.2	-13.65'	$\pm 0.03' = 0.2 \text{ „}$

Die Dispersioncurve, die tief unter der Nulllinie verläuft, nimmt mit wachsender Wellenlänge etwas zu, erreicht ein flaches numerisches Maximum im Orange um sich dann nur wenig zu heben. Die Aenderung der Drehung mit der Feldintensität zeigt wieder deutlich ihre Proportionalität zur Magnetisierung und ergibt $\lambda_m \geq 530$ (Tab. 6, Fig. 7).

Interessant ist es das magnetooptische Verhalten des fast unmagnetischen Vertreters des Systems Nickel-Eisen, welcher 25% Nickel enthält, kennen zu lernen. Diese Messungen sollen demnächst ausgeführt werden.

5. *Metall-Legierung nach HEUSLER*; setzt sich angeblich aus 61% Cu, 26% Mn und 13% Al zusammen und ist sterk magnetisch. Zwei gut polierte Spiegel sind an mehreren Stellen und in verschiedenen Teilen des Spektrums sorgfältig untersucht worden, erwiesen sich aber als magnetooptisch unwirksam. Der KERR-Effekt kann demnach nur weniger als 0,3' betragen. Unlängst ist eine Mitteilung von TOKMATSCHEW über ähnliche Versuche mit der HEUSLER'schen Legierung N°. 32 (58,9 Cu, 26,5 Mn, 14,6 Al) a. a. O. veröffentlicht worden, in welcher der Verfasser theoretisch die Wahrscheinlichkeit eines messbaren Effektes in der Nähe von 450μ erschliessen zu können glaubt. Ich habe mit dieser Wellenlänge eine Reihe von Ablesungen angestellt, die aber keine Drehung zu erkennen gestatten. Auch INGERSOLL fand a. a. O. weder im sichtbaren noch im ultraroten Spektrum einen merklichen Effekt.

Auf die Diskussion der theoretischen Bedeutung der oben dargelegten teils positiven, teils negativen Versuchsergebnisse will ich vorläufig noch nicht eingehen, da weitere Versuche vorbereitet werden und die Ermittlung der rein optischen Eigenschaften der untersuchten Substanzen sich anderweit schon im Gange befindet.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan.

„Over de verklaring van spectroheliogrammen en lijnverplaatsingen, en over anomale verstrooiing van het licht.

De verlegenheid waarin men ten opzichte van zonnevraagstukken nog steeds verkeert komt duidelijk uit in het feit, dat de beelden verkregen met den spectroheliograaf aanleiding geven tot zeer uiteenloopende verklaringen, zoodat het voor 't oogenblik onmogelijk schijnt, zelfs deze éérste vraag op bevredigende wijze te beantwoorden: wat is de voornaamste oorzaak van de hoogst ongelijkmatige verdeling van verschillende lichtsoorten over de zonneschijf?

Door HALE en ELLERMAN wordt, in een verhandeling „On the nature of the hydrogen flocculi and their structure at different levels in the solar atmosphere”¹⁾ verworpen de hypothese van W. J. S. LOCKYER, dat de donkere waterstof flocculi plaatsen zouden aanduiden, waar waterstof in mindere hoeveelheid aanwezig is. Zij weerleggen ook de redeneering van DESLANDRES, volgens welke die donkere flocculi niet in hoofdzaak toe te schrijven zijn aan een eigenaardige verdeling van het uitstralend en absorbeërend vermogen der water-

¹⁾ HALE and ELLERMAN, Proc. Roy. Soc. 83, 177, January 1910.

stof, maar aan een instrumenteele oorzaak, aan een gebrek, eigen aan den spectroheliograaf. Naar hunne meening is het beste middel om de waargenomen verschijnselen te begrijpen, gelegen in de hypothese, dat de donkere flocculi ontstaan door sterkere absorptie (waarschijnlijk het gevolg van grootere diepte en lagere temperatuur van de waterstofmassa's in die deelen van de zonneatmosfeer), terwijl de heldere flocculi dan plaatsen zouden aanwijzen van grooter stralend vermogen. Ten slotte verklaren HALE en ELLERMAN, dat de uitkomsten die zij bij sterke dispersie verkregen hebben met de waterstoflijnen, ook in overeenstemming zijn met zekere gevolgtrekkingen die door mij werden afgeleid ¹⁾ uit de hypothese, het eerst in 1904 uitgesproken ²⁾, dat de lichtverdeling in fotografieën, gemaakt met den spectroheliograaf, hoofdzakelijk veroorzaakt wordt door anomale dispersie. Zij wenschen een algemeen onderzoek naar de uitwerking van anomale lichtbreking in de zonne-atmosfeer uit te stellen totdat veel meer waarnemingen zijn gedaan; maar een voorloopig overzicht van de reeds verkregen resultaten doet hen overhellen tot de meening, dat de voornaamste verschijnselen van de donkere waterstof flocculi op meer bevredigende wijze kunnen worden verklaard als gevolgen van absorptie, en dat het geheel van gegevens moeilijk als gunstig voor mijn theorie kan worden beschouwd.

In deze mededeeling wensch ik niet de absorptie-hypothese van HALE en ELLERMAN te bestrijden, maar slechts aan te toonen dat hunne bezwaren tegen een verklaring uit de wetten van anomale dispersie ongegrond zijn, en dat de tot nu toe verkregen resultaten in geen deele minder gunstig zijn voor de theorie die de flocculi in hoofdzaak aan anomale dispersie toeschrijft, dan voor die welke daarin slechts absorptie-effecten ziet.

De sterkte en de breedte der waterstoflijnen, vooral van H_{α} , verschillen aanmerkelijk voor verschillende plaatsen der zon. Indien de verbreding van deze lijnen het gevolg is van sterkere absorptie, zonder meer, is er geen reden om te verwachten dat zij asymmetrisch zullen zijn (behalve misschien wegens plaatselijke verschuivingen tengevolge van beweging in de gezichtslijn). Hebben we daarentegen hoofdzakelijk te doen met dispersiebanden ³⁾, die de eigenlijke absorptielijnen omhullen, zoodat de verbreding komt doordien de sterk gebroken golven uit de naaste omgeving der centrale lijnen gemid-

¹⁾ JULIUS, Spectroheliographisch onderzoek van verschijnselen, veroorzaakt door anomale refractie. Versl. Natuurk. Afd. XVII, p. 193. (1908).

²⁾ JULIUS, De zonnebeelden met den spectroheliograaf verkregen, en de anomale dispersie. Versl. Natuurk. Afd. XIII, p. 138. (1904).

³⁾ Versl. Natuurk. Afd. XIII, p. 26 (1904) en XV, p. 317 (1906).

deld afkomstig zijn uit minder sterk lichtende streken — dan schijnt het op den eersten blik alsof men in het algemeen een duidelijke en veranderlijke asymmetrie zal moeten waarnemen. Immers vergelijken wij met elkander de voortplantingsrichtingen van golven die op gelijke afstanden van de centrale lijn aan haar rooden en haar violetten kant gelegen zijn, dan zal blijken dat dezelfde dichtheidsgradiënten in de zonneatmosfeer zulke stralen in tegengestelde richtingen doen afwijken. HALE en ELLERMAN houden het voor onwaarschijnlijk, dat in beide gevallen gelijke hoeveelheden licht den waarnemer zouden bereiken, en besluiten daarom dat, als anomale dispersie de hoofdoorzaak was, de spectroheliograaf in den regel zeer verschillende beelden geven moest wanneer de camera-spleet op de eene dan wel op de andere zijde van dezelfde lijn werd ingesteld.

Zij fotografeerden de floeculi nu inderdaad met licht van de beide kanten van de H_{α} lijn, op gelijke afstanden van haar midden. De twee beelden bleken, wat hun hoofdtrekken betreft, nagenoeg volmaakt eender te zijn, hoewel in de bijzonderheden dikwijls kleine verschillen zichtbaar waren. In de gevallen die zij als „eruptieve verschijnselen” aanduiden, waren de beelden zeer ongelijk, zooals trouwens de vervormingen van de H_{α} lijn zouden doen verwachten. Het spreekt van zelf dat, indien zulke vervormingen bevredigend verklaard kunnen worden op grond van het beginsel van DOPPLER, men ook een overeenkomstige verklaring kan geven van de ongelijkheden in de genoemde beelden.

Zoo ongeveer luiden de overwegingen, door HALE en ELLERMAN aangevoerd tot steun van hun bewering, dat de tot op dit oogenblik verkregen uitkomsten ongunstig zijn voor de anomale dispersie theorie.

Wanneer wij echter de zaak wat nauwkeuriger beschouwen, blijkt het dat de gevolgtrekkingen uit het beginsel der anomale dispersie geheel in overeenstemming zijn met de waargenomen verschijnselen. Het is namelijk juist zeer waarschijnlijk dat R-licht en V-licht ¹⁾, gekozen op gelijke afstanden van H_{α} , ondanks de tegengestelde kromming die hunne stralen ondergaan, beelden opleveren die wat de hoofdtrekken betreft in den regel nauwelijks van elkander te onderscheiden zijn, en dat afwijkingen in kleine onderdeelen zich vooral daar vertoonen, waar sterke storingen, met steile dichtheidsgradiënten, worden aangetroffen.

In eene mededeeling over „Regelmatige gevolgen van onregelmatige

¹⁾ Door R-licht en V-licht zullen wij aanduiden golven aan den rooden en den violetten kant van absorptielijnen, binnen de grenzen waar anomale dispersie nog merkbaar is.

straalbreking in de zon¹⁾) poogde ik een algemeen denkbeeld te vormen van het optisch effect dat moet worden teweeggebracht door plaatselijke verdichtingen en verijlingen in de zonneatmosfeer, uitsluitend als gevolg van de kromming der lichtstralen²⁾. Daarbij bleek het volgende.

Beschouwen wij eerst een lichtsoort, waarvoor het lichtbrekend vermogen ($R \Delta = n - 1$) van de zonneatmosfeer een zekere *positieve* waarde bezit. Wij stellen ons nu, ergens op het middelste deel van de schijf, in het gasvormig omhulsel der zon een gebied van willekeurigen vorm voor, slechts voldoende aan de voorwaarde, dat daarin de dichtheid van de gassen van den omtrek naar binnen geleidelijk of afneemt, of toeneemt, zoodat het gebied hetzij een minimum, hetzij een maximum van dichtheid omsluit. In beide gevallen zal het gebied donker omgrensd schijnen. Wanneer in die twee gevallen tevens de dichtheidsgradienten, hoewel tegengesteld van teeken, gelijk van grootte waren, zou het optisch effect, teweeggebracht door de verijling en door de verdichting, in hoofdtrekken nagenoeg identiek zijn. Dit komt doordien het licht, dat het beschouwde gebied doordrongen heeft, uitging van een bron die beschouwd kan worden als ongeveer symmetrisch rondom de gezichtslijn zich uitstreckende. Zoodra de laatstgenoemde voorwaarde niet vervuld is, indien bijv. sommige van de stralen, alvorens dat gebied binnen te dringen, reeds sterke afwijking hadden ondergaan in een naburigen steilen dichtheidsgradient, dan zou de symmetrie van de schijnbare lichtbron gestoord zijn, en de aanblik van de verijling merkbaar kunnen verschillen van dien eener verdichting van gelijke afmetingen.

Beschouwen wij in de tweede plaats een lichtsoort waarvoor het brekend vermogen der zonneatmosfeer evengroot, doch *negatief* is. Zulke golven gedragen zich in een verijling juist zooals de straks beschouwde zich zouden gedragen in de verdichting die men verkrijgt door de gradienten om te keeren. De optische uitwerking is, wat de hoofdtrekken betreft, dezelfde.

¹⁾ Versl. Natuurk. Afd. XVIII, blz. 181, (1909).

²⁾ Natuurlijk heeft het nimmer in mijn bedoeling gelegen, noch in het laatst aangehaalde stuk, noch in vroegere publicaties over anomale dispersie, te ontkennen dat selectieve straling, absorptie, verstrooiing, beweging in de gezichtslijn, drukking, magnetisme, radio-activiteit, medewerken aan de voortbrenging der zonneverschijnselen; maar omdat in de literatuur over de zon aan de meeste van de genoemde onderwerpen in den regel behoorlijk aandacht geschonken wordt, doch in veel mindere mate aan lichtbreking en anomale dispersie, wenschte ik die laatste invloeden afzonderlijk te behandelen en hun groote beteekenis in het licht te stellen. — Mijn doel was dus niet, een theorie van de zon op te stellen, maar de kosmische gevolgen der anomale dispersie te bestudeeren.

Wanneer wij derhalve onze aandacht bepalen tot de middelste deelen der schijf, en sterk gestoorde gebieden buiten beschouwing laten, moeten wij verwachten slechts weinig verschil te vinden tusschen spectroheliographische beelden, verkregen met R-licht en V-licht dat op geschikte afstanden ter weerszijden van een absorptielijn gekozen is.

HALE en ELLERMAN geven toe dat de kleine verschillen, die men dikwijls waarneemt bij het vergelijken van beelden, door tegen-gestelde kanten van H_{α} gegeven, misschien aan anomale dispersie zijn toe te schrijven; ik zie niet in waarom hetzelfde beginsel buiten werking zou blijven in de overige deelen der zon, waarvan die beide beelden nagenoeg aan elkander gelijk zijn.

Maar wanneer wij den rand der zon naderen, veranderen de omstandigheden der lichtbreking.

Worden een gebied met een minimum en een gebied met een maximum van dichtheid waargenomen op voldoende afstand van het midden der schijf, dan vertoonen zij zich verschillend. In R-licht is de verijling *donker* aan den kant die van 't midden der schijf is *afgewend*, en kan zij *helderder* zijn dan de omgeving aan den kant die naar het midden is *toegekeerd*, terwijl daarentegen de verdichting *donker* is aan den *toegekeerden*, en *helder* kan zijn aan den *afgewenden* kant. In V-licht is het juist andersom¹⁾. Wij hebben dus reden om te verwachten dat er tusschen spectroheliogrammen, genomen met licht van den rooden en van den violetten kant eener lijn, zekere stelselmatige verschillen in de détails zullen worden waargenomen, die toenemen als wij den zommerand naderen, en die meer de verdeling der helderheid zullen betreffen, dan het gemiddeld uiterlijk der structuur.

Het zal echter blijken dat wij deze laatste verwachting eenigszins moeten wijzigen, omdat er een physische wet is die wij tot nu toe buiten beschouwing lieten, en die de zoeven genoemde verschillen gedeeltelijk uitwischt, zoodat daardoor de gelijkheid van corresponderende R-licht en V-licht beelden over de geheele zonnenschijf bevorderd wordt. Ik bedoel het door RAYLEIGH ontdekte feit, dat het licht *verstrooid* wordt door de moleculen van een doorlatende middenstof.

Hoe de aard van de totale straling welke een sterre-atmosfeer doorlaat, van verstrooiing afhankelijk is, werd het eerst onderzocht door SCHUSTER, in een belangrijke verhandeling: „Radiation through a foggy atmosphere”²⁾. Het zou ons thans te ver voeren, de merk-

¹⁾ Versl. Natuurk. Afd. XVIII, blz. 191. 1909.

²⁾ SCHUSTER, Astroph. Journ. 21, 1—22, 1905.

waardige uitkomsten die daar worden vermeld in verband te brengen met onze gevolgtrekkingen uit de theorie der anomale dispersie; maar er is één punt waaraan wij bijzondere aandacht moeten schenken, omdat het van groote beteekenis kan zijn voor de verklaring van spectroheliogrammen, namelijk het feit dat verstrooiing een *selectief* proces is. Op deze eigenaardigheid wijst SCHUSTER ter loops (zie p. 17 van zijn aangehaalde verhandeling), doch hij maakt daaruit geen gevolgtrekkingen.

Volgens de formule van RAYLEIGH hangt de verstrooiings-coëfficiënt (die in 't stuk van SCHUSTER *s* genoemd wordt) af niet alleen van het aantal (*N*) verstrooiende deeltjes per volume-eenheid en van de golflengte (*λ*) der beschouwde lichtsoort, maar ook van den brekings-index (*n*) der middenstof:

$$s = \frac{32\pi^3(n-1)^2}{3N\lambda^4} \dots \dots \dots (1)$$

De termen „anomale dispersie” en „anomale refractie” heb ik in vroegere mededeelingen wel eens door elkander gebruikt. In het vervolg zal ik onderscheid maken tusschen die twee uitdrukkingen. Onder anomale dispersie zullen wij verstaan de algemeene eigenschap der stof, dat haar brekend vermogen $\pm (n-1)$ snel verandert als wij een absorptielijn naderen. Deze eigenschap bestaat natuurlijk ook wanneer de dichtheid van het medium overal dezelfde is, en dus het licht zich daarin rechtlijnig voortplant. Maar is de dichtheid veranderlijk van plaats tot plaats, dan kan de anomale dispersie ten gevolge hebben dat naburige golven uit het spectrum zich in zeer verschillende richtingen gaan voortplanten. Dit gevolg — het eenige dat in vroegere verhandelingen over het onderwerp door mij bestudeerd werd ¹⁾ — zullen we voortaan *anomale refractie* noemen. Een andere uiting van dezelfde eigenschap, die wij nu voor het eerst in aanmerking gaan nemen, is *anomale verstrooiing*.

De vergelijking (1) doet zien dat de verstrooiingscoëfficiënt een scherp maximum doorloopt in de nabijheid van elke waarde van *λ* die aan een absorptielijn beantwoordt, omdat daar de factor $(n-1)^2$

1) Veel dank ben ik verschuldigd aan collega LORENTZ, die onlangs wel heeft willen voldoen aan mijn verzoek, om op hetgeen ik tot nu toe over de gevolgen van anomale dispersie had gepubliceerd, gestrenge kritiek toe te passen. Naar zijn oordeel was de zwakke zijde van mijn bewijsvoering gelegen in het feit, dat ik niet de noodige aandacht had geschonken aan de verzwakking die het licht ondergaat door verstrooiing. Van deze belangrijke opmerking hoop ik bij de verdere studie van het onderwerp vollediger partij te trekken. Het nieuwe licht dat daardoor op het vraagstuk der anomale dispersie valt, zal zekere wijzigingen in vroegere conclusies noodig maken, en zoo wellicht tegengestelde opvattingen dienaangaande nader tot elkander kunnen brengen.

snel toeneemt als wij de lijn van den eenen of van den anderen kant naderen. *Zeer* dicht bij een absorptielijn van een gasmengsel is misschien de formule van RAYLEIGH niet volmaakt streng toepasselijk, maar als eerste benadering mogen we haar stellig geldig achten.

Zelfs absoluut monochromatische absorptie zou aldus, in een uitgestrekte atmosfeer, door verstrooiing een lijn van eindige breedte doen ontstaan. Wordt een groep van naburige golven geabsorbeerd, dan zal derhalve de donkere lijn steeds breder zijn dan het spectraalgebied waar werkelijke absorptie plaats vindt. Iedere absorptielijn van een sterre-atmosfeer is dus gehuld in een duistereren band, dien wij *dispersieband* mogen noemen, omdat anomale dispersie tot het verschijnsel aanleiding geeft. In een atmosfeer van overal gelijke dichtheid zou de dispersieband uitsluitend aan anomale *verstrooiing* te danken zijn; maar wanneer er onregelmatige dichtheidsgradienten in voorkomen, draagt anomale *refractie* bij tot het effect, en wel op twee wijzen: 1°. door sommige van de sterk gebroken stralen naar het lichtend oppervlak te doen terugkeeren ¹⁾, en 2°. door de wegen, langs welke de stralen onderhevig zijn aan lichtverlies door het verstrooiingsproces, langer te maken.

Deze voorstellingen zullen nog aan duidelijkheid winnen, wanneer wij ons verbeelden zelf ergens in de zonneatmosfeer geplaatst te zijn en daar het uitspannel te beschouwen. De spectroscop zou ons dan een betrekkelijk zwak continu spectrum doen zien, waarop zich de Fraunhofersche lijnen als heldere lijnen afteekenen, niet alleen tengevolge van luminescentie of van selectieve temperatuur-straling, maar ook omdat de *verstrooiing* sterker is voor lichtsoorten uit de omgeving der absorptielijnen, dan voor licht uit lijnvrije deelen van het spectrum. De energie die aldus door het verstrooiingsproces naar de zon terugkeert, ontbreekt in het Fraunhofersche spectrum zooals dat op aarde gezien wordt. Bovendien zouden de onregelmatige dichtheidsgradienten van de zonneatmosfeer aldaar aanleiding geven tot „lichtspiegeling” op groote schaal, en ook van selectieven aard. Verwrongen beelden van deelen der fotosfeer zouden zich allerwege aan het uitspannel vertoonen, in gedaante en in afmeting verschillend voor lichtsoorten die in verschillende mate gebroken worden. Dit is de bijdrage die anomale *refractie* levert tot de terugkeerende stralingsenergie, en dus onttrekt aan de totale straling welke de zon verlaat.

Willen wij onze denkbeelden aangaande de vereenigde uitwerking van anomale verstrooiing en refractie toepassen ter verklaring van uitkomsten met den spectroheliograaf verkregen, dan moeten we dus in 't oog houden:

¹⁾ Zie: Versl. Natuurk. Afv. XVIII, blz. 195, 1909.

1°. dat anomale verstrooiing nagenoeg gelijke lichtverzwakking teweegbrengt aan de beide kanten van een sterke absorptielijn ¹⁾, en daardoor de verschillen tusschen zonnebeelden, met R-licht en met V-licht van gelijke breekbaarheid verkregen, geringer doet schijnen dan zij zich zouden vertoonen wanneer alléén anomale refractie in het spel was ;

2°. dat de breedte eener bepaalde Fraunhofersche lijn zoo gering mogelijk zou zijn op die plaatsen van 't zonnebeeld, welke beantwoorden aan gebieden waar de zonneatmosfeer gelijkmatig van dichtheid en samenstelling ware, omdat dáár anomale verstrooiing de eenige oorzaak van den dispersieband zou zijn ;

3°. dat dezelfde lijn breeder, en in 't algemeen donkerder, zijn zal in het spectrum van gebieden waar onregelmatige gradiënten de rechtlijnige voortplanting van het licht storen. (Hierin zien wij de oorzaak van de wisselende breedte van H_γ zooals die te zien is in Fig. 2 op plaat I, Proc. Roy. Soc. Vol. 83, p. 189. Wanneer dus de camera-spleet van den spectroheliograaf bijvoorbeeld ingesteld wordt ergens tusschen het midden en den rand van H_α , maar dicht bij den rand dier lijn, wijzen de donkere flocculi plaatsen aan, waar dichtheidsgradiënten met groote componenten loodrecht op de gezichtslijn sterk vertegenwoordigd zijn. Nagenoeg dezelfde structuur moet zich vertoonen als men de camera-spleet op H_β of H_γ instelt, mits haar afstand tot het midden dier lijnen kleiner genomen worde dan bij H_α , teneinde golven op te vangen die in dezelfde mate gebroken worden als in 't eerste geval. Dit verband tusschen beelden, met verschillende waterstofflijnen verkregen, was door mij voorspeld in 1908, Versl. Natuurk. Afd. XVII, p. 202, en werd later door HALE en ELLERMAN inderdaad aangetroffen) ; ²⁾

4°. dat gradienten van buitengewone grootte en uitgestrektheid zeer merkbare onregelmatigheden in de lichtverdeling binnen de grenzen van een dispersieband kunnen veroorzaken ;

5°. dat de samenstelling van de zonneatmosfeer hoogstwaarschijnlijk verandert met het niveau, maar dat convectiestroomen voortdurend vereffenend werken op plaatselijke verschillen van samenstelling zoo-wel als van temperatuur.

Als dit alles wel overwogen wordt, blijkt het mogelijk te zijn, op

1) Aanstonds zal ter sprake komen, dat vooral zwakkere Fraunhofersche lijnen door anomale dispersie asymmetrisch zijn. Zoolang spectroheliogrammen alleen gemaakt worden met licht uit het gebied van sterke lijnen, behoeven wij bij hunne interpretatie nog geen rekening te houden met de bedoelde asymmetrie.

2) Het optisch effect dat de stelselmatig geördende dichtheidsgradiënten in de omgeving van vortices teweegbrengen, eischt afzonderlijke behandeling.

grond van anomale dispersie minstens evenvele bijzonderheden van de spectroheliogrammen te verklaren, als HALE en ELLERMAN verklaard hebben, uitgaande van hunne temperatuur- en absorptie-hypothese. Wij willen thans niet de voordeelen van die beide gezichtspunten tegen elkander gaan afwegen, daar het hoofddoel van deze mededeeling slechts is, overhaaste beoordeeling van de waarde van een dezer verklaringsbeginselen te beletten.

Met een dergelijk doel voor oogen zullen wij nog een ander belangrijk zonneverschijnsel bespreken — namelijk zekere stelselmatige verplaatsingen van Fraunhofersche lijnen — waarvoor eveneens verklaringen gegeven zijn op grond van twee geheel verschillende theorieën.

Bij een vroegere gelegenheid ¹⁾ heb ik betoogd, dat anomale refractie in onregelmatige dichtheidsgradienten de Fraunhofersche lijnen asymmetrisch doet zijn (en wel in den regel de smallere in sterkere mate dan de bredere), zoodat de lijnen verschoven schijnen te zijn naar het rood. Die verschuiving moet toenemen van het centrum der zonneschijf naar den rand. Het effect berust hierop, dat het brekend vermogen van het mengsel van gassen waaruit de zonneatmosfeer bestaat, gemiddeld grooter is aan den rooden dan aan den violetten kant van een absorptielijn. En daar anomale *verstrooiing* (voor zoover de formule van RAYLEIGH geldig is) óók bepaald wordt door de waarden van het brekend vermogen aan beide zijden van de absorptielijnen, heeft zij, samen met de refractie, die stelselmatige verplaatsingen ten gevolge.

Uit een onlangs verschenen fraai onderzoek van W. S. ADAMS ²⁾ over de verplaatsingen van spectraallijnen aan den rand der zon blijkt, dat van een 470-tal lijnen die gemeten werden, er slechts twee onmiskenbaar naar 't violet waren verschoven; al de andere lijnen toonen verplaatsingen naar 't rood, wisselend tusschen 0,000 en 0,014 Angströmsche eenheden. De eigenaardige betrekkingen welke in de lijst dezer lijnen opgesloten liggen, zullen uit het oogpunt van anomale dispersie nog nader moeten worden bestudeerd. Ik moet dat onderzoek tot later uitstellen, en mij thans bepalen tot eenige opmerkingen over algemeene conclusies, in het stuk van ADAMS voorkomende.

ADAMS komt tot het besluit, dat de waargenomen verplaatsingen het gevolg zijn van drukking. Hij heeft blijkbaar zeer weinig aandacht geschonken aan de mogelijkheid om die verschijnselen te verklaren uit anomale dispersie, want hoewel hij naar mijne onlangs in de

¹⁾ Versl. Naturk. Afd. XVIII, p. 196, 1909.

²⁾ ADAMS, Contrib. from the Mount Wilson Solar Obs. No. 43; Astroph. Journ. 31, p. 30—61, 1910.

Memorie d. Soc. d. Spettroscopisti ital. gepubliceerde verhandeling verwijst en de daar gegeven verklaring verwerpt, is de gevolgde gedachtingang in het geheel niet tot hem doorgedrongen. Immers hij schrijft:

„Naar de meening van JULIUS wordt het fotosfeerlicht anomaal gebroken in de nabijheid van de absorptielijnen die door de metaaldampen worden veroorzaakt, en, daar in het algemeen de dichtheidsgradient naar buiten afneemt, zal de verbreding plaats vinden aan den rooden kant der lijnen, waardoor de waargenomen verplaatsingen ontstaan. Het feit dat de natriumlijnen D_1 en D_2 niet verplaatst zijn, hoewel zij van alle lijnen wier anomale dispersie onderzocht is, dat effect in de hoogste mate vertoonen, is nog al sterk in strijd met die opvatting.”

Vooreerst begrijp ik niet recht, waarom afneming van den dichtheids-*gradient* hierbij op den voorgrond gesteld wordt. Dat zal wel een vergissing zijn; waarschijnlijk bedoelde de schrijver: „daar in het algemeen de dichtheid naar buiten afneemt.” Maar dan is de bewering, in den geheelen volzin uitgedrukt, onjuist. Bij eenig nadenken toch ziet men gemakkelijk in, dat voor deelen van de zonneshijf die dicht bij den rand gelegen zijn, de regelmatige radiale gradient de kromming van R-licht uit de fotosfeer naar de aarde bevordert, doch die van V-licht tegenwerkt. Daaruit zou voortvloeien een schijnbare verplaatsing van de donkere lijn naar het *violet*, niet naar het rood. Voor zoover dus de radiale gradient op ons verschijnsel van invloed is, werkt hij de feitelijke oorzaak van de waargenomen verplaatsingen naar het rood tegen.

Het hoofdpunt waarop ADAMS niet heeft gelet is, dat volgens mijn uitlegging de wezenlijke oorzaak van het verschijnsel bestaat in de algemeene asymmetrie van de dispersiebanden, die de absorptielijnen van het zonnenspectrum omhullen. Zij berust niet op de kromming die stralen ondergaan in den regelmatigen radialen dichtheidsgradient van de zonne-atmosfeer, maar op anomale verstrooiing en op breking in onregelmatige gradienten, in verband met het feit dat het refractievermogen van het gas-mengsel gemiddeld grooter is voor R-licht dan voor V-licht.

Houden wij dit in gedachte, dan hebben wij een bruikbaren grondslag voor het onderzoek naar de betrekking tusschen anomale dispersie en de uitkomsten der metingen van ADAMS. Dat zulk een betrekking onmogelijk gevonden kon worden door eenvoudig in een tabel naast elkander te plaatsen ¹⁾ de waarnemingsresultaten van GEISLER omtrent anomale dispersie van metaaldampen, en de grootte

¹⁾ ADAMS, l. c. p. 28.

van lijnverplaatsingen die aan den zonerand werden waargenomen, is duidelijk; immers het bedrag van dat deel der verplaatsing hetwelk aan anomale dispersie te danken is, wordt bepaald door den graad van asymmetrie der beschouwde lijn; en deze asymmetrie is niet een bloote eigenschap van het corresponderende element, die men door laboratoriumproeven zou kunnen gewaar worden, maar zij hangt af van de concentratie waarmee dat element in de zonne-atmosfeer vertegenwoordigd is. Geen schijn van evenredigheid kon men verwachten tusschen de uitkomsten van de genoemde twee waarnemingsreeksen. Het strijdt dan ook in geenen deele met onze opvatting, wanneer ADAMS vindt dat de sterk verbreedde lijnen van natrium en calcium weinig of niet verplaatst zijn aan den rand, ondanks de hooge mate waarin zij anomale dispersie vertoonen. Integendeel, dat resultaat hadden we kunnen voorzien; want als de breede „vleugels“ van die lijnen werkelijk door anomale dispersie ontstaan, moet de golf-lengte, beantwoordend aan de nulwaarde van het refractievermogen van het gasmengsel, die steeds aan den violetten kant eener Fraunhofersche lijn gevonden wordt, op een vrij grooten afstand liggen van de geabsorbeerde golven¹⁾; waardoor dan de asymmetrie van den dispersieband onmerkbaar wordt. Het centrale gedeelte der lijn, de eigenlijke absorptielijn, kan door anomale dispersie niet verplaatst worden.

Een eigenaardigheid van onze verklaring is, dat zoowel zeer sterke als zeer zwakke anomale dispersie aanleiding geeft tot bijzonder kleine verplaatsingen, terwijl bij tusschenliggende waarden de verschuiving grooter is. Dat komt, doordat met het afnemen der breedte van een dispersieband, toename van zijn asymmetrie gepaard gaat, terwijl toch de daaruit voortvloeiende schijnbare verplaatsing nooit grooter kan zijn dan de halve breedte der lijn. (In alle gevallen waarin men grootere verplaatsingen heeft waargenomen, moeten drukking, of magnetisme, of Doppler-effekt zeer zeker in het spel zijn geweest).

De grootste verplaatsingen werden door ADAMS gevonden bij vele lijnen van ijzer en nikkell. Het schijnt dus — uit het oogpunt van onze hypothese beschouwd — dat nabij deze lijnen de anomale dispersie van het mengsel de voor het bedoelde verschijnsel gunstigste waarde heeft, niet te groot is, en niet te klein. Aanmerkelijk kleiner bleken de verplaatsingen bij titanium, vanadium en scandium te zijn — misschien omdat die elementen minder sterk in het gasmengsel vertegenwoordigd zijn. Zoo strookt het ook volkomen met

¹⁾ Vergelijk fig. 8 op Pl. I mijner mededeeling in Versl. Natuurk. Afd. XVIII p. 181.

onze zienswijze, dat die ijzerlijnen, welke aan den zonnerand het meest versterkt zijn, kleinere verplaatsingen vertoonen dan de ijzerlijnen gemiddeld doen; immers hun asymmetrie is, wegens hun grootere breedte, minder in het oog vallend. Dat de lijnen der elementen met zeer hoog atoomgewicht, zooals lanthanum en cerium, heel geringe verplaatsingen geven, is gemakkelijk te begrijpen als wij aannemen dat hunne dampen in de zonne-atmosfeer uiterst geringe spanning hebben. Deze verklaring is zeker niet minder eenvoudig dan die welke ADAMS op blz. 17 en 18 van zijn verhandeling voorslaat, waar hij een uitweg moet zoeken uit de tegenstrijdigheid, waartoe in dit geval de druk-hypothese schijnt te voeren.

Nog andere eigenaardigheden van de belangrijke lijst van verplaatsingen, door ADAMS gegeven (bijv. het bijzonder gedrag van de klasse der „enhanced lines”) wensch ik later te bespreken, tegelijk met diens niet minder waardevolle gegevens betreffende het spectrum van zonnevlekken.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling No. 115 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: C. A. CROMMELIN, „*Isothermen van eenatomige gassen en hunne binaire mengsels. IV. Opmerkingen over de bereiding van argon. V. Dampspanningen boven -140° C., kritische temperatuur en kritische druk van argon.*”

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LÖRENTZ).

IV. Opmerkingen over de bereiding van argon.

§ 1. *Zuiver chemische methoden.* Het belangrijkste vraagstuk bij de bereiding van argon is de verwijdering van de stikstof uit een mengsel van argon en stikstof. De absorptie-middelen voor stikstof, die tegenwoordig voornamelijk in aanmerking komen zijn calcium, een mengsel van calciumcarbied en chloorcalcium en een mengsel van ongebluschte kalk, magnesium en natrium.

a. Calcium. MOISSAN en RIGAUT ¹⁾ beweren, dat calcium reeds bij donkere roodgloei-hitte stikstof gretig bindt tot calciumnitride (Ca_3N_2), terwijl SODDY ²⁾ verklaart, dat calcium zich met stikstof (en tevens met alle andere gassen, uitgezonderd de éénatomige) pas verbindt bij

¹⁾ H. MOISSAN en A. RIGAUT, Ann. de Chim. et de ph. (8), 2, 433, 1904.

²⁾ F. SODDY, Proc. R. S. 15 Nov. 1906, uittreksel in Nature 24 Jan 1907..

temperaturen ver boven degene, die in een gewonen chemischen verbrandingsoven bereikt kunnen worden.

Volgens mijne ervaring absorbeert calcium bij lichte roodgloeihitte in een chemischen verbrandingsoven stikstof traag. Ik gebruikte voor deze proeven een toestel, geconstrueerd in navolging van dien van RAYLEIGH en RAMSAY¹⁾, waarin het gas door middel van een circulatiepomp met kwikstraal in een gesloten kringloop door den oven werd rondgevoerd. Dat er werkelijk stikstof door het calcium was vastgelegd bleek, behalve uit het dalen van den druk in den toestel, uit het gele (niet bruine, zooals men in sommige chemische leerboeken vindt) aan vochtige lucht sterk naar ammoniak riekende, calciumnitride, dat na de proef uit de buis te voorschijn kwam.

Per slot van rekening voerde deze methode mij niet tot bevredigende resultaten.

b. Mengsel van 90% calciumcarbide en 10% chloorcalcium. FISCHER en RINGE²⁾ hebben hierop de aandacht gevestigd. Het heeft het groote voordeel, dat het zuurstof en stikstof tegelijkertijd absorbeert. In samenwerking met den Heer H. FILIPPO, chem. doct., wien ik voor zijne niet genoeg te waardeeren hulp hier gaarne mijnen hartelijken dank betuig, construeerde ik een toestel, waarmede wij in korten tijd een groote hoeveelheid (55 L.) ruw argon konden bereiden. Deze toestel, waarvan de bijzonderheden hier achterwege kunnen blijven, was voor het verwerken van grootere hoeveelheden lucht dan die van FISCHER en RINGE ingericht.

Wij verwerkten met 1 KG. mengsel ongeveer 216 L. lucht terwijl FISCHER en RINGE het slechts tot ± 180 L. brachten. Het schijnt mij toe, dat deze methode voor het bereiden van eene groote hoeveelheid ruw argon de meeste aanbeveling verdient.

c. Mengsel 20 gewichtsdeelen ongebluschte kalk, 4 gewichtsdeelen magnesium en één gewichtsdeel natrium. Dit mengsel, als wijziging van dat van MAQUENNE³⁾ door HEMPEL⁴⁾ aanbevolen, en dat ik het mengsel van HEMPEL zal noemen, kan, mits met veel zorg bereid, bij het verwijderen van stikstof uit ruw argon uitstekende diensten bewijzen. Ik gebruikte het voor de laatste zuivering van het argon, dat voor de quantitative bepalingen zou dienen.

1) LORD RAYLEIGH en W. RAMSAY, Phil. Trans. R. S. (A) 186. 187. 1895.

2) F. FISCHER en O. RINGE, Chem. Ber. 41. 2017. 1908.

3) L. MAQUENNE, C. R. 121. 1147. 1895.

4) W. HEMPEL, Gasanalytische Methoden 3^{te} druk, pg. 150.

De analyse van het verkregen gas ¹⁾ bewijst de voortreffelijkheid van dit absorptiemiddel.

Omtrent de *dissociatie-spanning* van magnesium- en calciumnitride bij de temperatuur waarbij wij werkten, bestaan voorzoover mij bekend is, geene bepalingen. Bij het verhitten van het residu van een proef met het mengsel van HEMPEL in een van slijpstukken voorziene porceleinen buis, die aan den eenen kant met een z.g. verklikker, aan den anderen kant met een TÖPLER-pomp verbonden was, kon ik met een kathetometer, waarmede met zekerheid $\frac{1}{20}$ mm. was af te lezen, geen dissociatiespanning constateeren. De dissociatiespanningen dus zijn stellig kleiner dan $\frac{1}{20}$ mm. Onder de gunstigste omstandigheden behoeft er dus zeker niet meer dan $\frac{1}{15000}$ stikstof in het mengsel over te blijven.

§ 2. *Electro-chemische methoden.* De binding van stikstof aan zuurstof onder den invloed van electriche ontladingen, bij de argonbereiding gebruikt door RAYLEIGH en RAMSAY ²⁾, RAYLEIGH ³⁾, BECKER ⁴⁾ e. a., heeft vooral waarde bij het verwijderen der allerlaatste sporen stikstof. Het groote bezwaar aan deze methode verbonden, nl. de langzaamheid wordt gedeeltelijk overwonnen door het gebruik van eenen transformator voor hooggespannen wisselstroom in plaats van een inductieklos. Een toestel met transformator, door mij voor dit doel met grooten zorg geconstrueerd naar de beginselen van dien van RAYLEIGH en RAMSAY, heeft mij eenige malen voor eene laatste zuivering gediend. Gebruikt werd een vlamboog tusschen onbewegelijke platina-electroden, die in de praktijk bewezen heeft beter voor het doel geschikt te zijn dan lange dunne vonken ⁵⁾, die men uit theoretisch oogpunt allicht boven den vlamboog zou verkiezen ⁶⁾.

Ten einde een oordeel over het rendement van den toestel te verkrijgen, deed ik eenige metingen om de verhouding van het aantal verbruikte Watts tot het aantal Volt-Ampères in de keten van lage spanning te bepalen. Deze verhouding is bij een goed geconstrueerden transformator in beide ketens steeds nagenoeg gelijk.

Ik vond, wanneer de vlam rustig brandde

¹⁾ Zie V, § 4. van deze mededeeling.

²⁾ LORD RAYLEIGH en W. RAMSAY, Phil. Trans R. S. (A.) 186, 187, 1895.

³⁾ LORD RAYLEIGH, Journ. Chem. Soc. (Trans.) 71, 181, 1897.

⁴⁾ A. BECKER, Ztschr. f. Electrochemie 9, 600. 1903.

⁵⁾ C. S. BRADLEY en R. LOVEJOY, Ztschr. f. Electrochemie, 9, 868. 1903.

⁶⁾ F. HABER, Thermodynamik technischer Gasreaktionen (München en Berlijn, Oldenbourg, 1905).

PH A. GUYE, Conf. Soc. Chim. de France 24 Mei 1909.

25 Volt,
44 Ampère,
480 Watt.

De gezochte verhouding is dus $\frac{480}{25 \times 44} = 0.44$.

Of deze zeer ongunstige verhouding nu te wijten is aan een groote phasenverschuiving tusschen stroomsterkte en spanning (hooge inductieve weerstand), dan wel aan andere oorzaken (deformatie van stroom- en spanningskrommen zooals SCHEUER¹⁾ beweert, electromotorische krachten aan de elektroden, enz) moest ik in 't midden laten aangezien mij geen oscillograaph ten dienste stond.

Zonder met dezen factor rekening te houden was het rendement van mijn toestel een absorptie van 11,8 L. per Kilo-Volt-Ampèreuur van een mengsel van zuurstof en stikstof in de juiste verhouding om salpeterzuur te vormen. RAYLEIGH²⁾ absorbeerde 17.5 L per Kilo-Volt-Ampèreuur.

§ 3. *Scheiding van argon en neon door gefractioneerde distillatie.*

De hoeveelheden krypton, xenon en helium, die in het, volgens een der besproken methoden bereide argon nog aanwezig zijn kwamen voor de proeven die ermede gedaan moesten worden (isothermen, dampspanningen enz.) niet in aanmerking.³⁾ Het was echter wensche-lijk de 0.1 à 0.2% neon nog af te zonderen, wat geschiedde door fractionneering bij de temperatuur van vloeibare zuurstof, kokend onder sterk gereduceerden druk (— 217° C.). Deze temperatuur ligt boven de kritische temperatuur van neon, terwijl extrapolatie van de door RAMSAY en TRAVERS⁴⁾ bepaalde dampspanningen van vast argon, door middel van eene formule van den vorm

$$\log p = A + \frac{B}{T}$$

mij eene schatting aan de hand deed voor de dampspanning van vast argon bij — 217° C., nl. ongeveer 3 mm., eene uitkomst zooals die ook naar analogie van zuurstof te verwachten was, en die bij de proeven zelve bevestigd werd gevonden.

V. *Dampspanningen boven — 140° C., kritische temperatuur en kritische druk van argon.*

§ 1. Het *doel* waarmede deze bepalingen ondernomen werden

¹⁾ O. SCHEUER, Zeitschr. f. Electroch. 11, 565, 1905, In. diss. Genève. 1905.

²⁾ RAYLEIGH, Journ. Chem. Soc. (Trans) 71, 181, 1897.

³⁾ M. W. TRAVERS, Experimental studies of gases

⁴⁾ W. RAMSAY en M. W. TRAVERS, Phil. Trans. R. S. (A) 197, 47, 1901.

was tweeledig: 1°. was het mijn voornemen de dampspanningsbepalingen van RAMSAY en TRAVERS¹⁾ en die van de kritische grootheden van RAMSAY en TRAVERS¹⁾ en van OLSZEWSKI²⁾ te controleeren en 2°. wilde ik trachten aan de hand van de theorie der condensatie van stoffen met kleine bijmengsels van KEESOM³⁾ een oordeel over de zuiverheid van het gebruikte argon te verkrijgen, alvorens tot de bepaling van isothermen over te gaan.

§ 2. De *toestel*, waarin de metingen verricht zijn, was reeds vroeger voor niet gepubliceerde onderzoekingen over zuurstof door KAMERLINGH ONNES en HYNDMAN ingericht en gebruikt en is vroeger reeds met een enkel woord ter sprake gebracht⁴⁾.

De toestel zelf heeft veel overeenkomst met de reeds door KAMERLINGH ONNES en HYNDMAN beschreven piëzometers van veranderlijk volumen voor lage temperaturen⁵⁾, alleen het glazen reservoirtje dat op lage temperatuur wordt gebracht en de daaraan verbonden glazen en stalen capillairen zijn anders. Dit reservoirtje is 8 cm. lang, heeft een inwendigen diameter van 3.4 mm. en bevat, meer bepaaldelijk voor waarneming van de kritische verschijnselen, een glazen roerder. Deze roerder is door middel van een glazen draad, die door de glazen capillair loopt, verbonden met een soortgelijken roerder, voorzien van een ingesmolten stukje week ijzer, dat zich door middel van een kleinen electromagneet in een reservoirtje van dezelfde afmetingen boven aan de capillair (waar deze boven den cryostaat uitsteekt) laat heen en weer bewegen, Het onderste reservoirtje is van eene verdeling voorzien, om in staat te stellen den stand van den vloeistofmeniscus af te lezen en de beweging van den meniscus te volgen.

Aangezien deze piëzometer niet voor volumebepalingen bestemd is en men dus niet aan eene bepaalde bekende hoeveelheid stof (normaal volume) gebonden is, is de stalen capillair voorzien van een stalen T-stuk, waaraan een tweede capillair gesoldeerd is. Deze capillair, in 't midden voorzien van een stalen kraantje voor hoogen druk, vormt de verbinding tusschen den piëzometer en een glazen reservoir met argon, waarin de druk door middel van kwik tot ± 1.5 atm. kan worden opgevoerd. Op deze wijze kan door toevoeging

1) Zie noot 4 p. 927.

2) K. OLSZEWSKI, Phil. Trans. R. S. (A), 186. 253. 1895.

3) W. H. KEESOM, Comm. Phys. Lab. Leiden. No. 79.

4) Zittg.versl. Mrt. '02 Comm. No. 78. pg. 11 en Zittg.versl. Dec. '02. Comm. No. 83, pg. 13.

5) Zittg.versl. Mrt. '01 Comm. No. 69.

van gas, het gebied van dichtheden, waarvoor men eenzelfde piëzometer kan gebruiken, belangrijk worden uitgebreid.

De afmetingen van den piëzometer waren indertijd berekend voor zuurstof. Aangezien deze stof nagenoeg dezelfde kritische grootheden heeft als argon, kon de piëzometer zonder meer voor argon gebruikt worden.

Als cryostaat werd gebruikt de door KAMERLINGH ONNES ¹⁾ in 1902 geconstrueerde en ook reeds beschreven cryostaat voor apparaten van kleine afmetingen

De vereischte temperaturen werden verkregen door middel van vloeibaar ethyleen, kokend onder verlaagden druk, terwijl de temperatuur constant werd gehouden met een platinaweerstandsthermometer. ²⁾

De druk werd gemeten met een gesloten waterstofmanometer ³⁾, die direct met behulp van den open manometer van KAMERLINGH ONNES ⁴⁾ gecalibreerd was. De nauwkeurigheid van deze drukmeting bedraagt $\frac{1}{3000}$.

De temperatuurbepalingen werden verricht met een platina weerstandsthermometer, geconstrueerd uitsluitend uit glas en platina, zooals aangegeven door KAMERLINGH ONNES en CLAY ⁵⁾. Deze thermometer was bij een groot aantal temperaturen tusschen -103° C. en -140° C. vergeleken met een standaard weerstandsthermometer, welke laatste zeer zorgvuldig o.a. bij -102° C. en -138° C. met den waterstofthermometer was vergeleken en waarvoor eene goed aansluitende formule was berekend. In de buurt van -120° C. en -130° C., waar eenige twijfel kan bestaan omtrent de grootte der afwijkingen van de formule, kunnen dus in de temperaturen fouten van een paar honderste van een graad zeer wel voorkomen. Zij zijn echter ongetwijfeld tot op $\frac{1}{20}^{\circ}$ juist. De aldus berekende temperaturen, die op de schaal van den waterstofthermometer betrekking hebben, werden door middel van de door KAMERLINGH ONNES en BRAAK ⁶⁾ aangegeven correcties herleid tot de absolute schaal.

De calibratie van den thermometer, zoowel als de bepalingen der

¹⁾ Zittg.versl. Dec. '02, Comm. No. 83. Op plaat IV aldaar vindt men den cryostaat met den boven beschreven piëzometer afgebeeld.

²⁾ H. KAMERLINGH ONNES. Comm. No. 83, § 5.

³⁾ H. KAMERLINGH ONNES en H. H. F. HYNDMAN, Comm. N^o. 78. § 17 en H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK, *Coidm.* N^o. 97*a*. § 3.

⁴⁾ Zittg.versl. Oct. '98, Comm. N^o. 44.

⁵⁾ Zittg.versl. Juni '07, Comm. N^o. 99*b*.

⁶⁾ Zittg.versl. Nov. '07, Comm. N^o. 101*b*.

temperaturen werden verricht en berekend door Mej. G. L. LORENTZ, phil. doct., wie ik voor de uitstekende hulp, die zij mij bij mijne metingen wel heeft willen verleenen, hier gaarne mijnen hartelijken dank betuig. Ook den Heer W. J. DE HAAS, phil. docts. ben ik erkentelijk voor zijne hulp bij mijne metingen.

§ 3. De *metingen* hadden nu als volgt plaats. Nadat zich eene kleine hoeveelheid vloeistof gevormd had, werd de toestel eenigen tijd aan zichzelf overgelaten, teneinde temperatuur- en druk-evenwicht te verzekeren; vervolgens werden afgelezen de stand van den meniscus in het reservoirtje, de manometer en de stand van den meniscus in den glazen steel van den piëzometer. Daarna werd de druk eenigszins verhoogd totdat het reservoirtje zich bijna geheel met vloeistof had gevuld, waarop dezelfde waarneming werd gedaan.

De kritische temperatuur werd als naar gewoonte langzamerhand en ten slotte met stapjes van een tiende graad ingesloten. Zoo een temperatuur beneden de kritische temperatuur lag, werd dit geconstateerd door bij uiterst langzame compressie (ten einde de adiabatische verwarming zoo gering mogelijk te maken en dus op de experimenteele isotherme te blijven) het optreden van condensatie waar te nemen. Was men boven de kritische temperatuur, dan toonde men dit aan door den druk eerst boven den kritischen druk op te voeren en vervolgens met kleine expansies (waarvan de adiabatische afkoeling slechts een paar honderste van een graad kon bedragen) den druk te verlagen; trad er zodoende geen meniscus op, dan was men zeker, dat de temperatuur hooger dan de kritische temperatuur was.

Als kritische druk werd aangenomen de druk waarbij de meniscus ongeveer midden in het reservoirtje verdween.

Van eene eigenlijke bestudeering der kritische verschijnselen, alsmede van eene zeer scherpe bepaling van de kritische constanten heb ik om verschillende redenen afgezien. Vooreerst vermoedde ik ('t geen door de metingen later bevestigd werd), dat mijn argon daartoe niet zuiver genoeg was. Ten tweede mag, sinds de beschrijving van den toestel van KAMERLINGH ONNES en FABIVS¹⁾ de door mij gebruikte piëzometer voor dit doel verouderd genoemd worden. Ook de cryostaat voldeed niet aan de allerhoogste eischen wat betreft het constant-houden van de temperatuur.

§ 4. *Berekeningen*. Nadat nu de drukken en temperaturen waren berekend werd allereerst, aan de hand van de formule van KEESOM²⁾

1) Zittg versl. Mei '07, Comm. No. 98. uitvoeriger in G. H. FABIVS, Diss. Leiden 1908 alwaar ook de afbeeldingen te vinden zijn.

2). W. H. KEESOM Comm. No. 79 pg. 9. In alle formules zullen de eenheden van VAN DER WAALS gebruikt worden.

betreffende de verandering van den condensatiedruk van stoffen met kleine bijmengsels een oordeel gevormd over de zuiverheid van het argon. Ik nam aan, dat de bijmengselen, die eene waarneembare drukverandering konden te weeg brengen voor verreweg het grootste deel uit stikstof moesten bestaan. De ervaringen opgedaan bij de bereiding van het argon rechtvaardigen deze onderstelling.

De formule van KEESOM luidt :

$$(v_2 - v_1) (p_1 - p_2) = MRT x (e^k + e^{-k} - 2) \quad . \quad . \quad (1).$$

waarin

$$k = \left\{ \alpha \frac{T}{p} \frac{dp}{dT} - \beta \right\} \frac{p (v_2 - v_1)}{MRT}.$$

p is de dampspanning van de zuivere stof bij de absolute temperatuur T ; p_1 en p_2 zijn de drukken resp. bij het einde en het begin der condensatie, v_2 en v_1 zijn de moleculaire volumina resp. van damp en vloeistof, x is het gezochte moleculaire gehalte van het bijmengsel, terwijl ten slotte α en β de beide door KAMERLINGH ONNES¹⁾ ingevoerde constanten zijn nl.:

$$\alpha = \frac{1}{T_k} \left(\frac{dT_{xk}}{dx} \right)_{x=0}$$

en

$$\beta = \frac{1}{p_k} \left(\frac{dp_{xk}}{dx} \right)_{x=0}.$$

Deze formule geldt echter voor het begin en het einde der condensatie, dus voor 2 punten op de grenslijn (p v diagram), terwijl ik het uit experimenteel oogpunt verkozen had, mijne waarnemingen te verrichten even ná het begin en even vóór het einde der condensatie, dus op 2 punten op de experimenteele isotherme binnen de grenslijn.

Om nu eene formule te verkrijgen, die op mijne metingen van toepassing was, leidde ik, een vriendelijke aanwijzing van Dr. KEESOM volgend, uit de formule's

$$\begin{aligned} (v_2 - v_1) (p_1 - p) &= MRT \cdot x \cdot (e^{-k} - 1) \quad (2) \\ (v_2 - v_1) (p_2 - p) &= MRT \cdot x \cdot (1 - e^k) \quad (3) \end{aligned}$$

waarvan het verschil formule (1) oplevert, 2 formules af voor punten op de experimenteele isotherme. Zij luiden :

1) W. H. KEESOM Comm. No. 75 pg. 6.

2) W. H. KEESOM, Comm. N^o. 79, pg. 9.

$$\left. \begin{aligned} (v_2 - v_1)(p_b - p) &= \frac{MRT x (e^{-k} - 1)}{1 + y_b - y_b e^{-k}} \\ (v_2 - v_1)(p_a - p) &= \frac{MRT x (1 - e^k)}{1 - y_a + y_a e^k} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

waarin

$$y_a = \frac{v_{a_2} - v_a}{v_{a_2} - v_{a_1}}$$

$$y_b = \frac{v_{b_2} - v_b}{v_{b_2} - v_{b_1}}$$

Bij de nieuw ingevoerde notaties heeft a betrekking op een toestand, kort na den aanvang, b op een toestand, kort vóór het eind der condensatie, 1 op de vloeistof, 2 op de damp, alles in moleculaire volumina uitgedrukt. Bv. v_{b_2} = moleculair dampvolumen bij 't eind der condensatie. v_a en v_b zijn de totale moleculaire volumina.

Deze formules (2) leveren voor de betrekking tusschen het verschil der in mijne proeven optredende begin- en einddruk aan den eenen, en x aan den anderen kant:

$$p_b - p_a = \frac{MRT x}{v_2 - v_1} \left[\frac{e^{-k} - 1}{1 + y_b - y_b e^{-k}} - \frac{1 - e^k}{1 - y_a + y_a e^k} \right] \dots (3).$$

Deze formule is ter berekening van x direct op mijn metingen toe te passen. Een bezwaar is echter, dat er verscheidene grootheden in voorkomen waarvan de waarde voorloopig niet met groote juistheid berekend kan worden, zoodat de hieronder vermeldde uitkomsten voor x moeten beschouwd worden als vrij ruwe benaderingen, die echter zonder twijfel de orde van grootte van x aangeven.

De grootste onzekerheid bevatten de schattingen der constanten α en β , tot de juiste berekening waarvan metingen omtrent mengsels van argon en stikstof noodig zouden zijn. Aangezien zulke metingen nog niet verricht zijn, behielp ik mij overeenkomstig de methode door KEESOM ¹⁾ gevolgd met verschillende vereenvoudigende onderstellingen en geraakte zoo tot de volgende schattingen:

$$\alpha = -0.216 \quad \beta = -0.484^\circ$$

De waarden van $\frac{T dp}{p dT}$ en die van de dampspanning van de zuivere stof werden ontleend aan de bepalingen van RAMSAY en TRAVERS ³⁾. v_2 en v_1 werden berekend met behulp van de formule van KEESOM ⁴⁾

1) W. H. KEESOM, Comm. N°. 79.

2) Voor verdere waarden van den β zie: J. E. VERSCHAFFELT, Suppl. N°. 10.

3) W. RAMSAY en M. W. TRAVERS, Phil. Trans. R. S. (A) 197, 47. 1901.

4) W. H. KEESOM, Comm. N°. 79, pg. 11.

voor coëxisterende vloeistof- en dampdichtheden, waarbij ik eene schatting van de kritische dichtheid maakte uit de waarden voor de vloeistofdichtheden van argon van Baly en DONNAN¹⁾, met behulp van den rechte lijnen diameter van CAILLETET en MATHIAS²⁾, en met den „loi du tiers” van MATHIAS³⁾, welke beide methoden een op bevredigende wijze overeenstemmend resultaat opleverden.

Op deze wijze te werk gaande berekende ik uit 3 dampspanningswaarnemingen de volgende waarden van x :

x	Vol %
0.00066	0.066
58	58
72	72

In aanmerking genomen de wijze, waarop verschillende grootheden, die in formule (3) voorkomen, moesten worden benaderd, mag men met deze overeenstemming tevreden zijn, en als hoogstwaarschijnlijk aannemen, dat het bijmengsel minder dan 0.1% bedraagt.

Met behulp van het gemiddelde van de gevonden waarden van x was ik nu in staat de gemeten dampspanningen te herleiden tot die voor de zuivere stof door middel van de formules (2). Deze correcties zijn zeer gering en vallen juist even buiten de nauwkeurigheidsgrenzen der waarnemingen.

De waargenomen kritische grootheden, (eigenlijk plooiingsgrootheden) werden gecorrigeerd met de beide volgende, door KEESOM⁴⁾ opgestelde vergelijkingen:

$$\frac{1}{T_k} \frac{dT_{pl}}{dx} = \alpha - \frac{\left(\beta - \alpha \frac{\partial \pi}{\partial \tau}\right)^2}{C_4 \frac{\partial^2 \pi}{\partial \omega \partial \tau}}$$

en

$$\frac{1}{p_k} \frac{dp_{pl}}{dx} = \beta - \frac{\partial \pi}{\partial \tau} \frac{\left(\beta - \alpha \frac{\partial \pi}{\partial \tau}\right)^2}{C_4 \frac{\partial^2 \pi}{\partial \omega \partial \tau}}$$

waarin $C_4 = \frac{MRT_k}{p_k v_k}$ en de Griekse letters de gereduceerde grootheden beduiden.

¹⁾ E. C. G. Baly en F. G. DONNAN, Journ. Chem. Soc. 81, 911. 1902.

²⁾ L. CAILLETET en E. MATHIAS, Journ. d. Phys. (2). 5, 549. 1886.

³⁾ E. MATHIAS, Ann. d. l. Fac. d. Sc. Toulouse (6). 1892.

⁴⁾ W. H. KEESOM, Comm. N°. 75, pg. 6.

Wanneer wij nu met VAN DER WAALS¹⁾ aannemen, dat voor alle stoffen

$$\frac{\partial \pi}{\partial \tau} = 6.7$$

en met KEESOM²⁾ dat

$$C_4 \frac{\partial^2 \pi}{\partial \omega \partial \tau} = - 32.2,$$

verder, dat wij mogen schrijven:

$$\frac{dT_{\rho l}}{dx} = \frac{T_{\rho l} - T_k}{x}$$

en

$$\frac{dp_{\rho l}}{dx} = \frac{p_{\rho l} - p_k}{x}$$

en ten slotte voor T_k en p_k in het eerste lid de waargenomen grootheden (dus eigenlijk $T_{\rho l}$ en $p_{\rho l}$) wat tot de waarden dier zéér kleine correcties $T_k - T_{\rho l}$ en $p_k - p_{\rho l}$ al heel weinig af zal doen, dan krijgen de formules (4) de gedaante

$$T_k - T_{\rho l} = - T_{\rho l} x \left[\alpha - \frac{\left(\beta - \alpha \frac{\partial \pi}{\partial \tau} \right)^2}{C_4 \frac{\partial^2 \pi}{\partial \omega \partial \tau}} \right]$$

en

$$p_k - p_{\rho l} = - p_{\rho l} x \left[\beta - \frac{\left(\beta - \alpha \frac{\partial \pi}{\partial \tau} \right)^2}{C_4 \frac{\partial^2 \pi}{\partial \omega \partial \tau}} \right]$$

Uit deze formules berekende ik de (zéér kleine) correcties voor de kritische grootheden, (+ 0^o.02 en + 0.009 atm.).

§ 5 *Uitkomsten.* Nadat op de in § 4 aangegeven wijzen, de waarnemings grootheden tot die van de zuivere stof herleid waren, verkreeg ik de volgende uitkomsten. (Zie Tabel p. 935).

Eene graphische voorstelling van deze waarnemingen vindt men op bijgevoegde figuur, waarop ter vergelijking nog de dampspannin-

1) J. D. VAN DER WAALS, Versl. Kon. Ac. Amsterdam, April 1901.

2) W. H. KEESOM, Comm. No. 75.

Datum	Serie	t	p in atm.
1910 10 Febr.	VI	-140.80	22.185
10 "	V	-134.72	29.264
9 "	III en IV	-129.83	35.846
9 "	II	-125.49	42.457
12 "	VIII	-122.70	47.503
14 "	IX	-122.49	47.890
Kritische grootheden			
14 Febr.	X	-122.44	47.996

gen en het kritisch punt van RAMSAY en TRAVERS¹⁾ en het kritisch punt van OLSZEWSKI²⁾ zijn geteekend.

Voor al het kritisch punt van RAMSAY en TRAVERS ($-117^{\circ}.4\text{ C.}$ en 52.9 atm.) wijkt belangrijk van het mijne af, wat wellicht zijne verklaring kan vinden in de primitieve wijze waarop deze onderzoekers hun temperatuurbad hadden ingericht.

§ 6. *Voorstelling der dampspanningslijn door empirische formules.* Ik heb getracht de in de vorige § medegedeelde uitkomsten voorstellen door middel van de formules van RANKINE³⁾.

Eene formule met 2 constanten, nl.

$$\log p = A + \frac{B}{T}.$$

identiek aan de bekende dampspanningsformule van VAN DER WAALS⁴⁾ met één aan de dampspanningen te ontleenen constante, om te verkrijgen, dat de formule bij de waargenomen kritische temperatuur ook den waargenomen kritischen druk levert, gaf geen zeer bevredigend resultaat zooals uit de volgende vergelijking van de waargenomen drukken $p(W)$ en de berekende drukken $p(R)$ blijkt:

¹⁾ W. RAMSAY en M. W. TRAVERS, Phil. Trans. R. S. (A) 197, 147, 1901.

²⁾ K. OLSZEWSKI, Phil. Trans. R. S. (A) 186, 253, 1895.

³⁾ W. J. M. RANKINE, Edinb. New. Phil. Journ. 1849 en Phil. Mag. 1854, Misc. Scient. Papers pg. 1 en 410.

⁴⁾ J. D. VAN DER WAALS Cont. I (2de druk) pg. 158.

Serie	$p(W)$	$p(R)$	$p(W)-p(R)$
VI	22.185	21.642	+ 0.543
V	29.264	28.841	+ 0.423
III en IV	35.846	35.697	+ 0.149
II	42.457	42.628	- 0.171
VIII	47.503	47.521	- 0.018
IX	47.890	47.903	- 0.013

Een veel betere aansluiting aan de waarnemingen leverde eene formule met 3 constanten nl.

$$\log p = A + \frac{B}{T} + \frac{C}{T^2}, \dots \dots \dots (5)$$

identiek aan de dampspanningsformule van KEESOM¹⁾, met 2 uit de dampspanningen te bepalen constanten. Toen ik de constanten volgens de methode der kleinste quadraten had berekend en gevonden had

$$\left. \begin{aligned} A &= + 4.6631 \\ B &= - 524.72 \\ C &= + 11371. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

bereikte ik de volgende aansluiting :

Serie	$p(W)$	$p(R)$	$p(W)-p(R)$
VI	22.185	22.210	- 0.025
V	29.264	29.161	+ 0.103
III en IV	35.846	35.846	0.000
II	42.457	42.662	- 0.205
VIII	47.503	47.380	+ 0.123
IX	47.890	47.883	+ 0.007

De berekening met eene formule met 4 constanten (3 uit de dampspanningen te bepalen) liet ik achterwege, omdat het waarnemingsmateriaal mij daartoe te gering toescheen.

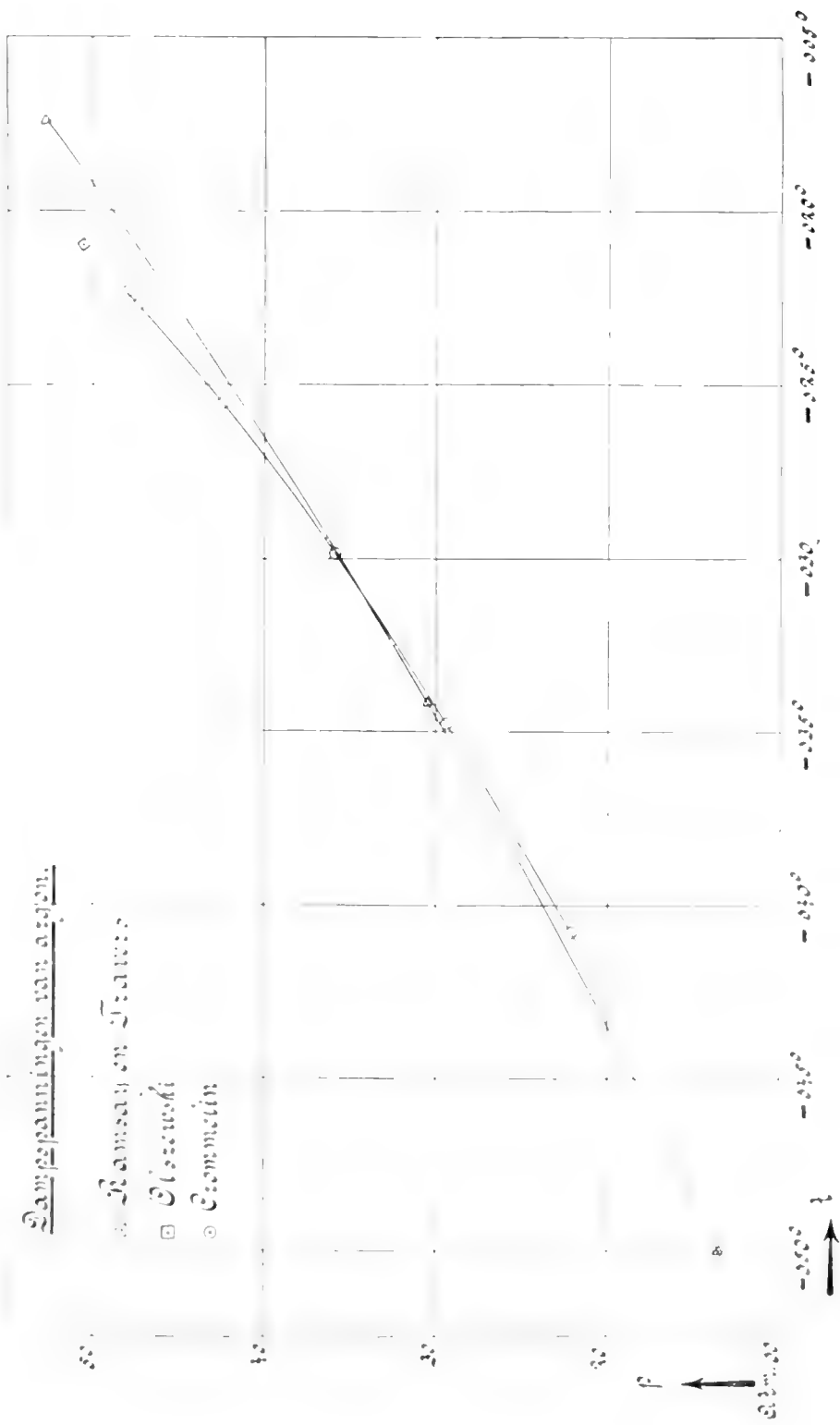
Uit de formule (5) met de constanten (6) vind ik

$$\frac{T_k}{p_k} \left(\frac{dp}{dT} \right)_k = 5.712^2)$$

¹⁾ W. H. KEESOM, Comm. No. 88, pg. 53.

²⁾ Verg. H. HAPPEL, Ann. d. Phys. (4) 21, 342, 1906. H. HAPPEL, Phys. Ztschr. 10. 1026. 1909 G. VAN RIJ, Diss. Amsterdam, pg. 13 sqq.

C. A. CROMMELIN. Isothermen van eenatomige gassen en hunne binaire mengsels. IV. Opmerkingen over de bereiding van argon. V. Dampspanningen boven 140 C., kritische temperatuur en kritische druk van argon."



Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 116 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en ALBERT PERRIER: „*Onderzoekingen over de magnetisatie van vloeibare en van vaste zuurstof*”.

§ 1. *Inleiding.* Het behoeft nauwelijks vermeld te worden, dat het onderzoek naar de magnetische eigenschappen van zuurstof bij lage temperaturen reeds lang op het programma van het cryogeen laboratorium stond. Noeh ook dat het een der belangrijkste punten daarvan werd geacht, zoodra de methoden om uitvoerige reeksen van metingen bij standvastige temperaturen in het gebied van vloeibare waterstof te verrichten, ontwikkeld waren ¹⁾, en naast de vloeibare zuurstof ook de vaste zou kunnen worden onderzocht. Immers, terwijl de zuurstof door haren sterk magnetischen aard reeds boven de andere stoffen voor de studie van het paramagnetisme in aanmerking komt, is het opstellen van eene *magnetische toestandvergelijking* ²⁾, die de magnetische eigenschappen van eene stof in de drie aggregaats-toestanden bij zooveel mogelijk uiteenlopende drukkingen en temperaturen in één beeld samenvat, voorloopig bij geen andere stof te bereiken.

Al dadelijk kon het onderzoek van zuurstof onder gemakkelijk te verwezelijken drukkingen bij zeer lage temperaturen veel belangrijks leeren.

CURIE ³⁾ vond bij gasvormige zuurstof de *specifieke susceptibiliteit* (magnetisatie per $H = 1$ per gram) tusschen 20° C. en 450° C. omgekeerd evenredig met de absolute temperatuur en FLEMING en DEWAR ⁴⁾ hadden uit hunne laatste meting van de susceptibiliteit van vloeibare zuurstof bij haar kookpunt afgeleid, dat de wet van CURIE tot —183° C. doorgaat. Blijft de specifieke susceptibiliteit ook bij lagere temperaturen nog zoo sterk toenemen of nadert zij tot een grenswaarde; doen zich verzadigingsverschijnselen voor; wordt de zuurstof in den vasten toestand ferromagnetisch; gaat eindelijk bij uiterst lage temperaturen de magnetisatie misschien afnemen om bij het absolute nulpunt geheel te verdwijnen? ⁵⁾.

¹⁾ H. KAMERLINGH ONNES, Zittg. Versl. Juni 1906, Comm. from the Leyden labor. no. 94f (1906).

²⁾ H. KAMERLINGH ONNES, Commun. from the Leyden labor. Suppl. no. 9 p. 28.

³⁾ P. CURIE, Ann. chim. phys. (7) 5 (1895) p. 289.

⁴⁾ FLEMING en DEWAR Proc. Royal Soc. London 63, p. 311, 1898.

⁵⁾ Sedert is gebleken, dat de magnetisatie der ferromagnetische stoffen bij daling tot het smeltpunt van waterstof nog geen aanleiding geeft om aan te nemen, dat electronen, die door hun beweging de magnetisatie veroorzaken, aan de atomen zouden vastvriezen en derhalve dit verdwijnen bij het absolute nulpunt verwacht mag worden. (P. WEISS en H. KAMERLINGH ONNES, Zitt. Versl. Febr. 1910, Comm. from the Leyden Labor no. 114 p. 9).

Ziedaar vragen, die gevoegd bij de mogelijkheid om bij hooge drukkingen in het gebied waar de gasvormige aggregaatstoestand continu in den vloeibaren overgaat belangrijke bijdragen tot de kennis van den invloed van de dichtheid op de susceptibiliteit te verkrijgen, het ontwerpen van het zoeven genoemde beeld reeds uit een zuiver experimenteel oogpunt een aantrekkelijk werk maakte.

Aangevangen werd het echter eerst toen Prof. WEISS zijne onderzoekingen over het magnetisme ook tot het gebied der zeer lage temperaturen ging uitstrekken, en de, in de Zitting van Februari 11. medegedeelde metingen over de magnetisatie van de ferromagnetische en aanverwante stoffen bij zeer lage temperaturen¹⁾ ter hand genomen werden. Met dat onderzoek staat het onze, waaraan tegelijkertijd werd gewerkt, ook verder in het nauwste verband. Voor een deel maakten wij gebruik van dezelfde hulpmiddelen, Van de methode tot het bepalen van de magnetisatie met behulp van het maximum koppel²⁾ door een magnetisch veld van veranderlijke richting uitgeoefend op eene ellipsoïde van de te onderzoeken stof, die Prof. WEISS aangaf, en die de zoeven genoemde metingen deed slagen, hebben wij ook in ons onderzoek op verschillende wijze partij getrokken. En bovendien mochten wij ons voortdurend verheugen in den vriendschappelijken steun van Prof. WEISS, wien wij daarvoor ook hier onzen hartelijken dank brengen.

De verandering van de specifieke susceptibiliteit van de zuurstof met de temperatuur, waarop ons onderzoek in de eerste plaats gericht was, is van bijzonder belang geworden omdat de wet van CURIE uit de kinetische theorie van het magnetisme van LANGEVIN³⁾ volgt. Spoedig bleek ons, dat deze wet bij zuurstof niet, gelijk men meende, tot -183° C. geldt, maar dat zij voor lage temperaturen door eene andere vervangen moest worden. Volgens de belangrijke mededeeling van DU BOIS en HONDA in de Zitting van Januari 11. — onze proeven waren toen reeds afgelopen — worden er verscheidene elementen gevonden, voor welke bij temperaturen boven 0° C. de wet van CURIE niet geldt. Dit verhoogt natuurlijk het belang van de verkregen uitkomst en van het verder onderzoek van de zuurstof, waar over een bepaald gebied van temperatuur de wet van CURIE en over een ander gebied eene andere wet geldt, nl. die van *omgekeerde evenredigheid aan den wortel uit de absolute temperatuur*. De uitkomsten omtrent deze wet en omtrent een waarschijnlijken *sprong in de specifieke susceptibiliteit bij het overgaan in den vasten toestand* verkregen, worden in § 5 behandeld.

¹⁾ P. WEISS en H. KAMERLINGH ONNES. Zittg. Versl. Febr. 1910. Communic. fr. the Leyden labor. no. 114 (1910).

²⁾ P. WEISS. Journ. de phys. 4e série t. VI, p. 661; 1907.

³⁾ LANGEVIN. Ann. chim. phys. (8) 5, p. 70; 1905.

Behalve de verandering van de susceptibiliteit met de temperatuur heeft ons nog een andere vraag bezig gehouden, die zoowel door de uitkomsten van FLEMING en DEWAR als door de theorieën van LANGEVIN en WEISS was opgeworpen.

In proeven van de eersten is voldoende grond te vinden om te besluiten tot eene duidelijke afname van de susceptibiliteit met het toenemen van het veld (van de orde van 10% in een veld van 2500 gauss). Nu moeten volgens de theorie van LANGEVIN de paramagnetische stoffen dit verschijnsel inderdaad vertoonen, maar de berekening volgens zijne formules begrenst de grootte er van tot minder dan 0,1% voor het geval van vloeibare zuurstof bij haar kookpunt. Vond men een hooger bedrag dan zou men tot de onderstelling komen dat een moleculair veld van WEISS¹⁾ ontstaat. Wij hebben onze proeven er op ingericht om de vloeibare en vaste zuurstof aan 16000 gauss, een veel (ruim zes maal) sterker veld dan FLEMING en DEWAR gebruikten, te onderwerpen, zoodat wij mochten verwachten, dat het verschijnsel, dat zich bij hunne proeven voerde, zich bij de onze ook reeds bij de door hen gebruikte temperaturen, veel sterker zou moeten vertoonen. Wanneer het door FLEMING en DEWAR waargenomene werkelijk aan een begin van verzadiging mocht worden toegeschreven, dan was volgens de theorie verder te verwachten, dat het met het dalen der temperatuur sterk zou toenemen (oneindig bij $T=0$) en bij onze proeven in vloeibare waterstof zeer in 't oog vallend zou worden. Wij hebben niet anders dan kleine afwijkingen gevonden, die in § 5 nader behandeld zijn.

Wat de experimenteele methoden betreft, welke wij bij ons onderzoek hebben toegepast, zoo waren het twee in beginsel geheel verschillende: de magnetische aantrekking uitgeoefend op een vloeistofzuil eenerzijds, de methode van het maximumkoppel van een homogeen veld op eene ellipsoïde anderzijds. De tweede methode is meer in 't bijzonder geschikt voor vergelijkende proeven en laat zich ook toepassen op bevroren zuurstof, de eerste kan alleen op de vloeibare phase worden toegepast, daartegenover staat dat zij zeer vertrouwbare absolute metingen mogelijk maakt. Wij hebben haar dan ook tot grondslag van onze andere bepalingen genomen.

In de uitvoering van beide methoden is nog het een en ander te wenschen overgebleven. Terwijl wij bezig zijn ons onderzoek voort te zetten, stellen wij ons tevens voor het gedeeltelijk te herhalen ten einde door in achtneming van nieuwe mogelijk gebleken voorzorgen de nauwkeurigheid der verkregen uitkomsten te verhoogen.

¹⁾ WEISS, L'hyp. du champ moléc. loc. cit.

Vloeibare zuurstof. I.

§ 2. *Methode der stijghoogten.* Gelijk boven vermeld werd, hebben wij de methode van opstijging die door QUINCKE, DU BOIS en andere waarnemers gebruikt is, voor lage temperaturen geschikt gemaakt.

Het eene been van een verticaal geplaatste O-vormige buis, waarvan het bovendeel de gasvormige en het benedendeel de vloeibare phase van het te onderzoeken vloeibaar gemaakte gas bevat, wordt tusschen de polen van een magneet met horizontaal veld gebracht.

Zij H het veld, (H' het veld in het andere been wordt zoo klein ondersteld dat $(H'/H)^2$ verwaarloosd mag worden), g de versnelling der zwaartekracht, z het hoogteverschil der vloeistofspiegels onder den invloed van H , ρ en ρ_0 de dichtheden van de vloeibare en de gasvormige phase, K en K_0 de volume susceptibiliteit van deze, dan is

$$(K - K_0) H^2 = 2z (\rho - \rho_0) g \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

of bij invoering van de absolute specifieke susceptibiliteit χ

$$(\chi \rho - \chi_0 \rho_0) H^2 = 2z (\rho - \rho_0) g.$$

Is $\chi = \chi_0$ dan wordt de vergelijking eenvoudig

$$\chi = \frac{2zg}{H^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welke formule wij voor onze berekeningen gebruikt hebben ¹⁾.

De voordeelen welke deze methode in beginsel bij hare toepassing op eene vloeistof in evenwicht met den eigen damp aanbiedt, vallen, vooral voor eene absolute meting, in het oog. Men heeft immers slechts twee grootheden te meten, de lengte z , die met een kathetometer zeer nauwkeurig te bepalen is, en het veld H . Ook behoeft men de dichtheid der vloeistof niet te kennen om de specifieke susceptibiliteit te vinden.

Opstijgingstoestel. Het te weeg brengen van eene opstijging onder den invloed der magnetische aantrekking, hetgeen bij een gewone vloeistof een hoogst eenvoudige bewerking is, brengt groote bezwaren mede wanneer men met een vloeibaar gemaakte gas te doen heeft. Men moet het koken volstrekt vermijden en zorgen, dat de verdamping onbetekenend is. Het eerste omdat de beweging van vloeistof en vloeistoffoppervlak het instellen volstrekt onmogelijk zou

¹⁾ In § 5 worden de redenen opgegeven, waarom wij meenen, dat $\chi = \chi_0$ is en zoo dit niet het geval mocht zijn met zeer groote waarschijnlijkheid toch $\chi_0 < 1.5 \chi$; in het allerongunstigste geval bij het kookpunt blijft de correctie reeds beneden 0,002, bij lagere temperaturen is zij geheel te verwaarloozen wegens de geringe waarde van ρ_0 .

maken, het tweede omdat gedurende de meting van eene opstijging de geheele vloeistofhoeveelheid niet merkbaar veranderen mag. Verder komen de magnetische werkingen zelf de moeilijkheden vergrooten: het is gemakkelijk in te zien, dat zij de vorming van gasbellen in de hand kunnen werken, die de vloeistofkolom in tweeën verdeelen, zoodat het eene deel tusschen de polen blijft hangen en het andere terug valt. Van het meten van eene opstijging kan er dan geen sprake meer zijn. Uitgaande van den thermodynamischen potentiaal blijkt, dat overal

$$2g y \rho > k (H^2 - H_y^2)$$

moet zijn, wanneer H het veld aan het vloeistofoppervlak en H_y het veld ter hoogte y onder het vloeistofoppervlak is. Deze voorwaarde stelt o. a. een grens aan de intensiteit van de velden in welke men meten kan, want zij vordert een groote uitgestrektheid van het veld (althans in verticalen zin). Conische poolstukken zijn dus van zelf uitgesloten.

Na eenige voorloopige proeven werd een toestel geconstrueerd, waarvan het voornaamste deel een concentrisch dubbele, dubbelwandige U-vormige vacuumbuis was, met welke het gelukte reeds vrij bevredigende metingen te verrichten. De wanden van die dubbele vacuumbuis waren niet verzilverd, zoodat nagegaan kon worden hoe de vloeistof zich bij de proeven gedroeg. Op grond van de opgedane ervaring werd vervolgens de verbeterde toestel ingericht die wij thans gaan beschrijven.

Men zal zien dat zij aan de glasblaaskunst een vrij zwaar vraagstuk stelde¹⁾. Het voornaamste deel vormen weer twee afzonderlijke concentrische in elkaar passende U-vormige vacuumglazen. De dubbele wanden van beide zijn aan de vacuumzijde geheel verzilverd behalve de binnenste buis, over de lengte, waar de vloeistof opstijgt, en de buitenste voor zoover dit noodig is om een strook van eenige millimeters breedte vrij te laten, door welke men op de vloeistof kan instellen. Een van de twee buizen omgeeft de andere geheel voor zoover deze vloeistof bevat; dit is de beschermingsbuis. Het nauwste deel M_1 , fig. 1 wordt gebracht tusschen de polen van de electromagneet (fig. 2). Het nauwe been van de binnenbuis moet natuurlijk zeer zuiver cylindrisch zijn. Het andere been is verwijd, en dient als reservoir. Om de formule (2) toe te kunnen passen is er alle zorg aan besteed, dat de temperatuur van de vloeistof en ook van den damp zoowel in het wijde als in het nauwe tot iets grootere hoogte als de op-

¹⁾ De dubbele vacuumbuis werd vervaardigd door den Heer KESSELING, glasblazer, het overige door den Heer FLUX, ananimensis aan het laboratorium.

geheven vloeistofkolom bereikt overal dezelfde is en dat verder, waar de temperatuur van den damp boven de vloeistof in het bovenste deel verandert en tot de gewone temperatuur overgaat, deze in de twee beenen van de O ruimte op een zelfde hoogte zooveel mogelijk gelijk is. De vloeistof in de binnenbuis wordt daartoe met behulp van het magneetveld zelf geruimen tijd bij standvastig gehouden dampdruk op en neer bewogen, totdat men mag aannemen, dat in deze buis het evenwicht voldoende bereikt is. Om dit mogelijk te maken wordt de binnenbuis omspoeld door vloeistof van dezelfde temperatuur als de vloeistof in de binnenbuis moet aannemen. In de buitenste of beschermingsbuis wordt de vloeistof voortdurend in beweging gehouden door een roerder bestaande uit een messingring S_1 , die op en neer kan worden bewogen, wat, terwijl de ruimte gesloten blijft kan geschieden, doordat S_2 een rekbaar caoutchouc buisje is. De verdamping in de binnenbuis is dan ook zeer gering (tusschen 0,5 en 1 Liter gas onder normalen druk gemeten ontwijkt per uur).

Niettegenstaande al deze voorzorgen zullen temperatuurverschillen zijn overgebleven. In de vloeistof, waarin men door op meegevoerde stoffjes te letten de convectiestroomen, die het warmte-evenwicht onderhouden, kan volgen, zullen zij slechts zeer gering zijn geweest. In de gaslagen boven in de O-vormige ruimte zullen wel aanzienlijke verschillen hebben bestaan, maar door de geringe dichtheid van het gas daar ter plaatse hebben zij weinig invloed op het niveauverschil in beide beenen en buitendien valt die invloed bijna geheel weg, daar de bepaling geschiedt door de waarneming zonder en met veld te vergelijken. Nu is er voor gezorgd, dat de temperatuur zoover de vloeistof opstijgt slechts weinig verschillen kan, terwijl in de bovenste lagen der buis bij beide waarnemingen nagenoeg dezelfde toestand gehandhaafd blijft. Wij hebben de correctie, die voor mogelijke temperatuurverschillen nog aan te brengen zou zijn, verwaarloosd.

Het vergelijken van den stand der vloeistof in de nauwe cilindrische buis met en zonder veld brengt ook de correctie voor de capillariteit tot die voor onbeduidende vormverschillen van de menisci terug, welke wij eveneens verwaarloosd hebben.

De binnenbuis zoowel als de beschermingsbuis zijn beide onafhankelijk van elkander gesloten door de nieuwzilveren kappen P_1, P_4, Q_1, Q_4 , fig. 1. De luchtdichte verbinding wordt met behulp van de caoutchouc ringen M_0, N_0 verkregen. De beide buizen worden op deze wijze tevens tot een stevig geheel vereenigd.

Voor het inschenken van de vloeibare zuurstof dient bij de beschermingsbuis het buisje P_5 , bij de binnenste buis het buisje Q_5 .

De twee buizen P_3 en Q_3 voeren de verdampte zuurstof langs de kranen P_4 en Q_4 (fig. 2) naar twee gashouders. Twee manometers P_6 en Q_6 , de laatste nog voorzien van een verklekker Q_7 , om kleine dampspanningen nauwkeurig te kunnen aflezen, dienen tevens als veiligheidsbuizen. De zuurstof in de beschermingsbuis behoeft niet zoo zuiver te zijn als die in de binnenste buis. Voor de laatste, met welke de waarnemingen geschieden, werd zeer zuivere gebruikt.

Om gemakkelijk den toestel teikens zoo te stellen, dat de meniscus in de meetbuis juist opklimt tot het punt in het veld tusschen de polen, gewoonlijk in de as der poolstukken, waar men er op wenscht in te stellen, dient een drievoudige sleebeweging R .

Loop van eene waarnemingsreeks. Men brengt het veld op de gewenschte grootte en maakt met behulp van R , dat de meniscus opstijgt tot het gekozen punt, dat afgelezen wordt met behulp van een schaalte. Daarna laat men den meniscus verscheidene malen open neergaan, waarbij gezorgd wordt, dat het veld langzaam aangroeit. Dit geschiedt om de temperatuur overal gelijk te maken en den wand te bevochtigen. Men leest dan terwijl het veld de gewenschte waarde heeft, den stand van den meniscus af; daarna doet men eene aflezing terwijl het veld afgezet is; dan, nadat men den meniscus 3 maal iets hooger dan den af te lezen stand heeft laten opstijgen, weer eene aflezing terwijl het veld aangezet is; dan weer terwijl de stroom verbroken is, en zoo vervolgens eenige malen. Op die wijze elimineert men de fout die het gevolg zou zijn van verdamping van de vloeistof tijdens het instellen van den kathetometer¹⁾. Het is niet noodig den stand van het niveau in het andere been van de buis te kennen; om met de veranderingen ervan rekening te houden, werd de verhouding der doorsneden der twee beenen gemeten.

We hebben ons verder ervan verzekerd, dat het remanente veld geen merkbaaren invloed op den stand van den meniscus na onderbreking van den stroom uitoefende. Daartoe werd door de windingen een zwakke stroom in tegengestelden zin als degene die juist verbroken was, gezonden. Indien het remanente veld een merkbaaren invloed had uitgeoefend, zou men eerst eene verdere daling van het niveau, daarna eindelijk weder eene stijging hebben moeten waarnemen, als de stroom bij kleine stappen tegelijk versterkt werd. Dit is nooit geconstateerd.

Dezelfde electromagneet werd gebruikt als bij het cryomagnetische

1) Ten einde de verandering van den stand van den meniscus zonder veld controleeren hebben we de hoeveelheid, die verdampt, gemeten (zie vorige blz.).

onderzoek ¹⁾ der ferromagnetische metalen, waarheen wij voor de constructieve bijzonderheden verwijzen. Het was alleen noodig de kegelvormige poolstukken te vervangen door cilindrs met platte eindvlakken. Hun afstand werd op 25 mm. micrometrisch ingesteld en met een nauwkeurigen caliber gecontroleerd. Wij merken hierbij op dat tusschen de meting van de opstijging en die van het veld, aan den stand der poolstukken, die geheel vastgeschroefd waren, niets is veranderd, zoodat het instellen van den afstand geene fout heeft kunnen geven.

Daar bij de berekening de veldsterkte tot de tweede macht verheven optreedt, en het om eene absolute meting te doen is, hebben we getracht de betrouwbaarheid van de meting der veldsterkte zoo hoog op te voeren als met de tegenwoordige hulpmiddelen bereikbaar is. Daartoe hebben we met de grootste zorg en volgens twee verschillende methoden een willekeurig gekozen standaardveld gemeten, en de bij onze proeven gebruikte velden met dit standaardveld vergeleken door achtereenvolgens dezelfde klos verbonden met een ballistischen galvanometer uit het standaardveld en uit de verschillende te meten velden weg te trekken.

Het standaardveld werd teweeggebracht met dezelfde platte poolstukken op een afstand onderling van 9 mm. en met eene stroomsterkte van 5 amp. Alle voorzorgen waren genomen om den magnetischen kring van te voren te ontmagnetiseeren. Dit veld werd in de eerste plaats gemeten met behulp van de magnetische balans van COTTON ²⁾.

Gelijk bekend, bestaat deze methode daarin dat door middel van gewichten met de totale massa m evenwicht gemaakt wordt met de ponderomotorische werking van het veld H op een rechtlijnig stuk ter lengte l van een geleider waardoor een stroom met de intensiteit i gaat; dan is

$$H = \frac{m \cdot g}{i \cdot l} \cdot 10.$$

Bij de nauwkeurigheid, die wij wenschten te bereiken, moesten echter verschillende correcties in rekening gebracht worden. In de eerste plaats zijn de elementen van de balans nauwkeurig uitgemeten. Met micrometerschroeven en op de verdeelmachine zijn bepaald de lengte van het stroomelement l , en de onderlinge afstand der bogen van de balans, die daar deze nauwkeurig concentrisch behoorden te

¹⁾ P. WEISS en H. KAMERLINGH ONNES, l. c.

²⁾ Zie over deze methoden voor het meten van het veld en over de magnetische balans: P. WEISS en A. COTTON, Le phénomène de ZEEMAN pour les trois raies bleues du zinc, Bull. Séances Soc. franç. de phys. 1907, p. 140, ook J. de phys. 1907.

zijn, overal gelijk moest zijn. Met de zeer kleine afwijkingen hiervan werd rekening gehouden door middel van een ballistisch onderzoek van de topografie van het veld. De hefboomsarmen resp. der gewichten en van het stroomelement, zijn met den kathetometer gemeten. De topografische studie van het veld leerde ook de correctie kennen noodig wegens de kracht die nog op het tweede rechte lijnige element van de balans (n.l. dat buiten het interferrum) werkt. Het totaal van deze positieve of negatieve correcties bedroeg eenige promilles.

De grootste zorg moest worden besteed aan de absolute waarde van i , die gemeten werd met behulp van een nauwkeurigen ampèremeter van SIEMENS en HALSKE. Deze is in absolute ampères geijkt door met den potentiometer het potentiaalverschil tusschen de polen van een internationalen Ohm (resp. 0.1Ω) te vergelijken met de electromotorische kracht van een WESTON-cadmiumelement. Bij de nauwkeurigheid der metingen waren ook de invloeden van naburige instrumenten of stroomen op den ampèremeter, zoomede van den stand van dezen in het aardmagnetische veld, geenszins te verwaarloozen; zij zijn bijna geheel opgeheven door eene geschikte regeling der afstanden en richtingen der rheostaten en de mogelijkerwijze overgebleven fouten geëlimineerd door *alle stroomgeleiders* zoodanig te verbinden dat de stroomen *overal te gelijk*, uitgezonderd in de ampèremeters, konden omgekeerd worden. Ten slotte hebben wij de ampèremeters steeds gebruikt in denzelfden stand ten opzichte van het aardmagnetische veld, als waarin zij geijkt zijn.

Nadat alle berekeningen en correcties uitgevoerd waren, bleek de sterkte van het standaardveld volgens deze methode te zijn 9857 gauss.

De *tweede methode*, volgens welke ditzelfde veld bepaald is geworden, bestaat uit het plotseling uit het interferrum wegtrekken van eene draadklos met bekend omstroomb oppervlak. De aldus veroorzaakte verandering van het aantal inductielijnen hetwelk door de klos omvat wordt, werd door middel van een ballistischen galvanometer vergeleken met het aantal inductielijnen van eene solenoïde waarvan de afmetingen zeer nauwkeurig bekend zijn.

De draadklos werd gevormd door een cylinder van eboniet, diameter 20 mm., waarop aangebracht waren 19 windingen van met zijde geïsoleerden draad dik 0.25 mm. De afmetingen zijn vastgesteld door verschillende metingen met de micrometerschroef en de deelmaehine, en herhaaldelijk gecontroleerd; tegelijkertijd was eene controleklos vervaardigd, door blanken koperdraad te wikkelen in een schroefvormige gleuf aangebracht op het zijdelingsch oppervlak van een ebonieten cylinder; daarna is het omstroomb oppervlak van deze controleklos uitgemeten volgens dezelfde methoden en met dezelfde

voorzorgen als dat van de eerste. De verhouding viel samen met de verhouding der uitwijkingen van den ballistischen galvanometer, die verkregen werden doordat de twee klossen echter elkander in diens stroomkring waren opgenomen en ze daarna achtereenvolgens uit een onveranderd magnetisch veld werden weggetrokken. Wij vermelden nog dat tevoren geverifieerd was, dat het eboniet voldoende vrij was van magnetische eigenschappen, door middel van een toestel volgens CURIE, waarbij gebruik gemaakt wordt van de aantrekking in een niet-uniform veld.

Voor de meting van het veld werd in den stroomkring van den galvanometer opgenomen de klos op ebonieten cylinder, een manganin-weerstand tot regeling van de gevoeligheid, een secundaire klos van 500 windingen die om de ijksolenoïde geschoven was, en eindelijk eene electromagnetische inrichting om naar verkiezing te dempen. Rekening werd gehouden met de zeer kleine afwijkingen van de evenredigheid tusschen de uitslagen van den galvanometer en de hoeveelheden electriciteit, welke afwijkingen door een voorafgaand onderzoek van den galvanometer (type DEPREZ-D'ARSONVAL) bepaald waren. De solenoïde met kern van wit marmer en wikkeling van blanken koperdraad was uiterst nauwkeurig bewerkt ¹⁾.

De ijking van den galvanometer geschiedde door omkeering van den stroom van de solenoïde; de waarnemingen door wegtrekken van de klos uit het veld zijn steeds tusschen twee ijkingen ingesloten; deze hebben trouwens geen waarneembare verandering van de constante van den galvanometer aangewezen. De correcties en voorzorgen betreffende de stroomsterkten, zijn dezelfde als voor de balans, en zijn boven beschreven. De einduitkomst van deze ballistische methode is

9845 gauss.

Het relatieve verschil met de waarde 9857, geleverd door de balans van COTTON, is dus 0,0012; dit kan als te verwaarloozen beschouwd worden wanneer men bedenkt, dat bijna elke der talrijke metingen, die zoowel de eene als de andere methode vereischt, reeds te beginnen met het instellen van het veld door middel van den ampèremeter, 0,0005 als nauwkeurigheids grens hebben. Het kan zijn nut hebben hier eene bijzonderheid op te merken, die het verkrijgen van die overeenstemming moeilijk maakt en daarmede tevens het vertrouwen in de juistheid der verkregen waarden kan vergrooten.

¹⁾ Voor de afmetingen en de beschrijving van de solenoïde en van den galvanometer zie men: P. WEISS, *Mesure de l'intensité d'aimantation à saturation en valeur absolue*, Arch. Sc. phys. et nat. Februari 1910, J. de phys. Maart 1910.

De formule voor de balans van Corrox bevat de stroomsterkte in den *noemer* terwijl deze grootheid bij de berekening volgens de ballistische methode in den *teller* voorkomt; eene systematische fout in het *absolute* aantal ampères zou dus noodzakelijk medebrengen een *tweemaal zoo groot* relatief verschil tusschen de waarden van het veld verkregen volgens de beide methoden (dezelfde ampèremeter heeft gediend bij de balans en bij de solenoïde).

We hebben aan de ballistische methode een iets grooter gewicht toegerekend wegens het minder groot aantal correcties dat zij vereischt, en aldus ten slotte voor het standaardveld aangenomen

9850 gauss.

Toen dit veld eenmaal vastgesteld was, konden alle andere metingen zeer vlug volgens de ballistische methode als boven beschreven geschieden. Voor de kegelvormige poolstukken, die aangewend zijn bij de proeven volgens de methode van het koppel, en die een belangrijk sterker doch veel minder uniform veld geven, hebben wij gebruik gemaakt van een klos met 7 à 8 mm. diameter, nauwkeurig in de as der poolstukken geëentreerd; hierbij was het niet mogelijk direct met het bovenvermelde veld te vergelijken omdat de vlakke poolstukken waren afgeschroefd moeten worden om plaats te maken voor de kegelvormige. Voor dit geval is eens voor al het omstroomde oppervlak van de kleine klos bepaald door deze uit het standaardveld te trekken *voordat* de vlakke poolstukken waren afgeschroefd, en de aldus veroorzaakte verandering van het aantal inductielijnen met den ballistischen galvanometer te vergelijken met die van de solenoïde.

Alle metingen, die tot hiertoe vermeld zijn, hadden betrekking op het veld in het centrum van het interferrum. Voor de enkele groote waarden van het veld en bijgevolg van de opstijging van de vloeibare zuurstof, waarbij het noodig was het bovenoppervlak belangrijk boven de as der poolstukken te doen stijgen, is het veld in die punten bepaald door eenvoudige ballistische vergelijking met de velden in de as, waarbij wij ons van den kathetometer bedienden om de plaats van de kleine klos vast te stellen.

Uitkomsten der waarnemingen en berekingen.

Waarnemingsreeks met den toestel met niet verzilverde wanden.

T A B E L Ia.

 $t = -183^{\circ}.0 \text{ C. } ^1)$

Stand van meniscus.	waargen. opstijging z' in cm.	hoogteverschil met reservoir z in cm.	H in gauss.	$\frac{z}{H^2} \cdot 10^7$
gelijk met as	1.032	1.061	2980	1.194
„	1.646	1.690	3727	1.216
„	1.656	1.701	3727	1.224
as + 2.44 cm.	3.024	3.110	5182	1.158
as	3.198	3.289	5205	1.214
„	4.16	4.278	5848	1.251
as + 2.44	4.90	5.050	6570	1.168
as	5.124	5.270	6600	1.210
as + 2.44	7.87	8.094	8075	1.242
as + 2.44	9.20	9.462	9043	1.158*

Het hoogteverschil z wordt verkregen uit de afgelezen opstijging met $z = z' (1 + 0,0285)$. De waarneming * werd zeer bemoeilijkt en is weinig betrouwbaar.

De afwijking bij de waarneming in een veld van 5182 gauss, is waarschijnlijk aan een fout van 1 in het aantal geheele millimeters bij de aflezing te wijten, intusschen staat dit niet vast.

De afwijkingen van evenredigheid met H^2 zijn aanzienlijk maar volstrekt niet systematisch. Nemen wij het gemiddelde van alle waarnemingen met uitzondering van de laatste, waar bijzondere moeilijkheden werden ondervonden zoo komt

$$\frac{z}{H^2} = 1.209 \cdot 10^{-7},$$

en voor de specifieke susceptibiliteit met $g = 981.3$ voor Leiden

$$\chi_{90^{\circ}.1 \text{ K.}} = 237.3 \cdot 10^{-6}$$

¹⁾ Het kookpunt van zuurstof volgens H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK Zittingsversl. Mei '08. Comm. fr. th. Leyden labor. N^o. 107a § 6.

TABEL 1b.

 $t = -201^{\circ}.75 \text{ C.}$

Stand van meniscus.	waargen. opstijging z' in cm.	hoogteverschil met reservoir z in cm.	H in gauss.	$\frac{z}{H^2} \cdot 10^7$
gelijk met as	1.192	1.222	2980	1.376
"	1.893	1.944	3727	1.399
"	1.881	1.935	3727	1.393
"	3.643	3.747	5205	1.383
"	4.623	4.752	5848	1.389
"	5.91	6.078	6600	1.395
as + 2.5 cm.	7.376	7.586	7421	1.378
as + 2.5 cm.	8.715	8.963	8069	1.372

$$\text{gemiddeld } \frac{z}{H^2} = 1,386 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{waaruit volgt } \chi_{71^{\circ}.35 \text{ K.}} = 272,0 \cdot 10^{-6}.$$

Eindelijk werd bij $-209^{\circ}.2 \text{ C.}$ een enkele waarneming verricht. De opstijging was 6.115 cm. in een veld van 6600 gauss, wat met behulp van de correctie van de daling in het reservoir geeft

$$\frac{z}{H^2} = 1,444 \cdot 10^{-7} \text{ en } \chi_{63^{\circ}.9 \text{ K.}} = 283,4 \cdot 10^{-6}$$

Hier volgen nu de waarnemingsreeksen met den beschreven toestel met verzilverde wanden.

TABEL IIa.

 $t = -183^{\circ}.0 \text{ C.}$

Stand van meniscus.	waargen. opstijging z' in cm.	hoogteverschil met reservoir z in cm.	H in gauss.	$\frac{z}{H^2} \cdot 10^7$
as	1.060	1.090	2980	1.227
"	1.669	1.716	3727	1.235
"	3.169	3.258	5183	1.213
"	3.220	3.310	5198	1.225
"	4.035	4.148	5807	1.230
"	4.093	4.208	5848	1.230
"	4.101	4.216	5848	1.233
"	5.119	5.262	6578	1.216
as + 2.5 cm.	7.750	7.967	8075	1.224
id.	8.950	9.201	8659	1.227
as + 3.5 cm.	9.226	9.484	8808	1.222
id.	9.266	9.525	8808	1.228

Bij dezen toestel was $z = z'(1 + 0,0280)$.

Het gemiddelde van $\frac{z}{H^2}$ geeft $1,226 \cdot 10^{-7}$, waaruit volgt

$$\chi_{90^{\circ}.1 \text{ K.}} = 240,6 \cdot 10^{-6}.$$

T A B E L IIb.

 $t = -201^{\circ}.75$

Stand van meniscus	waargen. opstijging z' in cm.	hoogteverschil met reservoir z in cm.	H in gauss	$\frac{z}{H^2} \cdot 10^7$
as	1.195	1.228	2980	1.383
"	1.879	1.932	3727	1.391
"	3.625	3.726	5205	1.375
"	4.567	4.695	5848	1.373
as + 3.5 cm.	5.461	5.614	6399	1.371
as + 2.5 cm.	5.832	5.995	6567	1.390
as	5.852	6.016	6600	1.381
as + 3.5 cm.	6.463	6.644	6986	1.365
as + 2.5 cm.	6.899	7.092	7169	1.380
as + 3.5 cm.	8.207	8.437	7863	1.365
as + 2.5 cm.	8.654	8.892	8069	1.366
as + 3.5 cm.	8.988	9.240	8212	1.370
as	8.913	9.162	8212	1.358

Gemiddelde van alle waarnemingen 1.375, waaruit volgt

$$\chi_{71^{\circ}.35 \text{ K.}} = 269.9 \cdot 10^{-6}$$

T A B E L IIc.

 $t = -208^{\circ}.2 \text{ C.}$

Stand van meniscus	Waargen. opstijging z' in cm.	hoogteverschil met reservoir z in cm.	H in gauss	$\frac{z}{H^2} \cdot 10^7$
as	1.277	1.313	2980	1.478
"	1.996	2.052	3727	1.477
"	3.813	3.920	5205	1.447
"	4.841	4.977	5848	1.461
as + 2.5 cm.	6.012	6.180	6567	1.433
as	6.094	6.264	6600	1.438
"	6.113	6.284	6600	1.443
as + 2.5 cm.	7.446	7.346	7169	1.429
as + 3.5 cm.	8.579	8.819	7863	1.426

Gemiddelde van alle waarnemingen 1.448, waaruit volgt

$$\chi_{61^{\circ}.9 \text{ K.}} = 284.2 \cdot 10^{-6}$$

Teneinde daaruit de susceptibiliteit af te leiden werd de dichtheid van de vloeibare zuurstof berekend met de formule ¹⁾

$$\rho = 1.2489 - 0.00481 (T - 68).$$

Uit tabel II leiden we af:

$$K_{90^{\circ}.1 \text{ K.}} = 275.2 \cdot 10^{-6}$$

$$K_{71^{\circ}.35 \text{ K.}} = 332.8 \cdot 10^{-6}$$

$$K_{61^{\circ}.9 \text{ K.}} = 359.0 \cdot 10^{-6}.$$

Tabel III geeft voor elk der temperaturen en voor elk der twee reeksen $\chi\sqrt{T}$.

Reeks met den eersten toestel.			Reeks met den verbeterden toestel.		
T	$\chi \cdot 10^6$	$\chi\sqrt{T} \cdot 10^3$	T	$\chi \cdot 10^6$	$\chi\sqrt{T} \cdot 10^3$
90.1	237.3	2.25	90.1	240.6	2.283
71.35	272.0	2.29	71.35	269.9	2.279
63.9	283.4	2.26	64.9	284.2	2.289
gemiddelde		2.27			2.284

In het product $\chi\sqrt{\tau}$ is geen systematische verandering op te merken; de grootste afwijking van het gemiddelde bedraagt 1% bij den eersten toestel, en slechts $\frac{1}{4}\%$ bij den verbeterden; verder zijn de afwijkingen in de twee reeksen bij overeenkomstige temperaturen in tegengestelden zin. Binnen de nauwkeurigheidsgrenzen der waarnemingen kan dus de specifieke susceptibiliteit worden voorgesteld door de formule

$$\chi = \frac{2284}{\sqrt{T}} \cdot 10^{-6}.$$

Bij de relatieve metingen die hierna beschreven zullen worden, zullen we dezelfde wet, althans wat den vorm betreft, terug vinden. Voor de discussie verwijzen we naar § 5.

De afwijkingen tusschen de verschillende verhoudingen $\frac{\chi}{T^2}$ zijn grooter dan men volgens de nauwkeurigheid, die bij de waarneming

¹⁾ Baly en DONNAN. J. Chem. Soc. 81 (1902) p. 907.

der verplaatsingen van het niveau met den kathetometer bereikt is (0,05%), en volgens die bij de meting van de veldsterkten, waarvan de discussie boven gegeven is, zou verwachten. Het is zeker dat de oorzaak dier afwijkingen ergens anders dan bij de meting dier twee gegevens moet gezocht worden, zonder dat reeds nu met zekerheid kan worden aangegeven waar.

Wij merken intusschen op dat althans van de eerste reeks de bewegelijkheid van den toestel in verticalen zin in het niet geheel homogene veld en het niet geheel constant zijn van de temperatuur zeker tot die afwijkingen hebben bijgedragen, daar de tweede toestel, die uitsluitend in deze twee richtingen was verbeterd, veel regelmatigere uitkomsten heeft gegeven. Deze opmerking schijnt echter niet voldoende om volkomen rekenschap te geven van eenige opmerkelijke veranderingen die geconstateerd zijn, zonder dat daarmede eenige bemerkbare onregelmatigheid in den druk of in de convectiestrooming der vloeistof correspondeerde, terwijl ook geene vervorming van den meniscus in 't oog viel.

Vloeibare zuurstof II.

§ 3. *Bepalingen volgens de methode van het op eene ellipsoïde uitgeoefende maximumkoppel.* Met behulp van het door een uniform veld op eene ellipsoïde uitgeoefende maximumkoppel zijn verder relatieve metingen voor vloeibare zuurstof bij verschillende temperaturen verricht. Deze methode is reeds beschreven en bediscussieerd ten behoeve van het onderzoek der ferromagnetische stoffen ¹⁾; het zal voldoende zijn alleen de wijzigingen te behandelen, die door de bijzondere omstandigheden waaronder die methode bij dit onderzoek toegepast moest worden, noodig bleken.

In de eerste plaats is het wegens de kleine waarde der susceptibiliteit noodig het te meten koppel zoo groot mogelijk te maken; daartoe hebben we eene *afgeplatte* omwentelingsellipsoïde, in plaats van eene gerekte gekozen, en de omwentelingsas horizontaal geplaatst in het om eene verticale as draaiende veld.

Het is niet onverschillig welke verhouding tusschen de assen genomen wordt: bij gegeven groote as is het koppel, dat evenredig is aan $(N_1 - N_2)r$, maximaal voor eene verhouding van de groote tot de kleine as, die slechts zeer weinig kleiner is dan 3; wij hebben derhalve deze verhouding van de constructie der ellipsoïdes aangenomen.

¹⁾ P. WEISS, J. de phys. (4) 6 (1907) p. 655. P. WEISS en H. KAMERLINGH ONNES, Meded. N^o. 114, Zittingsversl. Februari 1910 p. 768.

Dezelfde electromagneet werd gebruikt, die voor de metingen van WEISS en KAMERLINGH ONNES (l.c.) gediend heeft. Wij hebben twee paren poolstukken gebruikt: ten eerste de cilindrische poolstukken met geheel platte eindvlakken die bij de metingen der stijghoogte gediend hebben, vervolgens afgeknot kegelvormige poolstukken waarvan de voorvlakken (een weinig uitgehold, vergel. hieromtrent p. 956) eene middellijn van 4 cM. hebben, en de zijvlakken door middel van convexe omwentelingsoppervlakken overgaan in de cylinders van 9 cM. middellijn, die de kernen vormen. Deze poolstukken zijn geconstrueerd ten einde bij den poolafstand, die op 20 mM. aangenomen werd, een zoo sterk mogelijk veld te verkrijgen; hiermede werd een veld van ongeveer 16000 gauss bereikt.

Onze waarnemingen hadden betrekking op eene ellipsoïde die diamagnetisch was ten opzichte van het omgevende medium, namelijk eene massief zilveren ellipsoïde gedompeld in een bad van vloeibare zuurstof. De ellipsoïde was door de „Société genevoise pour la construction d'instruments de physique" gedraaid uit een blok zeer zuiver zilver van MERCK; eene voorafgaande proef had geleerd dat zij ten opzichte van lucht eene zeer zwakke diamagnetische susceptibiliteit, die geheel te verwaarloozen is ten opzichte van die in vloeibare zuurstof, bezit. De assen, gemeten met behulp van een microscoop op de verdeelmachine, zijn

groote as 1,0973 cM. omwentelingsas 0,3654 cM.

Bovendien zijn op de verdeelmachine gemeten twee intermediaire ordinaten evenwijdig aan de omwentelingsas; zij waren 2% groter dan de corresponderende ordinaten van eene zuivere ellips met dezelfde assen. Deze afwijking van de ellipsoidische gedaante wordt bevestigd door eene directe bepaling van het volume uit het gewicht en de dichtheid; deze gaf

0.2329 cm³

terwijl de berekening uit de meting der assen zou geven

0.2308 cm³.

Voor de berekeningen is gebruik gemaakt van de waarde 0.2329.

De cryogene toestel, in beginsel dezelfde als die van WEISS en KAMERLINGH ONNES, is voorgesteld op Pl. I fig. 3. Wij zien weder het omhulsel *B*, de stelbuis *f'* en den drager *b'*. Het omhulsel met al zijn onderdeelen: kop met pakkingbus *D*, glazen buis *C*, venster met plan-parallele glasplaat *C*₂, systeem *BC* voor het stellen van den geheelen toestel, trekstangen *B*₄ voor het bevestigen van de DEWAR-buis, heliumthermometer *θ*, schermpjes die het bovengedeelte van den toestel tegen afkoeling beschutten, enz., is geheel hetzelfde.

De DEWAR-buis heeft denzelfden vorm, doch heeft een benedengedeelte met grooteren diameter. De stelbuis f'' verschilt slechts van die der aangehaalde onderzoeken, doordat de diameter van het geheele benedengedeelte f_9' grooter is.

De *drager* en de *veer* zijn daarentegen geheel verschillend. Wegens de kleinheid der te meten koppels moesten alle parasitische magnetische werkingen zoo zorgvuldig mogelijk buitengesloten worden. Voorafgaande proeven hebben overvloedig aangetoond, dat een metalische drager niet bruikbaar was, niet alleen wegens sporen van para- of ferromagnetische bijmengselen die in metalen, die bewerkt kunnen worden, nooit ontbreken, maar ook wegens de moeilijkheid hun oppervlak voldoende rein te houden; deze moeilijkheid is herhaaldelijk geconstateerd bij de zilveren ellipsoïde, die voor de proeven gediend heeft; de voortdurende aanraking van de handen met ijzeren gereedschappen speelt daarbij waarschijnlijk eene rol. Glas bleek verreweg de meest geschikte stof en door de afwezigheid van eigen magnetisme, en doordat zijn oppervlakte wegens hare gladheid geen onzuiverheden vasthoudt. De drager waarvan wij ons ten slotte bediend hebben, was geheel uit glas: het is een buis b' met een diameter van 5 mm., die zich vernauwt bij b_3 tot een uitgetrokken doch dikwandigen steel met een diameter van 0.7 mm. Op deze steel werd de ellipsoïde van zilver geregen; daartoe was deze voorzien van een cilindrische opening van passende dikte langs een van hare grote diameters; zij werd op de gewenschte hoogte bevestigd met behulp van een weinig was dat de nauwe ruimte tusschen het metaal en het glas geheel opvulde. De buis werd dichtgesmolten na te zijn luchtledig gezogen, teneinde het vloeibaar worden van de lucht, die zij anders zou bevatten te voorkomen. Aan den drager zijn nog bevestigd het vlakke spiegeltje voor de meting der afwijkingshoeken, en een oliedemper.

De veeren. Wegens de kleinheid der koppels (de constanten der veeren zijn van de orde van 1200 egs., terwijl zij voor het onderzoek der ferromagnetische metalen eenige tienduizenden bedroegen) was een rechtlijnige veer meer geschikt dan eene schroefvormige. We hebben genomen eene reep van phosphorbrons, met eene lengte van ongeveer 5,5 cM. (l') en eene doorsnede van $0,2 \times 0,01$ cM². Het boven-einde is gesoldeerd aan eene spiraalveer met 3 windingen van een veel dikkere reep dan de vorige; de grootste afmeting van de doorsnede van deze reep is horizontaal; op deze wijze vervulde deze veer zeer goed haar doel: elastisch te zijn voor trekkrachten, doch geen deel te nemen aan de wringing; zij is onmisbaar ten einde te voorkomen dat de dunne glazen steel of de spandraad van

platina-iridium (d') die aan den steel gesoldeerd is breekt. Deze *span-draad* is gevormd uit platina-iridiumdraad van 0,1 mM. diameter, hetwelk zeer dun uitgewalst is ten einde zijne torsieconstante uiterst klein te maken zonder zijn weerstand tegen trek belangrijk te verkleinen. De spandraad is bij b'_4 in het benedeneinde van den glazen steel vastgeblazen, en draagt aan het andere uiteinde een knop c' , die in een ring f'_6 vastgehouden wordt.

Het monteeren van den toestel is volgens analoge methoden en met dezelfde voorzorgen betreffende het centreeren van het geheel, de spanning der veeren, enz. geschied, als bij het beschrijven van het onderzoek der ferromagnetische metalen werden vermeld.

De gang der waarnemingen, wanneer alles opgesteld is, is zeer eenvoudig. Men begint met snel tastenderwijs de azimuths van den electromagneet te bepalen, waarbij in beide richtingen het koppel maximaal is. Het was voldoende deze proeven voor 2 of 3 geschikt gekozen velden te doen, daar dit azimuth slechts zeer weinig met het veld verandert, en men voor de andere waarden van het veld kan interpoleeren. De waarnemingsreeks geschiedde daarna naar het volgende schema: Alvorens bij een bepaalden stroom te meten, werd deze een zeker aantal malen gecommuteerd, ten einde een goed gedetermineerd veld te verkrijgen; immers het was hier niet te doen om eene waarde van de magnetisatie bij verzadiging, die zeer weinig met het veld verandert, te meten, maar in ons geval is het koppel evenredig met de tweede macht van het veld, zoodat onjuiste waarden van het veld, die niettegenstaande het ijzer van den electromagneet buitengewoon zacht was, zouden kunnen optreden, zich zeer sterk zouden doen gevoelen. Vervolgens werd de electromagneet in een der bepaalde azimuths gesteld, werd de afwijkingshoek afgelezen voor elke richting van het veld, de stroom verbroken, de electromagneet in het tegengestelde azimuth gedraaid, en weer voor elke richting van het veld de afwijkingshoek afgelezen, en zoo vervolgens een aantal malen. Aan het einde van eene reeks werd ter controle de waarneming bij een der velden bij het begin herhaald.

Foutenbronnen, moeilijkheden, correcties en controles.

1. *Inhomogeniteit van het magnetische veld.* Gelijk uit de volgende discussie blijkt is deze foutenbron in ons geval verreweg de belangrijkste, en wel de eenige die inderdaad in aanmerking komt. Onderstellen we dat het veld in de nabijheid van het centrum van het interferrum voorgesteld kan worden door eene uitdrukking van den vorm

$$H = H_0 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_0 (\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta). \quad (3)$$

waarin H_0 = het veld in het centrum, r en θ polaire coördinaten van een punt van het interferrum ten opzichte van het centrum als oorsprong zijn ¹⁾. We vervangen nu de ellipsoïde door een verticale *schijf* met een diameter gelijk aan eene groote as van de ellipsoïde; door de energie van de gemagnetiseerde schijf in het veld op te stellen, en deze te differentieëren naar den hoek tusschen de schijf en de krachtlijnen, verkrijgt men voor het koppel wegens de inhomogeniteit:

$$M' = \frac{3}{16} v^2 I \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_0 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (4)$$

(r = straal van de schijf).

De verhouding $\frac{M'}{M}$ van dat koppel voor $\varphi = 45^\circ$ tot het koppel dat aan de meting ten grondslag ligt, wordt

$$\frac{M'}{M} = \frac{3}{16} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)_0}{(N_2 - N_1) I} \cdot r^2.$$

Veronderstellen we dat de betrekkelijke verandering van het veld in de ruimte, die door de ellipsoïde ingenomen wordt, van de orde van grootte van $\frac{1}{1000}$ is; de boven gegeven formule leert dan dat, hoewel het bijkomstige koppel een weinig kleiner is dan het hoofdkoppel, de twee koppels van *dezelfde orde van grootte* zijn. Men ziet dus welken grooten invloed deze fout kan verkrijgen bij het onderzoek van zwak magnetische stoffen. (Voor ferromagnetische lichamen is zij geheel te verwaarloozen, zie de aangehaalde verhandeling).

Wij hebben daarom aan deze foutenbron de grootste zorg gewijd. De *kegelvormige* poolstukken zijn een weinig uitgehold, waarbij telkens de inhomogeniteit van het veld werd waargenomen door middel van den ballistischen galvanometer en eene kleine klos die zeer weinig verplaatst werd. We hebben bereikt dat de verandering van het veld in eene ruimte van $\pm 1 \text{ cm}^3$ belangrijk kleiner dan $\frac{1}{2000}$ was. De tijd heeft ontbroken nog verder te gaan, bovendien zouden we dan over een ballistischen galvanometer met grootere gevoeligheid hebben moeten beschikken. Verder zal blijken dat de homogeniteit van het veld voldoende was voor de geheel relatieve metingen, die we ons hadden voorgesteld te verrichten. We merken bovendien op dat al deze voorzorgen uitsluitend de kegelvormige

¹⁾ Zie P. WEISS en H. KAMERLINGH ONNES l.c.

poolstukken betreffen; de proeven met de cilindrische poolstukken zijn bijna geheel vrij van deze foutenbron.

Met deze bijkomstige koppels is op de volgende wijze rekening gehouden.

We stellen $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right)_0 = \lambda H$; de boven opgestelde uitdrukking voor het koppel wegens inhomogeniteit wordt ($\varphi = 45^\circ$):

$$\frac{3}{32} \nu r^2 \lambda H H$$

of

$$\frac{3}{32} \nu r^2 \lambda K H^2,$$

wat wij zullen voorstellen door

$$\beta K H^2;$$

is α de afwijkingshoek van den drager, C de constante van de veer, dan heeft men nu:

$$C\alpha = \frac{\nu}{2} (N_1 - N_2) K^2 H^2 + \beta K H^2. \quad \dots \quad (5)$$

Het tweede lid blijft dus in zijn geheel evenredig aan H^2 evenals in het geval dat er geen correctie wegens inhomogeniteit is. Reeds zonder deze te kennen, zou men, indien β constant was, uit de waarnemingen kunnen afleiden of K al of niet functie van het veld is. Men ziet echter uit het boven gegevene dat het constant zijn van β datzelfde van λ zou eischen, m. a. w. de distributie van het veld zou homothetisch moeten blijven hoe groot het veld ook zij. Dit laatste is nu niet het geval, gelijk men kan zien aan de quotienten $\frac{2d}{H^2}$ in de tabellen V, VII en VIII. Tabel V geeft eerst eene kleine toename, daarna neemt de verhouding na een maximum gepasseerd te zijn zeer belangrijk af; tabellen VII en VIII geven eene juist tegenovergestelde verandering; dit is juist wat men verwachten moet als men β veranderlijk en K constant onderstelt: de tabellen hebben namelijk betrekking op twee nagenoeg identische lichamen, waarvan het eene diamagnetisch, het andere paramagnetisch is. Nu heeft in beide gevallen het hoofdkoppel (uniform veld *dezelfde richting*, terwijl het koppel wegens de inhomogeniteit met de susceptibiliteit *van teeken verandert*; indien dus in het eene geval de correctie eerst toeneemt en dan afneemt, moet zij in het andere eerst afnemen, daarna toenemen. Wij komen hierop nog nader terug in § 4.

Daar deze bepaling slechts relatieve metingen ten doel heeft, is eens voor al als waarde voor de susceptibiliteit van zuurstof bij -183°C . aangenomen de waarde die de verbeterde toestel voor de opstijging

geleverd heeft. Met behulp van deze waarde is uit verg. (5) voor elk veld afgeleid de waarde van β , die eraan voldoet (zie tabellen V en VI). Deze waarden sluiten voldoende aan eene gemiddelde curve aan. Ten slotte berekent men de susceptibiliteit bij de lagere temperaturen door middel van de β ontleend aan deze curve als functie van het veld. Eenige opmerkingen over den invloed van de inhomogeniteit bij elk der 3 interferrica die gebruikt zijn, zullen bij gelegenheid der overeenkomstige waarnemingsreeksen gemaakt worden.

2. *Het niet constant zijn van de magnetisatie als functie van het azimuth.* De algemeene uitdrukking voor het koppel in een uniform veld

$$(N_1 - N_2) I^2 v \sin \varphi \cos \varphi$$

bereikt slechts dan haar maximum nauwkeurig bij $\varphi = 45^\circ$ en bijgevolg $\sin \varphi \cos \varphi = 1/2$, als I onveranderlijk blijft gedurende de draaiing. Wij vinden hier opnieuw een principieel verschil tusschen de methode voor het onderzoek der verzadigingsmagnetisatie en die voor dat van een lichaam met constante susceptibiliteit. Het is duidelijk dat in het eerste geval de voorwaarde $I = \text{constant}$ als het ware bij definitie vervuld is. In ons geval is de afwijking hiervan geenszins a priori te verwaarloozen: de twee grenswaarden voor I^2 ($\varphi = 0^\circ$ en $\varphi = 90^\circ$) verschillen in ons geval 0.3 % en daar I^2 tusschen deze grenzen steeds in dezelfde richting verandert, de daardoor veroorzaakte fout in het geval dat $\sin \varphi \cos \varphi = 1/2$ minder dan 0,1 %.

In tegenstelling met de twee voorgaande foutenbronnen, speelt de terugwerking van de gemagnetiseerde ellipsoïde op de *verdeling van het magnetisme over het oppervlak der poolstukken* klaarblijkelijk geene rol bij een lichaam met zwakke susceptibiliteit, terwijl daarentegen bij ferromagnetische lichamen daarop gelet moest worden. Men heeft inderdaad bij zuurstof te doen met eene magnetisatie, die in de sterkste velden van den electromagneet slechts eenige eenheden bereikte (bij het ijzer 1700!)

3. *Invloed van den drager.* Hier komen in aanmerking twee werkingen die kunnen samengaan: in de eerste plaats het eigen magnetisme van den steel, en vervolgens de werking analoog aan degene, die men wenscht te meten; indien nl. de steel niet nauwkeurig een omwentelingslichaam is, ondergaat hij in de vloeibare zuurstof eene werking op de wijze als eene *supplementaire ellipsoïde*. We hebben deze twee fouten onderzocht door eene blanco-proef in de vloeibare zuurstof, waarbij de ellipsoïde van zilver weggenomen, en de oppervlakte van het glas zorgvuldig van de sporen bevrijd was. Daarbij hebben we maximaal slechts 1 à 2 % kunnen constateeren, welke waarde niet in rekening gebracht behoeft te worden.

4. *De concentratie van de zuurstof.* De zuurstof van het bad bevatte een weinig stikstof, waarvan de concentratie gedurende de proef voortdurend door de snellere verdamping van de stikstof vermindert. Om daarmede rekening te kunnen houden hebben we bij het begin en aan het einde der waarnemingsreeksen telkens het gas geanalyseerd. Gemiddeld was de concentratie 1.25% aan het begin, 0.35% bij het eind (op het oogenblik dat het DEWAR-vat bijna ledig was).

Met deze concentratie is zoo goed mogelijk rekening gehouden; wat dit betreft blijft er eene onzekerheid van ongeveer 0.3%.

5. *Calibratie der veeren.* De boven beschreven hoofd-torsieveer is buiten den toestel gecalibreerd door de waarneming der slingertijden van een daaraan gehangen systeem met en zonder bijvoeging van een bekend traagheidsmoment. Dit laatste werd gevormd door een bronzen ring met eene rechthoekige meridiaandoorsnede, waarvan de diameters en hoogte met den kathetometer gemeten zijn. Het traagheidsmoment werd berekend op 582.09 e. g. s.

Er werd zorg gedragen dat de veer gedurende de calibratie aan denzelfden trek onderworpen was als in den toestel (door met behulp van een torsievrijen draad geschikte gewichten er aan op te hangen). Voor de constante van de veer werd verkregen

$$1184,5 \text{ e. g. s.}$$

Behalve de veer geeft ook het platina-iridium spanlint een torsiekoppel; de correctie tengevolge hiervan is volgens dezelfde methode bepaald als in het analoge geval door WEISS en KAMERLINGH ONNES (l.c.) en bedroeg 0.0152 van de constante der bovengenoemde veer; het verschil tusschen de constante bij 18° C. en bij —190° C. is kleiner dan de waarnemingsfouten. De berekeningen geschieden dus met de constante $1184.5 (1 + 0,0152) = 1202,5$.

6. *Trillingen.* Hier zou de ellipsoïde van zilver voldoende voor de demping der door invloeden van buiten veroorzaakte trillingen gezorgd hebben ten gevolge van het optreden van intensieve FOUCAULT'sche stroomen; door het in buitengewoon sterke mate optreden hiervan ontstonden echter juist groote moeilijkheden voor de waarnemingen. In de eerste plaats nam de drager slechts uiterst langzaam zijn evenwichtstand aan. Verder veroorzaakt de kleinste verandering van den stroom in den electromagneet aan het bewegelijke systeem een plotselingen stoot, wat onmiddellijk volgt uit den schuinen stand van de ellipsoïde ten opzichte van de krachtlijnen; de regeling van den stroom moest dus met de grootste zorg geschieden. Wij hebben den oliedemper behouden maar de vaste schotjes weggenomen; deze gaven tengevolge van capillaire werkingen tot wel kleine maar toch niet te verwaarloozen koppels aanleiding.

Uitkomsten der waarnemingen.

TABEL IVa.
Cylindervormige poolstukken met 21 mm.
tusschenruimte. $t = -183^{\circ}.0$ C.

H in gauss	dubbele af- wijking 2δ in cm. van schaal	$\frac{2\delta}{H^2} \cdot 10^7$	$K \cdot 10^6$
2250	0.37	0.731	277
4537	1.41	0.685	268.8
6676	3.21	0.7200	275.3
8339	5.10	0.7335	278.1
9387	6.44	0.7307	277.5
10120	7.45	0.7274	277.0
10685	8.26	0.7234	276.1
11130	8.99	0.7258	271.6
11440	9.38	0.7167	274.8
11765	9.90	0.7155	274.6

Gemiddelde $K_{90^{\circ}.1K.} = 275.6$

TABEL IVb.
Cylindervormige poolstukken met 21 mm.
tusschenruimte. $t = -201^{\circ}.1$ C.

H in gauss	dubbele af- wijking 2δ in cm. van schaal	$\frac{2\delta}{H^2} \cdot 10^7$	$K \cdot 10^6$
2250	0.50	0.988	324
4537	2.10	1.020	328.0
6676	4.66	1.041	331.1
8339	7.36	1.058	334.0
9387	9.17	1.042	331.4
10120	10.63	1.038	330.8
10685	11.81	1.034	330.2
11130	12.70	1.025	328.6
11440	13.41	1.024	328.4
11765	14.14	1.022	328.0

Gemiddelde $K_{72^{\circ}.0K.} = 330.0$

De gemiddelden geven zonder correctie voor het gebrek aan uniformiteit van het veld de volgende waarden:

$$\chi_{90^{\circ}.1 \text{ K.}} = \frac{275.6}{1.143} \cdot 10^{-6} = 241.1 \cdot 10^{-6}$$

$$\chi_{72^{\circ}.0 \text{ K.}} = \frac{330.0}{1.230} \cdot 10^{-6} = 268.3 \cdot 10^{-6}.$$

De overeenkomstige resultaten voor de methode van opstijging zijn $240,6 \cdot 10^{-6}$ en $269,3 \cdot 10^{-6}$.

De verschillen der uitkomsten volgens beide methoden verkregen bedragen slechts $0,4\%$. Dit geeft groot vertrouwen in de methode van de ellipsoïde zelfs voor deze bijzonder moeilijke bepalingen, en bewijst, dat zij, zoo men de noodige zorg wijdt aan de uniformiteit van het veld en aan de juistheid van vorm van de ellipsoïde, ook geschikt is voor absolute metingen.

Men herinnere zich dat er van een groot aantal absolute bepalingen gebruik moest worden gemaakt (assen en volume van de ellipsoïde, constanten van de veeren, magnetisch veld, dichtheid van vloeibare zuurstof) en dat de vorm van de ellipsoïde niet volkomen juist was. Aan de andere zijde moet worden opgemerkt, dat het aanbrengen der correctie voor de niet-uniformiteit van het veld de overeenstemming voor beide methoden slechter zou hebben kunnen maken. Wij

T A B E L Va.
Kegelvormige poolstukken op 20 mm. afstand.
 $t = -183^{\circ}.0 \text{ C.}$
(ter bepaling van β is $\chi_{90^{\circ}.1} = 240,6 \cdot 10^{-6}$ gesteld).

H in gauss.	dubbele af- wijking 2δ in cm. van schaal.	$\frac{2\delta}{H^2} \cdot 10^7$	$10^6 \beta$
3685	1,27	0,935	58,5
4615	1,96	0,920	54,7
6744	4,55	0,9437	60,8
9205	7,96	0,9400	59,7
11280	11,90	0,9348	58,5
12835	15,44	0,9374	59,1
14015	18,26	0,9295	57,0
14900	20,19	0,9098	51,9
15585	21,73	0,8945	48,1
16120	22,87	0,8802	44,5

hebben echter zowel theoretische als experimenteele gronden om aan te nemen, dat deze correctie bij cilindrische poolstukken met platte voorvlakken van 80 mm. diameter en slechts 21 mm. afstand binnen de grens van nauwkeurigheid van niet meer dan $\frac{1}{2}$ percent blijft. (Zie tabel Va p. 962).

Van β werd een graphische voorstelling als functie van H gemaakt, die bij de volgende tabel heeft gediend.

T A B E L Vb. Kegelvormige poolstukken op 20 mm. afstand. $t = -208^{\circ}.2 \text{ C.}$				
H in gauss.	dubbele af- wijking 2δ in cm. van schaal.	$\frac{2\delta}{H^2} \cdot 10^7$	$\beta \cdot 10^6$	$K \cdot 10^6$
2296	0.79	1.498	56.0	[357]
4615	2.75	1.291	57.8	[328]
6944	6.82	1.414	58.5	344.2
9205	12.15	1.435	59.8	346.3
11280	18.25	1.434	59.7	346.2
12835	23.67	1.437	59.2	346.9
14015	27.89	1.420	56.5	346.1
14900	30.84	1.389	52.4	345.1
15585	33.24	1.368	48.0	345.0
16120	35.44	1.363	43.8	347.3

Het gemiddelde met uitsluiting van de twee tusschen \square geplaatste is 345.9 en geeft

$$\chi_{64^{\circ}.9 \text{ K.}} = 275,0 \cdot 10^{-6}$$

terwijl de opstijgingsmethode gegeven had

$$\chi_{64^{\circ}.9 \text{ K.}} = 283,5 \cdot 10^{-6}$$

De afwijking bedraagt 3 %, maar men moet daarbij in aanmerking nemen, dat de correctie voor niet-uniformiteit ongeveer 16 % bedraagt en dat bij de drukking van 11 mm., onder welke de zuurstof bij deze temperatuur kookt, de temperatuur van de vloeistof zeer onzeker wordt.

Eindelijk volgen hier nog twee reeksen, die verricht werden bij andere poolsafstanden om eene andere afwijking van de uniformiteit van het veld te krijgen. Zij zijn onder slechte omstandigheden en in haast verricht, daar ten gevolge van het loopen van machines in de

nabijheid hinderlijke trillingen en storingen de waarnemingen belemmerden. Wij geven ze meer als voorbeeld hoe de gevolgde methode van berekening ook bij buitensporig groote koppels ten gevolge van niet-uniformiteit (28 % van het hoofdkoppel) nog tot goede uitkomsten voert.

T A B E L VIa.
Kegelvormige poolstukken op 18,2 mm. afstand
 $t = -183^{\circ}.0$ C.
(ter berekening van β is $\frac{2\delta}{90^{\circ}} = 240,6 \cdot 10^{-6}$ gesteld).

H in gauss	dubbele af- wijking $\frac{2\delta}{90^{\circ}}$ in cm. van schaal	$\frac{2\delta}{H^2} \cdot 10^7$	$\beta \cdot 10^6$
5013	3.34	1.328	159.2
7547	7.31	1.283	147.4
9993	12.64	1.246	137.9
12165	18.33	1.238	136.2
13760	22.39	1.183	121.7
14900	26.26	1.182	121.5
15750	28.83	1.162	116.6
17005	35.58	1.230	133.9

Van β werd weder een graphische voorstelling gemaakt, die diende bij de volgende tabel om de correctie tot K aan te brengen.

T A B E L VIb.
Kegelvormige poolstukken op 18,2 mm. afstand
 $t = -208^{\circ}.2$ C.

H in gauss	dubbele af- wijking $\frac{2\delta}{90^{\circ}}$ in cm. van schaal	$\frac{2\delta}{H^2} \cdot 10^7$	$\beta \cdot 10^6$	$K \cdot 10^6$
5013	46.8	1.861	152	341
7547	10.71	1.880	146.5	348
9993	18.88	1.862	137.5	351
12165	27.92	1.885	130.7	357
13760	35.35	1.868	125.5	359
14900	41.36	1.861	123.0	360
15750	45.67	1.840	122.5	357
17005	51.81	1.791	127.5	347

Het gemiddelde 353 geeft $\chi = \frac{K}{1.255} = 279.5 \cdot 10^{-6}$ eene waarde, die niet veel kleiner is dan $283.5 \cdot 10^{-6}$ welke bij de methode van opstijging werd gevonden.

Vaste zuurstof.

§ 4. *Ellipsoïde van vaste zuurstof.* Hierbij moesten de waarnemingen direct met eene ellipsoïde van zuurstof gedaan worden. De zuurstof moest dus vast worden in een vorm met ongeveer dezelfde gedaante en afmetingen als de boven beschreven ellipsoïde van massief zilver. Deze nieuwe condities eischten de volgende experimenteele inrichting.

Het omhulsel en de DEWAR-buis zijn dezelfde als voor de vloeibare zuurstof, alleen de kop *D* uitgezonderd. De stelbuis is ook dezelfde, maar zij is zoodanig bevestigd dat zij in haar geheel naar boven en naar beneden kan verplaatst worden, terwijl de geheele toestel op zijn plaats en gesloten blijft. Zij is daartoe bevestigd aan de buis *m*, die door de pakkingbus *D''*₂ kan schuiven; deze komt overeen met *D*₂ in den toestel voor vloeibare zuurstof, maar hier is de wijde glazen buis *C*₁ verlengd met een stijve buis van messing *M*, die dient om voor het op en neer schuiven van de geheele stelbuis speling te geven. De vroegere steel *k* is met evenveel verlengd moeten worden (*L''*₁ *L''*₂) en bevindt zich in de buis *m*.

De drager is eveneens een glazen buis *b''*; hij is echter niet gesloten doch gaat bij *b''*₃ in een zeer veel nauwere buis (0.5 mm.) over, die bij *b''*₁ eindigt in eene ellipsoïde van glas *a''*. Aan deze is verder vastgesmolten een massieve steel *b''*₅, die haar met den spandraad verbindt. De zuurstof heeft toegang tot de ellipsoïde door de dragerbuis, waarin zij door *b''*₆ binnenkomt. Ten einde het gas van buiten hier aan te voeren is eene caoutchouc buis (*d* = 3 mm.) *n* aangebracht, die de verbinding bewerkstelligt met eene inlaatbuis *n*₄, die de wand doorboort en daaraan vastgesoldeerd is.

Het is door deze inrichting gemakkelijk de zuurstof in de ellipsoïde vast te doen worden. Wanneer de toestel voor gebruik gereed is, begint men met de stelbuis door aan den kop Δ te trekken naar boven te schuiven totdat de glazen ellipsoïde zich in het niet verzilverde gedeelte van het vacuümglas bevindt. Dan vult men dit met vloeibare waterstof. Vervolgens begint men, terwijl de ellipsoïde in verbinding staat met een reservoir met zuurstof, de stelbuis langzaam te doen dalen en daarmee ook de ellipsoïde, die nog niet de vloeibare waterstof aanraakt, maar zich in den damp bevindt. Men ziet langzamerhand de zuurstof condenseeren en, mits men eenige zorg

hieraan besteedt, de geheele ellipsoïde en de toevoerbuis vullen. Voortgaande met dalen bereikt men genoegzaam koude dampen die de geheele massa zuurstof doen vast worden. Het geschiedt dan slechts zelden wegens de zeer sterke contractie van de zuurstof bij het vast worden, dat men geene ledige ruimte in de massa ziet ontstaan; men moet dan deze bewerking eenige malen herhalen, daar de nog vloeibare zuurstof bij deze temperaturen een vrij groote inwendige wrijving heeft en moeilijk van de buis in de ellipsoïde loopt; wij zullen hierop nog terugkomen. Wanneer de ellipsoïde geheel met vaste zuurstof gevuld is, kan men de stelbuis geheel naar beneden schuiven. Men heeft van te voren een merk aangebracht, ten einde ook wanneer de verzilverde buis op haar plaats is weer nauwkeurig te kunnen zorgen dat de ellipsoïde zich in het centrum van het interferrum bevindt

Fouten, correcties, hulpmetingen.

1. *Koppels wegens inhomogeniteit.* Gelijk men zal zien, hebben we niet alleen metingen gedaan in vloeibare waterstof (vaste zuurstof), maar ook, terwijl overigens alles hetzelfde was, in een bad van vloeibare zuurstof bij twee temperaturen (dus met dezelfde ellipsoïde van vloeibare zuurstof). Wij hadden aldus, daar de susceptibiliteit der vloeibare zuurstof bekend was, twee bepalingen der koppels wegens inhomogeniteit als functie van het veld: zij zijn opgenomen in tabel VII. Tengevolge van de iets kleinere afmetingen van de ellipsoïde, zijn deze correcties betrekkelijk veel minder belangrijk.

2. *Zuiverheid der zuurstof.* De zuurstof is van stikstof bevrijd door verdamping onder gereduceerden druk van eene groote hoeveelheid onzuivere vloeibare zuurstof.

3. *Dichtheid van de vaste zuurstof.* We hebben reeds gewezen op de moeilijkheid de ellipsoïde geheel gevuld met vaste zuurstof te krijgen. Overigens kan men wegens de ondoorzichtigheid van de vastgeworden zuurstof niet met zekerheid vaststellen dat deze voorwaarde vervuld is¹⁾.

Daar de specifieke susceptibiliteit bepaald wordt, door uit te gaan van een bekend verondersteld volume, zou deze fout zich onmiddellijk in het resultaat doen gevoelen. Wij hebben getracht deze fout zoo veel mogelijk te elimineeren door met dezelfde ellipsoïde de dichtheid te bepalen, namelijk door onder dezelfde omstandigheden als waarbij de proeven geschiedden de ellipsoïde met vaste zuurstof te vullen en vervolgens de hoeveelheid gas die daaruit door verdam-

¹⁾ Wanneer eene ledige ruimte van eenige mm³ ontstaat, ziet men het echter zeer goed.

ping gevormd werd te meten. Men kan aannemen dat de kleine holten die zich nog mochten vormen in de verschillende gevallen vrijwel dezelfde zijn. Bij twee dergelijke metingen bleek inderdaad de zoo bepaalde dichtheid slechts ruim 1% te verschillen. Door als gemiddelde dichtheid die, welke uit deze proef volgt, aan te nemen, houdt men met de eventueele aanwezigheid der holten rekening. Aldus werd verkregen

$$\rho = 1.41.$$

De koppels wegens inhomogeniteit van het veld, worden wat hunne *absolute* waarde betreft niet gewijzigd door eene holte die zich, zooals in den regel het geval was, in de verticale as vormt, want het zijn de elementen aan den omtrek van de ellipsoïde, die klaarblijkelijk de hoofdrol in deze spelen. Daarentegen zouden zij een grooteren *relatieven* invloed kunnen krijgen, maar gelijk de waarnemingen toonen zijn de totale hieruit voortspruitende correcties reeds zoo klein dat zij voor zoover de nauwkeurigheid der waarnemingen gaat als onafhankelijk van de susceptibiliteit kunnen aangenomen worden, waardoor deze moeilijkheid geheel vervalt.

4. *Afmetingen van de ellipsoïde.* Het inwendige volume werd bepaald door haar met kwik te vullen en dit te wegen. Het bedraagt 0.1812 cm³. Geconstateerd is dat de verandering van het volume door den atmosferischen druk niet in aanmerking komt door de ruimte boven het kwik luchtledig te zuigen en den stand van het kwik in de capillaire buis waar te nemen.

De assen zijn uitwendig direct gemeten. Vervolgens is de dikte van het glas in een tiental punten bepaald door een microscoop in te stellen op het beeld van het buitenoppervlak gevormd door het kwik waarmede de ellipsoïde gevuld is. Zij verandert van plaats tot plaats slechts weinig. Het gemiddelde is genomen en het dubbele daarvan van elk der uitwendige assen afgetrokken. De uitkomsten zijn:

$$1.044 \text{ cm.}$$

en:

$$0.335 \text{ cm.}$$

Indien men hiermede het volume berekent, verkrijgt men 0.1925 cm³, wat ongeveer 6% grooter is dan het werkelijke volume volgens de directe bepaling. Dit hangt samen met de bijzondere vorm van de meridiaandoorsnede, die aan de uiteinden van de groote as iets te sterk gekromd is. Voor de berekening der ontmagnetiseerende coëfficiënten, hebben we toen gekozen eene gemiddelde ellipsoïde met dezelfde groote as en met eene zoodanige kleine as dat het

werkelijke volume verkregen wordt¹⁾. De elementen der berekening waren dus:

1.044 em.

en:

0.3173 em.

5. *Tegenwerkend koppel*. De eigenlijke veer was dezelfde als voor de vloeibare zuurstof en het spanlint eveneens. Er moet echter rekening gehouden worden met de caoutchouc toevoerbuis voor de zuurstof. Door deze (zoo dun mogelijk gekozen) werden en het nulpunt en de constante van het totale tegenwerkende koppel gewijzigd zoodra het drukverschil binnen en buiten de buis eene merkbare verandering onderging (gevolg van eene vormverandering der buis). Bij alle proeven is dus gezorgd voor een standvastig verschil van 70 mm. kwik tusschen den druk binnen het omhulsel en dien binnen den drager (deze laatste was de kleinste der twee). Behalve door middel van de manometers verkregen wij eene zeer gevoelige aanwijzing betreffende de standvastigheid van dit verschil door den nulstand van den drager. Proeven buiten den toestel hebben geleerd dat tusschen het geheel plat drukken van de caoutchoucbuis door den atmosferischen druk en het geheel gelijk zijn van den druk aan beide zijden, de constante van het totale koppel ongeveer 10% verandert, hetgeen overeenkomt met eene verplaatsing op de aflees-schaal van *meer dan een meter*. Neemt men ruwweg evenredigheid aan, dan zou eene verplaatsing van 1 cm. eene verandering van het tegenwerkend koppel ter grootte van slechts 0.1% aanwijzen; het nulpunt werd tot op enkele millimeters constant gehouden.

De calibratie is, onder geheel dezelfde omstandigheden als bij de proeven (drukverschil enz.) geschied.

De totale constante (met bijvoeging van die van het spanlint) bedroeg:

$$1503 + 18 = 1521 \text{ egs.}$$

¹⁾ Dit is klaarblijkelijk niet geheel juist; echter zijn er experimenteële gegevens die deze wijze van corrigeeren ondersteunen: V. QUITNER (Diss. Zürich 1908, ook Arch. sc. phys. et nat. Genève, Sept.—Nov. 1908) heeft gevonden dat deze wijze van handelen zelfs voor schijven, lichamen die van eene ellipsoïde veel meer afwijken dan het onze, voldoende nauwkeurig is

Uitkomsten.

TABEL VII.
Berekening der correcties voor niet-uniformiteit uitgaande van de
waarnemingen in een bad van vloeibare stikstof.
Kegelvormige poolstukken op 20 mm. afstand.

H in gauss	t = -195°.6 C.			t = -210°.0 C.			$\beta \cdot 10^4$ gemiddelde -195°.6 met dubb.gew.
	2δ in cm.	$\frac{2\delta}{H^2} 10^7$	$\beta \cdot 10^4$	2δ in cm.	$\frac{2\delta}{H^2} 10^7$	$\beta \cdot 10^4$	
4615	1.18	0.554	-0.137	1.59	0.746	-0.199	-0.158
6944	2.69	5577	-0.127	3.53	0.7322	-0.232	162
9205	4.73	5580	126	6.21	7330	231	160
11280	7.08	5560	132	9.23	7251	250	171
12835	9.17	5564	131	12.10	7341	228	163
14015	11.14	5670	100	14.49	7378	219	140
14900	12.90	5812	060	16.94	7613	162	094
15585	14.29	5884	039	—	—	—	—
16120	15.67	6031	003	20.21	7781	121	040

Men ziet dat de waarden voor β bij beide temperaturen verkregen niet dezelfde zijn. Intusschen geldt het hier slechts eene correctie voor de susceptibiliteit van vaste zuurstof, die in maximo 3% is. Een verschil van temperatuur van 1° C. bij het bad onder verlaagden druk geeft reeds meer dan de helft van het verschil der beide waarden, waarom wij aan de bepaling bij gereduceerden druk ook slechts het halve gewicht hebben gegeven van die bij gewonen druk.

De onzekerheid van het gemiddelde heeft op de susceptibiliteit van vaste zuurstof minder dan 1% invloed. Het verloop alsmede het teeken van β komen overeen met wat bij het zilveren ellipsoïd gevonden werd.

T A B E L VIII.
Susceptibiliteit van vaste zuurstof.
 $t = -252,8$

(bad van vloeibare waterstof kokende onder atmosferischen druk).

H in gauss.	$2z$ in cm. van schaal.	$\frac{2z}{H^2} \cdot 10^7$	$K \cdot 10^6$ niet gecorrigeerd	$K \cdot 10^6$ gecorrigeerd volgens tab. VII.
2296	0,89	1,60	519	533
4615	3,57	1,676	518,3	532,9
6944	7,92	1,642	512,3	527,3
9205	14,07	1,660	515,0	530,1
11280	21,44	1,661	515,2	530,1
12835	27,92	1,684	518,7	532,8
15015	32,96	1,678	517,6	529,0
14300	37,38	1,683	518,4	527,5
15585	40,77	1,678	517,6	523,7
16120	44,05	1,696	520,0	523,6

Gemiddelde 529,0

waaruit volgt $\chi_{202,3 \text{ K.}} = \frac{529,0}{1,41} 10^{-6} = 375,2 \cdot 10^{-6}$.

T A B E L IX.
Susceptibiliteit van vaste zuurstof.
 $t = -258,0^{\circ}$

(bad van vloeibare waterstof onder 70 mm. dampdruk)

H in gauss	$2z$ in cm. van schaal	$\frac{2z}{H^2} \cdot 10^7$	$K \cdot 10^6$ niet gecorrigeerd	$K \cdot 10^6$ gecorrigeerd
2296	1,19	2,257	600,5	614,5
4615	4,80	2,253	600,1	614,6
6944	10,86	2,252	600,0	615,0
9205	19,24	2,270	602,2	617,1
11280	28,43	2,210	594,3	609,2
12835	37,09	2,250	599,6	613,7
15015	45,05	2,293	604,7	616,7
14300	51,24	2,306	606,8	615,9
15585	55,73	2,293	605,3	614,1
16120	60,20	2,317	608,5	612,1

Uit het gemiddelde 614.0 volgt $\chi_{sol. 14^{\circ}.2K.} = \frac{614.0}{1.41} = 435.6 \cdot 10^{-6}$. De producten met \sqrt{T} geven

$$\begin{aligned} & - 252.98 & 375.2 \cdot 10^{-6} \sqrt{20.3} & = 1690 \cdot 10^{-6} \\ & - 258.99 & 435.6 \cdot 10^{-6} \sqrt{14.2} & = 1641 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Beide waarnemingen worden dus vrij goed voorgesteld door

$$\chi_{sol.} = \frac{1690}{\sqrt{T}} \cdot 10^{-6},$$

die bij de hoogste temperatuur juist aansluit.

De afwijking van deze betrekking voor de lage temperaturen is iets grooter dan de waarnemingsfout.

§ 5. *Overzicht en slotsom.* Wat de afhankelijkheid van de specifieke susceptibiliteit van de temperatuur betreft, geeft onze meest vertrouwbare bepaling

$$\chi_{liq. 90^{\circ}.1 K.} = 240.6 \cdot 10^{-6}$$

CURIE vond tusschen $20^{\circ} C.$ en $450^{\circ} C.$ $\chi = \frac{33700}{T} \cdot 10^{-6}$, waaruit zou volgen voor $T = 90^{\circ}.1 K.$ $\chi = 374 \cdot 10^{-6}$ een getal dat wezenlijk verschilt van het onze ¹⁾.

Er kan dus geen sprake van zijn met de wet van CURIE te extrapoleren tot de vloeibare phase van zuurstof. Dit is de slotsom tot welke FLEMING en DEWAR ook in hun eerste verhandeling waren gekomen, doch die zij later op grond van meer zorgvuldige proeven hebben verworpen ²⁾.

Bij lagere temperaturen kunnen de aanwijzingen van de beide opstijgingstoestellen binnen de grenzen der waarnemingsfouten door eene zeer eenvoudige wet worden uitgedrukt: *de specifieke susceptibiliteit is omgekeerd evenredig aan den vierkantswortel uit de absolute temperatuur.* Uit de waarnemingen met den meest vertrouwbaren toestel hebben wij de formule

1) Het getal van R. HENNIG (1893) zou geven

$$\chi = \frac{27600}{T} \cdot 10^{-6} \text{ en } \chi_{90^{\circ}.1 K.} = 307 \cdot 10^{-6}.$$

2) Uitkomsten van FLEMING en DEWAR: 1^e verhandeling (1896) $\chi_{90^{\circ}.1 K.} = 200 \cdot 10^{-6}$, 2^e verh. (1898) $287 \cdot 10^{-6}$, gemiddelde $243.5 \cdot 10^{-6}$ vrijwel hetzelfde als onze uitkomst. Volgens het gemiddelde der uitkomsten van FARADAY en BECQUEREL is de magnetisatie-coëfficiënt van zuurstof bij 0° $91 \cdot 10^{-6}$, dit geeft met de wet van CURIE extrapolerende $\chi_{90^{\circ}.1 K.} = 299 \cdot 10^{-6}$. Dit getal hebben de engelsche geleerden in hun tweede verhandeling gebruikt om de susceptibiliteit van de vloeibare zuurstof met die van het gas bij de gewone temperatuur te vergelijken.

$$\chi_{liq. T} = \frac{2284}{\sqrt{T}} \cdot 10^{-6}$$

afgeleid, die tot op 0.5% bevestigd wordt. Geen der uitkomsten met de methode van het koppel verkregen, is met deze formule in strijd.

Bij de vaste zuurstof is de aansluiting van de waarnemingen aan de betrekking

$$\chi_{s. T} = \frac{1690}{\sqrt{T}} \cdot 10^{-6},$$

vrij voldoende.

Bij de laagste temperatuur is er een kleine afwijking in den zin van bij lagere temperaturen verminderde toename; zij is echter te klein om voorloopig de gegeven formule niet als benadering voor den vasten aggregaatstoestand beneden het smeltpunt van zuurstof tot aan 14° 2 K. te mogen aanvaarden.

Nieuwe proeven bij meerdere temperaturen moeten leeren in hoeverre voor den vloeibaren en den vasten toestand inderdaad de gevonden betrekkingen gelden.

Zij wijzen (zie fig. 5) op een sprong in χ bij het smeltpunt, daar

$$\chi_{liq. T_s} = \text{ruim } 1,3 \chi_{sol. T_s}$$

De vraag of deze sprong werkelijk bestaat hopen wij door bepaaldelijk daarop gerichte proeven te beantwoorden. Voorshands is het waarschijnlijk te achten, dat de bedoelde sprong bestaat. Een sprong gelijk wij hier aannemen bij onveranderden vorm van de wet, en die bij het smeltpunt of bij het punt van overgang in een allotrope modificatie gelegen kan zijn, vindt een analogon in hetgeen CURIE voor den overgang van γ in δ ijzer bij hooge temperatuur gevonden heeft. WEISS¹⁾ heeft aangetoond, dat men er rekenschap van kan geven door aan te nemen, dat bij het bedoelde punt twee-atomig ijzer in drie-atomig overgaat.

Daarentegen komt het ons voor, dat tusschen -183° C. en 0° C. de wet van toename van de specifieke susceptibiliteit met de temperatuur van die der omgekeerde evenredigheid met den vierkantswortel bij lagere temperaturen geleidelijk in die van de omgekeerde evenredigheid (de wet van CURIE) bij hogere temperaturen overgaat en dat beide wet ten dus, elk voor een verschillend gebied van waarden der onafhankelijk veranderlijke T slechts benaderde voorstellingen voor een zelfde functie zijn.

Aan de voorstelling van dezen geleidelijken overgang van de wet van CURIE in die van $T^{-1/2}$ ligt het denkbeeld ten grondslag, dat de susceptibiliteit met de dichtheid niet noemenswaard verandert. Neemt

¹⁾ P. WEISS, loc. cit.

men daarentegen aan dat dit wel het geval is, dat bijv. onder den invloed van den inwendigen druk, wanneer deze aanmerkelijk wordt, de moleculen niet alleen samengedrukt worden maar ook een vermindering van hun magnetisch moment ondergaan, dan zou er tusschen den gastoestand, waarin dan de susceptibiliteit verder vrijwel onafhankelijk van den druk zou zijn, en den vloeistoftoestand bij lagere temperaturen, waarin de moleculen wegens den grooten inwendigen druk door een bijgevoegden uitwendigen druk niet aanmerkelijk meer samengedrukt worden, en dus ook de susceptibiliteit van den druk vrijwel onafhankelijk zou zijn, een gebied van groote samendrukbaarheid der moleculen zijn, waarin de susceptibiliteit zoowel met de temperatuur als met de dichtheid zou veranderen. Wat betreft het verschil tusschen het magnetisch moment van de elementaire magneten in den toestand van verzadigde vloeistof en damp van de normale of kleinere dichtheid bij dezelfde temperaturen, is volgens deze voorstelling te verwachten, dat het, tengevolge van de dichtheidsverandering van de verzadigde vloeistof, met de temperatuur zal veranderen.

Men kan ook onderstellen, dat in den vloeibaren toestand zich molecuulcomplexen vormen, die de intensiteit der elementaire magneten verminderen, dan zullen in vloeibare mengsels van zuurstof met niet magnetische gassen de veranderingen in de susceptibiliteit de thermodynamische wetten volgen, die het aantal van deze complexen beheerschen.

Maar dit alles moet worden uitgemaakt door verdere proefnemingen, die wij hopen te verrichten: voorschands blijft de onderstelling, dat de susceptibiliteit onafhankelijk is van de dichtheid, de meest aanneembare.

Wat nu betreft de vraag of de susceptibiliteit in zwakke velden ook bij lagere temperaturen, zoo er geen ferromagnetisme met een zeer laag gelegen punt van CURIE volgens de theorie der magnetisch overeenstemmende toestanden van WEISS optreedt, volgens de nieuwe wet van den omgekeerden wortel uit de absolute temperatuur blijft voortgaan, zoo is misschien het overgaan in een nog langzamer toename met dalende temperatuur en het naderen tot een limietwaarde waarschijnlijker.

De wet van $T^{-\frac{1}{2}}$ doet terstond de vraag rijzen of in plaats van de elementaire magneten onafhankelijk in intensiteit van de temperatuur, die LANGEVIN invoert en die T^{-1} geven, zulke met eene intensiteit evenredig \sqrt{T} moeten worden gesteld. Dat men dus elementairstroompjes, of electronen bewegende in hun banen met perken snelheden, of (bij constante baan) met snelheden evenredig (bepaald dus ook door) die der snelheden in de warmtebeweging zou moeten aannemen.

Met andere woorden, terwijl in de theorie van LANGEVIN reeds ondersteld wordt, dat de *baanlakken* der electronen de moleculen in hunne beweging volgen doch de doorloopen perken in die banen nog onafhankelijk van de warmtebeweging zijn, zouden nu ook de electronen bij hunne beweging *in* die banen den invloed der warmtebeweging ondervinden en, als ook de straal onveranderlijk geworden is, vast aan het atoom meedraaien; het zouden aan het atoom vastgevroren electronen zijn, gelijk ook voor andere verschijnselen worden ondersteld.

Deze voorstelling, in de theorie van LANGEVIN ingevoerd, voert echter niet, zooals men op den ersten blik misschien zou meenen, tot eene susceptibiliteit evenredig T^{-1} maar tot eene standvastige susceptibiliteit.

Om haar toe te kunnen passen zal men waarschijnlijk tot lagere temperaturen dan die van onze proeven moeten gaan. Het schijnt voorshands niet onmogelijk, dat dan inderdaad de wet χ evenredig aan T^{-1} in die van $\chi = \text{const.}$ overgaat. Onze waarnemingen met vaste zuurstof wijzen reeds in die richting. De voorstelling, dat de electronenbeweging van het magnetisme bij het absolute nulpunt tot rust komt, welke op de boven ontwikkelde wijze tot die uitkomst voert, en tot welke onze proeven dus zouden leiden, schijnt veel meer bevredigend dan die, welke de electronen in hun magnetische beweging ook bij het absolute nulpunt nog doet volharden.

De tweede vraag, aan welke onze verhandeling gewijd was, de verandering van de susceptibiliteit in functie van het veld, vraagt geen uitvoerige beschouwing. De opstijgingsmethode schijnt in sommige gevallen een vermindering van de orde van 1% in een veld van 8000 gauss te geven, de methode van het koppel gaf met de cylindrische poolstukken slechts een zeer kleine systematische afwijking tot 12000 gauss, bij de conische poolstukken (16000 gauss) was de afwijking nauwelijks merkbaar.

De ellipsoïde van vaste zuurstof, waarbij de temperatuur veel lager werd, schijnt een kleine afname te geven bij 16000 gauss, door de correctie voor de niet-uniformiteit kan echter eene grootere afwijking bedekt gebleven zijn. Wij meenen voorshands te moeten besluiten, dat de verandering van de susceptibiliteit met het veld tot 16000 gauss bij alle temperaturen binnen de grenzen der waarnemingsfouten blijft, aannemende dat de waarnemingen tot op 1% nauwkeurig zijn. Dit is in overeenstemming met de theorie van LANGEVIN, indien men deze niettegenstaande de afwijking van de wet van CURIE nog toepast.

Physiologie. — De Heer K. F. WENCKEBACH doet eene mededeeling: „*Over den invloed der ademhaling op den pols.*” (Pulsus paradoxus).

(Zal in het Verslag der volgende vergadering verschijnen.)

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt aangeboden eene verhandeling van den Heer Dr. C. U. ARIËNS KAPPERS, getiteld: „The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres”.

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren C. WINKLER en J. W. VAN WIJHE met verzoek daarover in een volgende vergadering rapport te willen uitbrengen.

De Heer KORTEWEG spreekt namens de Afdeling een kort woord van dank uit aan den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN bij diens aftreden als Voorzitter der Natuurkundige Afdeling.

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

In het Zittingsverslag van Febr. 1910:

p. 791 Tabel III i. pl. v. 5050 leze men 8050.

p. 794 Tabel VII i. pl. v. 102.58 leze men 102.85.

p. 795 Tabel VIII i. pl. v. 71.75 leze men 71.95.

REGISTER.

- AARDALKALI-PHOSPHOREN (Het gedrag der) bij verschillende in het bijzonder zeer lage temperaturen. 151.
- AARDBEVINGEN (Bepaling van het epicentrum van) door middel van de opteekening op één station. 880.
- Aardkunde.** C. E. A. WICHMANN: „De Veenen in den Indischen Archipel.” 5.
- G. A. F. MOLENGRAAFF: „Over oceanische diepzee-afzettingen van Centraal-Borneo.” 78.
- Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. LORIÉ: „Het Uddeler-Meer en de Veluwe” 172. Verslag hierover. 303.
- P. TESCH: „Over jurassische fossielen op secundaire ligplaats in Noord-Brabant en Limburg”. 361.
- H. A. BROUWER: „Pienerriet, een melanocrate foyaiet van Transvaal”. 500. 563.
- Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1909. 678.
- Aanbieding eener verhandeling van Dr. H. VAN CAPPELLE: „Bijdrage tot de kennis van de landijsvormingen in de provincie Friesland en van het oudere fluviatile diluvium in den ondergrond van Noord-Nederland”. 797. Verslag. 854.
- ABEL (Bijdrage tot de oplossing van de functionaalvergelijking van). 250.
- ABSORPTIELIJNEN (De magnetische splitsing van) in verband met het spectrum der Zonnevlekken. (Eerste mededeeling). 621. (Tweede mededeeling). 889.
- ADEMHALING der hoogere planten (De invloed van de temperatuur op de). 201.
- (Over den invloed der) op den pols. 974.
- AETHER-ANTHRACHINON (De P, T, X-ruimtevoorstelling van het stelsel). 297.
- AKADEMIËN (Internationale Associatie der). Toezending van de agenda voor de vergadering van 1—3 Juni 1909 te Rome te houden. 2.
- Schrijven van de Kongl. Danske Videnskabernes Selskab te Kopenhagen waarbij zij bericht dat door haar een voorstel zal worden gedaan om subsidie te verleenen aan het publiceeren van werken betrekking hebbende op de geschiedenis van het Oosten. 175.
- ALLOTROPIE (Een nieuwe theorie van het verschijnsel). 808.
- AMMONIAK en water (Over de verbindingen van). 94.
- Anatomie.** L. BOLK: „Over de ligging en verschuiving van het Foramen Magnum bij de Primaten.” 62.

- Anatomie C. T. VAN VALKENBURG:** „Oppervlak en bouw der hersenschors eener mikrocefale idiote”. 218.
- L. BOLK: „Over de helling van het Foramen magnum bij de Primaten”. 551.
 - Aanbieding eener verhandeling van den Heer C. U. ARIËNS KAPPERS: „The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres.” 974.
- APOROSA campanulata J. J. S. (Distylium stellare O. K. en).** 359.
- ARCHANGEL (Verzoek van de Gesellschaft für die Erforschung des Russischen Nordens te) om opgaaf van literatuur betreffende de Willem Barentz- en Varna-expeditie.** 174. Antwoord hierop. 302.
- ARGON (Opmerkingen over de bereiding van).** 924.
- (Dampspanningen boven -140° C. kritische temperatuur en kritische druk van). 924.
- ARIËNS KAPPERS (C. U.).** The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres. 974.
- ASYMPTOTISCHE LIJNEN (Over de oppervlakken, waarvan de) door quadraturen kunnen worden bepaald”. 824.**
- ATOOMVOLUME (Het) van allotrope modifikaties bij zeer lage temperaturen.** 377.
- ATRIUM CORDIS (Mededeelingen omtrent het electrocardiogram van het).** 450.
- AVOGADRO (A.). (Circulaire betreffende de uitgave der werken van).** 2.
- BACILLUS prodigiosus (Variabiliteit bij).** 596.
- BAKHUYZEN (H. G. VAN DE SANDE). Zie SANDE BAKHUYZEN (H. G. VAN DE).**
- BANEN (Over de) eener door infinitesimale iteratie verkregen functie in haar complexe vlak.** 478.
- BECQUEREL (JEAN). Contribution à la connaissance du phénomène de ZEEMAN dans les cristaux.** 146.
- BEMMELEN (J. M. VAN). Aanbieding eener verhandeling van Dr. J. LORIÉ: „Het Uddeler Meer en de Veluwe.” 172.**
- Verslag over een schrijven van den Minister van Binnenlandse Zaken over inlichtingen omtrent wijzigingen in de Noordzeekust. 302.
 - Aanteekeningen omtrent de daling van den Nederlandschen bodem. 407.
 - Jaarverslag der Geologische commissie. 678.
 - Aanbieding eener verhandeling van den Heer Dr. H. VAN CAPELLE: „Bijdrage tot de kennis van de landijsvormingen in de provincie Friesland en van het oudere fluviatile diluvium in den ondergrond van Noord-Nederland. 797.
- BENZOL (Over de invoering van een derden substituent in het digesubstieueerde).** 507.
- BENZOLKERN (Over de oorzaak der tegenstelling tusschen de substitutie naar para-ortho-plaatsen en naar de meta-plaats in de).** 535.
- BERNSTEYN (M. H. VAN). Getijconstanten voor plaatsen langs de kusten en benedenrivieren in Nederland berekend uit de waterstanden van het jaar 1906.** 389. Verslag hierover. 421.
- BERLIJN. (Uitnoodiging van de Kön. Friedrich Wilhelm Universität te) voor het zenden van één afgevaardigde bij de herdenking van het 100-jarig bestaan.** 568.

- BETH (H. J. E.).** De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen (Eerste gedeelte). 634. (Tweede gedeelte). 722.
- BEYERINCK (M. W.).** Viscosaccharase, een enzym, dat uit rietsuiker slijm voortbrengt. 591.
- Variabiliteit by *Bacillus prodigiosus*. 593.
 - Emulsielaevulan, het produkt der werking van viscosaccharase op rietsuiker. 808.
- BINAIRE MENGSELS (Isothermen van eenatomige stoffen en hun).** 168.
- Isothermen van eenatomige gassen en hunne). 924.
- BINNENLANDSCHE ZAKEN (Minister van).** Zie MINISTER van Binnenlandsche Zaken.
- BLAAUW (A. H.).** — Bericht van den Heer — dat hij wegens ernstige ongesteldheid verhinderd is naar Buitenzorg te vertrekken. 175.
- (Het aan den Heer) verleende subsidie wordt overgedragen op den Heer J. KUYPER. 420.
- BLOEDSERUM (Over de veranderingen in het) van haaien na verbloeding.** 261.
- BODEM van Nederland (Nota omtrent eenige bepalingen van de daling van den), langs de zee kust afgeleid uit waarnemingen van waterhoogten en waterpassingen.** 391.
- (Nota omtrent de daling van den) in de laatste jaren. 395.
 - (De daling van den). 400.
 - (Aanteekening omtrent de daling van den). 407.
- BOEGGESCHENKEN (Aanbieding van).** 60. 172. 300. 359. 501. 565. 673. 851.
- BOËSEKEN (J.).** Bijdrage tot de kennis van katalytische verschijnselen. 354.
- BOËSEKEN (J.) en A. F. HOLLEMAN.** Over de oorzaak der tegenstelling tusschen de substitutie naar para-ortho-plaatsen en naar de meta-plaats in de benzolkern." 535.
- BOIS (H. E. J. G. DU).** Een verbeterde half-ring-electromagneet. 118.
- Verklaart zich bereid de Regeering te vertegenwoordigen op het Internationaal Congres voor radiologie en electriciteit. 504.
 - benoemd tot gedelegeerde der Regeering naar het Internationaal Congres voor radiologie en electriciteit. 568.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer STANISLAW LORIA: „Der magneto-optische Kerr-Effect bei ferromagnetischen Verbindungen und Legierungen." 903.
 - en KÔTARÔ HONDA. De thermomagnetische eigenschappen der elementen. 666.
- BOLK (L.).** Over de ligging en verschuiving van het Foramen Magnum bij de Primaten. 62.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. T. VAN VALKENBURG: „Oppervlak en bouw der hersenschors eener mikrocefale idiote." 218.
 - Over de helling van het Foramen Magnum bij de Primaten. 551.
- BOOLE STOTT (MRS. A.).** Aanbieding eener verhandeling „Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings." 797.
- BOOMEN (Over de rol van levende elementen in het hout bij den transpiratiestroom in).** 568.
- BORNEO (Over oceanische diepzeeafzettingen van Centraal-).** 78.
- (Glimmerleucietbazalt van Oost-). 85.

- BRAAK (C.)**. Het dubbeldagzche maansgetij berekend uit opteekeningen van den astatischen seisnograaf te Batavia. 875.
— Bepaling van het epicentrum van aardbevingen door middel van de opteekening op één station. 880.
- BRANDSEN (P.)**. Over de stabiele evenwichtsstanden van drijvende parallelepipeda. 307.
- BROUWER (H. A.)**. Glimmerleucietbazalt van Oost-Borneo. 85.
— Pienaarriet, een melanocrate foyaiet uit Transvaal. 500. 563.
- BROUWER (L. E. J.)**. Over één-éénduidige, continue transformaties van oppervlakken in zichzelf. (2e mededeeling). 106.
— Over continue vectordistributies op oppervlakken (2e mededeeling). 702.
— Over de structuur der perfecte puntverzamelingen. 833.
- BRUIN (J.)**. Over de oppervlakken, waarvan de asymptotische lijnen door quadraturen kunnen worden bepaald. 824.
- BRUYN (H. E. DE)**. Verslag over een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om inlichtingen omtrent wijzigingen in de Noordzeekust. 302.
— Verslag over eene verhandeling van Dr. J. LORIÉ. 303.
— Nota omtrent de daling van den bodem in de laatste jaren. 395.
— Verslag over eene verhandeling van den Heer Jhr. M. VAN BERESTEYN. 421.
— Verslag Geologische commissie. 678.
— Verslag over eene verhandeling van den Heer H. VAN CAPPELLE. 854.
- BÜCHNER (F. II)**. Over de radioactiviteit van rubidium-verbindingen. 91.
- BUITENZORG-FONDS**. Bericht van den Heer A. H. BLAAUW dat hij wegens ernstige ongeteldheid verhinderd is naar Buitenzorg te vertrekken. 175.
— Bericht dat het aan den Heer A. H. BLAAUW verleende subsidie wordt overgedragen aan den Heer J. KUYPER. 420.
- BURCK (W.)**. Bijdrage tot de kennis van de suikerafscheiding bij de plant. 278. 335.
- BUYTENDIJK (F. J. J.)**. Over de veranderingen in het bloedserum van haaien na verbloeding. 261.
— Over de samenstelling der urine van haaien bij normale en versterkte diurese. 264.
— Over de gaswisseling der koudbloedige dieren in verband met hunne grootte. 870.
- CAMERA SILENTA (DE)** van het Physiologisch Laboratorium te Utrecht. 739.
- CAPPELLE (H. VAN)**. Aanbieding eener verhandeling: „Bijdrage tot de kennis van de landijsvormingen in de provincie Friesland en van het oudere fluviatile diluvium in den ondergrond van Noord-Nederland”. 797.
— Verslag hierover. 854.
- CHROMOSFEER-LICHT** (Over den oorsprong van het). 456.
- COHEN (ERNST) en J. OLIE jr.** Het atoomvolume van allotrope modifikaties bij zeer lage temperaturen. 377.
- COHEN (ERNST) en W. TOMBROCK**: Het Elektromotorisch gedrag der Zinkamalgamen. 17.
- COL D'OLEN** (Missiven van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende de wijze waarop door de Regeering de subsidie aan het Laboratorium op den) zal worden uitgekeerd. 174.
— (Bericht van ontvangst van het subsidie ten behoeve van het Laboratorium op den). 504.

- COL D'OLEN** (Missiven van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende de mededeeling dat op de begrooting voor 1910 een som van f 1000 is uitgetrokken ter tegemoetkoming in de reis- en verblijfkosten voor de uitzending naar het Laboratorium op den). 676.
- Missive betreffende het rapport van het Laboratorium op den (--). 800.
- CONGRÈS mondial des associations internationales.** Uitnoodiging om deel te nemen. 801.
- international de Radiologie et d'Electricité (Circulaire betreffende het) van 13—15 September 1910 te Brussel te houden. 175.
 - Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om te berichten of er geleerden zijn bereid te worden afgevaardigd naar het (—). 420.
 - De Heer H. E. J. G. DU BOIS verklaart zich bereid de Regeering aldaar te vertegenwoordigen. 504.
 - De Heer H. E. J. G. DU BOIS benoemd tot gedelegeerde der Regeering naar het (—). 568.
- CONGRES** (3e Internationaal botanisch). Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken of er Nederlandsche geleerden zijn bereid te worden afgevaardigd naar het (—). 174. Circulaire. 420. 504.
- De Heer F. A. F. C. WEST benoemd tot gedelegeerde der Regeering. 504.
 - Sste circulaire van het Internationaal Botanisch (—) te houden te Brussel. 800. 854.
 - (Internationaal Geologisch). Verzoek van den Minister of er Nederlandsche geleerden zijn bereid de Regeering te vertegenwoordigen op het (—) te Stockholm. 854.
 - Verzoek aan de Akademie om een afgevaardigde te zenden. 854.
 - De Heer G. A. F. MOLENGRAAF verklaart zich bereid zowel de Regeering als de Akademie te vertegenwoordigen. 854.
 - (VIIIe Internationaal Zoölogen-). Uitnoodiging tot het zenden van een vertegenwoordiger naar het. 420.
 - De Heer G. C. J. VOSMAER verklaart zich bereid de Akademie te vertegenwoordigen. 504.
 - Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken met verzoek om op te geven of er Nederlandsche geleerden zijn, bereid, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist, te worden afgevaardigd naar het (—). 676.
 - Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken met bericht dat de Heer G. C. J. VOSMAER benoemd is tot gedelegeerde van de Nederlandsche Regeering naar het te Graz te houden (—). 800.
 - (Internationaal Wetenschappelijk). (Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende het te houden (—) te Buenos-Aires. 800.
 - Bericht van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende het (—). 854.
 - (Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig). Uitnoodiging aan de Akademie om zich te doen vertegenwoordigen bij de herdenking van de 100-jarige geboorte van CHARLES DARWIN. 420.
 - voor Schoolhygiëne (Circulaire van het 3e Internationaal). 420.
- CORDA FRATRES** (Circulaire van de Vereeniging). 420.

- CORRESPONDENTEN (Goedkeuring van de wijziging in Art. 5 van het Reglement der Akademie betreffende de keuze van) 2.
- CRISTAUX (Contribution à la connaissance du phénomène de ZEEMAN dans les). 146.
- CROMMELIN (C. A.). Isothermen van eenatomige gassen en binaire mengsels. IV. Opmerkingen over de bereiding van argon. V. Dampspanningen boven -140°C ., kritische temperatuur en kritische druk van argon". 924.
- CURAÇAO, Bonaire en Aruba (Verzoek van den Minister van Koloniën om afschriften van 3 rapporten over een mijnbouwkundig onderzoek van de eilanden). 568.
- DALING VAN DEN BODEM (Nota omtrent eenige bepalingen van de) van Nederland langs de zee kust, afgeleid uit opteekeningen van waterhoogten en waterpassingen. 391.
— (Nota omtrent de) in de laatste jaren. 395.
— (De) 400.
— (Aanteekeningen omtrent de). 407.
- DAMPSPANNINGEN boven -140°C ., kritische temperatuur en kritische druk van argon. 924.
- DARWIN (CHARLES). Uitnoodiging van het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres aan de Akademie om zich te doen vertegenwoordigen bij de herdenking van de 100-jarige geboorte van (—). 420.
- DIÆTHYLANILINE (Over het nitroeren van). 175.
- DIEPZEEAFZETTINGEN (Over oceanische) van Centraal-Borneo. 78.
- Dierkunde. P. P. C. HOEK: „De leeftijd van den zalm af te leiden uit de structuur der schubben." 432.
- DIMORPHIE (Over de abnormale reductie eener aromatische nitroverbinding met tin en zoutzuur en een merkwaardig geval van). 247.
- DISTYLIUM stellare O. K. en Aporosa campanulata J. J. S. 359.
- DIURESE (Over de samenstelling der urine van haaien, bij normale en versterkte). 264.
- DRAAIINGSSNELHEID (Opmerkingen over de proeven van WILSON en MARTIJN betreffende de) der elektrische ontlading in een gas, in een radiaal magnetisch veld. 368.
- DRIEPHASENOPPERVLAK (Over de verschijnselen die optreden wanneer in een ternair stelsel het plooi puntsvlak het tweebladig) ontmoet. 122.
- DRUK (Over den invloed van den) op de mengbaarheid van twee vloeistoffen. 267.
- DUTILH (H). Over partieele racemie. 329.
- EINTHOVEN (W.). Verslag over het Laboratorium op den Col d'Olen. 677.
- ELEMENTEN zwavel en tellurium. (Studien over het Tellurium: I. Over het wederzijdsch gedrag der). 606.
— De thermomagnetische eigenschappen der). 666.
- ELECTRISCHE ONTLADING (Opmerkingen over de proeven van WILSON en MARTIJN betreffende de draaiingssnelheid der) in een gas, in een radiaal magnetisch veld. 368.
- ELECTROCARDIOGRAM (Mededeelingen omtrent het) van het atrium cordis. 450.
- ELECTROMAGNEET (Een verbeterde halfring-). 118.
- ELECTROMOTORISCH GEDRAG (Het) der Zinkamalgamen. 17.
- EMULSIELÆVULAN het produkt der werking van viscosaccharase op rietsuiker. 898.
- ENGELMANN (TH. W.). Bericht van overlijden. 3.
- ENKLAAR (C. J.). Over de inwerking van actief koper op het Linalool. 23.

- EPICENTRUM** (Bepaling van het) van aardbevingen door middel van de opteekening op één station. 880.
- ERRATA.** 390. 673. 852. 974.
- EVENWICHT** vast-vloeibaar-gas. (Het) in binaire mengkristal-systemen. 542.
- EVENWICHTEN** (Over heterogene) bij dissocieerende verbindingen. 238.
- (Over foto- en electrochemische). 386.
- (Over het optreden van maximum- en minimum-druk bij heterogene) bij constante temperatuur. 585.
- EVENWICHTSSTAND** (De schommelingen om een) bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen. (Eerste gedeelte). 634. (Tweede gedeelte). 722.
- EVENWICHTSSTANDEN** (Over de stabiele) van drijvende parallelpipeda. 307.
- FACIALIS** (The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and) in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres. 974.
- FAGACEAE** von Java (Pflanzengeographischer Ueberblick über die). 488.
- FLORA** van Java (Bijdrage tot de) V. 40. VI. 49. VII—XII. 300. 488.
- FLUEGGEA SERRATA** MQ. (Enkele opmerkingen over de nomenclatuur en de synonymie van *Xylosma leptosipes* Clos., *X. fragrans* Deene en). 49.
- FORAMEN MAGNUM** bij de Primaten (Over de ligging en verschuiving van het). 62.
- (Over de helling van het) bij de Primaten. 551.
- FOSSELEN** (Over jurassische) op secundaire ligplaats in Noord-Brabant en Limburg. 361.
- FOYAIET** van Transvaal (Pienariet, een melanocrate). 500, 563.
- FRANCHIMONT** (A. P. N.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer OTTO DE VRIES: „Over de abnormale reductie eener aromatische nitroverbinding met tin en zoutzuur en een merkwaardig geval van dimorphie.” 247.
- Over natriumalkylcarbonaten. 248.
- en E. KRAMER. Over Piperazinederivaten. 476.
- FRAIPONT** (J. J. J.). Bericht van overlijden. 801.
- FRIESLAND** (Bijdrage tot de kennis van de landijsvormingen in de provincie) en van het oudere fluviatile diluvium in den ondergrond van Noord-Nederland. 797.
- Verslag hierover. 854.
- FUNCTIE** (Over de banen eener door infinitesimale iteratie verkregen) in haar complexe vlak. 478.
- FUNCTIES** (Onderzoek naar de), die door infinitesimale iteratie kunnen opgebouwd worden. 250, 366.
- (Infinitesimale iteratie van wederkeerige). 860.
- FUNCTIONAALVERGELIJKING** van ABEL. (Bijdrage tot de oplossing van de). 250.
- GAS** (Opmerkingen over de proeven van WILSON en MARIJN betreffende de draaingsnelheid der elektrische ontlading in een), in een radiaal magnetisch veld. 368.
- GASMETERS** Missive van de Heeren H. HAGA en W. H. JULIUS waarbij zij bericht geven dat de commissie voor onderzoek haar taak heeft volbracht. 676.
- (Missive van den Minister van Landbouw, Nijverheid en Handel ten geleide van het rapport van de commissie voor het onderzoek der aan de ijkkantoren voor de verificatie van) gebezigde toestellen. 800.

- GASSEN (Isothermen van eenatomige) en hunne binaire mengsels. 924.
- GASWISSELING (Over de) der koudbloedige dieren in verband met hunne grootte. 870.
- GEERLIGS (H. C. PRINSEN). Zie PRINSEN GEERLIGS (H. C.).
- GEOLOGISCHE COMMISSIE (Jaarverslag der) over het jaar 1909. 678.
- GEOLOGISCHE ONDERZOEKINGEN (Missive van den Minister van Waterstaat, dat er orde is gesteld op de betaling van het subsidie voor). 800.
- GEOMETRICAL DEDUCTION of semiregular from regular polytopes and space fillings. 797.
- Geophysica.** C. BRAAK: „Het dubbeldagsche maansgetij berekend uit opteekeningen van den astatischen seismograaf te Batavia.” 875.
- C. BRAAK: „Bepaling van het epicentrum van aardbevingen door middel van de opteekening op één station.” 880.
- GEOTROPIE (De onjuistheid van de Stalolithentheorie van de). 304.
- GETIJ CONSTANTEN voor plaatsen langs de kusten en beneduurivieren in Nederland berekend uit de waterstanden van het jaar 1905. 389. Verslag hierover. 421.
- GEURVERWANTSCHAPPEN (Over). 53.
- GILTAY (J. W.) en M. DE HAAS. Iets over de beweging van den kam van de viool. 462.
- GLIMMERLEUCIETBAZALT van Oost-Borneo. 85.
- GLUKOSIDEN (De physiologische beteekenis van). 210.
- GROOTIE (Over de gaswisseling der koudbloedige dieren in verband met hunne). 870.
- HAAIEN (Over de veranderingen in het bloedserum van) na verbloeding. 261.
- (Over de samenstelling der urine van) bij normale en versterkte diurese. 264.
- HAAS (M. DE) en J. W. GILTAY. Iets over de beweging van den kam van de viool. 462.
- HALL (C. J. J. VAN). Bekrachtiging zijner benoeming tot Correspondent. 2.
- HAMBURGER (H. J.). Verslag over het Laboratorium op den Col d'Olen. 67.
- HELIUM (Gegevens betreffende Neon en). 168.
- HERMANIDES (J.). Over geurverwantschappen. 53.
- HERSENONDERZOEK (Goedkeuring van het Concept-Reglement voor de Commissie van Advies voor het Instituut voor) 2.
- (Goedkeuring van de Instructie voor den Directeur en het Personeel verbonden aan het Instituut voor). 174.
- HERSENSCHORS (Oppervlak en bouw der) eener mikrocefale idiote. 218.
- HOEK (P. P. C.). De leeftijd van den zalm af te leiden uit de structuur der schubben. 432.
- HOLLEMAN (A. F.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer E. H. BÜCHNER: „Over de radioaktiviteit van rubidium-verbindingen”. 91.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS en S. POSTMA: „Over de verbindingen van ammoniak en water”. 94.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS en J. P. WUITE: „Over het stelsel water-natrium sulfaat”. 225.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. E. C. SCHEFFER: „Over heterogene evenwichten bij dissocierende verbindingen”. 235.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. BOËSEKEN: „Bijdrage tot de kennis van katalytische verschijnselen.” 354.
- Over de invoering van een derden substituent in het digesubstitueerde benzol. 507.

- HOLLEMAN (A. F.)**. Aanbieding eener mededeeling van den heer A. SMITS: „Een nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie.” 808.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. E. C. SCHEFFER: „Over het optreden van maximum- en minimum-druk bij heterogene evenwichten bij constante temperatuur.” 885.
- en J. BOËSEKEN Over de oorzaak der tegenstelling tusschen de substitutie naar para-ortho-plaatsen en naar de meta-plaats in de benzolkern.” 535.
- en I. J. RINKES. Over de bereiding en de physische eigenschappen van de mono-chloor- en mono-broomphenolen. 540.
- T. VAN DER LINDEN en J. J. P. VALETON. Over eene methode ter quantitative analyse van ternaire mengsels. 751.
- en J. J. P. VALETON. De smeltfiguur bij het stelsel der drie isomere nitranilinen. 755.
- HOOGENHUYZE (C. J. C. VAN)** en C. A. PEKELHARING. Over de vorming van kreatine in de spieren bij den tonus en bij de verstijving. 521.
- HOUT** (Over de rol van de levende elementen in het) bij den transpiratiestroom in boomen. 568.
- IDIOTE** (Oppervlak en bouw der hersenschors eener mikrocefale). 218.
- INDISCH ARCHIPEL** (De Veenen in den). 5.
- (Eenige opmerkingen naar aanleiding van de voordracht over „Veenvormingen in den Oost-). 9.
- INVOLUTIE** (De kubische) van den eersten rang in 't platte vlak. 842.
- ISOTHERMEN** van eenatomige gassen en hunne binaire mengsels. 924.
- van eenatomige stoffen en hun binaire mengsels. Gegevens betreffende neon en helium. 165.
- ITERATIE** (Onderzoek naar de functies, die door infinitesimale) kunnen opgebouwd worden. 250. 366.
- (Over de banen eener door infinitesimale) verkregen functie in haar complexe vlak. 478.
- (Infinitesimale) van wederkeerige functies. 560.
- JAEGER (F. M.)**. Studiën over het Tellurium: I „Over het wederzijdsch gedrag der elementen zwavel en tellurium”. 606.
- JAVA** (Bijdrage tot de kennis der Flora van) V. 40. VI. 49. VII-XII. 300. 488.
- JULIANA** (Schrijven van den Directeur van het Kabinet der Koningin, waarin dank betuigd wordt voor de aangeboden gelukwensen bij de geboorte van Prinses). I.
- JULIUS (W. H.)**. Regelmatige gevolgen van onregelmatige straalbreking in de zon. 181.
- Over den oorsprong van het chromosfeer-licht. 456.
- Over de verklaring van spectroheliogrammen en lijnverplaatsingen en over anomale verstrooiing van het licht. 913.
- KAM** van de viool (Iets over de beweging van den). 462.
- KAMERLINGH ONNES (H.)** Isothermen van éénatomige stoffen en hun binaire mengsels. Gegevens betreffende neon en helium. 165.
- en ALBERT PERRIER. Onderzoekingen over de magnetisatie van vloeibare en vaste zuurstof. 937.
- en PIERRE WEISS. Onderzoekingen over de magnetisatie bij zeer lage temperaturen. 768.

- KAMERLINGH ONNES (H.), P. LENARD en W. E. PAULI. Het gedrag der aardalkaliphosphoren bij verschillende in het bijzonder zeer lage temperaturen. 151.
- KAMERLINGH ONNES (H.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer JEAN BECQUEREL: „Contribution à la connaissance du phénomène de ZEEMAN dans les cristaux.” 146.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren ERNST COHEN en J. OLIE JR.: „Het atoomvolume van allotrope modiïkaties bij zeer lage temperaturen.” 377.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren J. W. GILTAY en M. DE HAAS: „Iets over de beweging van den kam van de viool” 462.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer PIERRE WEISS: „Onderzoekingen over de magnetisatie bij zeer lage temperaturen.” 768.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. A. CROMMELIN: „Isothermen van eenatomige gassen en hunne binaire mengsels. IV. Opmerkingen over de bereiding van argon. V. Dampspanningen boven — 140° C. kritische temperatuur en kritische druk van argon.” 924.
- KAPTEYN (W.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer M. J. VAN UVEN: „Onderzoek naar de functies, die door infinitesimale iteratie kunnen opgebouwd worden. Bijdrage tot de oplossing van de functionaalvergelijking van ABEL.” 250. 366.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer M. J. VAN UVEN: „Over de banen eener door infinitesimale iteratie verkregen functie in haar complexe vlak.” 478.
- KATALYTISCHE VERSCHIJNSELEN (Bijdrage tot de kennis van). 354.
- KERR-EFFEKT (Der magneto-optische) bei ferromagnetischen Verbindungen und Legierungen.” 903.
- KOHNSTAMM (PH.). Een kort antwoord op de opmerkingen van den Heer J. J. VAN LAAR. 560.
- (Eenige opmerkingen van den Heer J. J. VAN LAAR naar aanleiding van een antwoord van den Heer) 749.
- en J. TIMMERMANS. Over den invloed van den druk op de mengbaarheid van twee vloeistoffen. 267.
- (Eenige opmerkingen naar aanleiding eener verhandeling van de Heeren). 497.
- KOLONIËN (Minister van). Zie MINISTER van Koloniën.
- KONINGIN (Schrijven van den Directeur van het Kabinet der) waarin dank betuigd wordt voor de aangeboden gelukwenschen bij de geboorte van Prinses Juliana. 1.
- KOORDERS (S. H.). Enkele opmerkingen naar aanleiding van de voordracht van Professor C. E. A. WICHMANN over: „Veevormingen in den Oost-Indischen Archipel”. 9.
- Kleine bijdrage tot de kennis der endozoische zadenverspreiding door vogels in Java, op grond van een door den Heer BARTHELS, op den Pangerangan en bij Batavia bijeengebrachte collectie. I (Bijdrage tot de kennis der Flora van Java. V). 40.
- Enkele opmerkingen over de nomenclatuur en de synonymie van *Xylosma leprosisipes* Clos. *X. fragrans* Decne en *Flueggea serrata* Miq. (Bijdrage tot de kennis der Flora van Java. VI). 49.
- Aanbieding eener verhandeling: „Beitrag zur Kenntniss der Flora von Java.” 300.
- Pflanzengeographischer Ueberblick über die Fagaceae von Java 488.

- KOPER** (Over de inwerking van actief) op het Linaloöl. 23.
- KORTEWEG** (D. J.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Over één-éénduidige continue transformaties van oppervlakken in zichzelf.” 106.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. BRANDSEN: „Over de stabiele evenwichtsstanden van drijvende parallelpipeda.” 307.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. E. J. BETH: „Over de schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen”. (Eerste gedeelte) 634. (Tweede gedeelte) 722.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Over continue vectordistributies op oppervlakken”. (tweede mededeeling). 702.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Over de structuur der perfecte puntverzamelingen”. 833.
- Bekrchtiging zijner benoeming tot Onder-Voorzitter. 2. 554.
- KŌTARŌ HONDA** en H. E. J. G. DU BOIS. De thermomagnetische eigenschappen der elementen. 666.
- KRAMER** (E) en A. P. N. FRANCHIMONT. Over Piperazinederivaten. 476.
- KREATINE** (Over de vorming van) in de spieren bij den tonus en bij de verstijving. 521.
- KROMME** (Over lineaire poolgroepen behoorende bij een biquadratische vlakke). 555.
- KROMMINGEN** (Onderzoekingen omtrent de betrekking tusschen praesentatietijd en grootte van den prikkel bij geotropische). 11.
- KRUYT** (H. R.). Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire mengkristal-systemen. 542.
- KUBISCHE KROMME** (Over puntenparen, die met betrekking tot een vlakke) geassocieerd zijn. 744.
- KUYPER** (J.). De invloed van de temperatuur op de ademhaling der hoogere planten. 201.
- Bericht van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken dat er geen bezwaar bestaat om het aan Dr. A. H. BLAAUW verleende subsidie voor een bezoek aan het Botanisch Station te Buitenzorg over te dragen aan den Heer (—) 420.
- LAAR** (J. J. VAN). Iets over den vasten toestand. III. 27. IV. 97.
- Eenige opmerkingen naar aanleiding eener verhandeling van de Heeren TIMMERMANS en KOHNSTAMM). 497.
- (Een kort antwoord op de opmerkingen van den Heer). 560.
- Eenige opmerkingen naar aanleiding van een antwoord van den Heer KOHNSTAMM. 749.
- LANDIJSFORMINGEN** (Bijdrage tot de kennis van de) in de provincie Friesland en van het oudere fluviale diluvium in den ondergrond van Noord-Nederland. 797.
- Verslag hierover. 554.
- LEERSUM** (P. VAN). Bekrchtiging zijner benoeming tot Correspondent. 2.
- LEGIERINGEN** (Der magneto-optische Kerr-Effekt bei ferromagnetischen Verbindungen und). 903.
- LELY** (C.). Jaarverslag der geologische commissie. 678.
- LENARD** (P.), H. KAMERLINGH ONNES en W. E. PAULI. Het gedrag der aardalkali-phosphoren bij verschillende in het bijzonder zeer lage temperaturen. 151.
- LICHT** (Over de verstrooiing van het) door molekulen. 659.

- LICHT (Over de verklaring van spectroheliogrammen en lijnverplaatsingen, en over anomale verstrooiing van het). 913.
- LIMBURG (Over jurassische fossielen op secundaire ligplaats in Noord-Brabant en). 361.
- LINDEN (F. VAN DER), J. J. P. VALETON en A. F. HOLLEMAN. Over eene methode ter quantitative analyse van ternaire mengsels. 751.
- LINALÖÖL (Over de inwerking van actief koper op het). 23.
- LORENTZ (H. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Iets over den vasten toestand.” III. 27. IV. 97.
- Over de theorie van het ZEEMAN-effect bij waarneming in willekeurige richting. 126.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. A. VOLLGRAFF: „Opmerkingen over de proeven van WILSON en MARTIJN betreffende de draaiingssnelheid der elektrische ontlading in een gas, in een radiaal magnetisch veld.” 368.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Eenige opmerkingen naar aanleiding eener verhandeling van de Heeren TIMMERMANS en KOHNSTAMM.” 497.
- Aanbieding eener mededeeling: „Over de verstrooiing van het licht door molekulen.” 650.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Eenige opmerkingen naar aanleiding van een antwoord van den Heer KOHNSTAMM.” 749.
- Bekrachtiging zijner benoeming tot Voorzitter. 854.
- LORIA (STANISLAW). Der magneto optische Kerr-Effekt bei ferromagnetischen Verbindungen und Legierungen. 903
- LORIÉ (J.). Aanbieding eener verhandeling: „Het Uddeler-Meer en de Veluwe.” 172. Vers'ag hierover. 303.
- LOOISTOF (Over het aantoonen van) in de levende plant en over hare physiologische beteekenis. 673. 680.
- LIJNEN (De graad van volledigheid der circulaire polarisatie van magnetisch gesplitste). 317.
- LIJNENVERPLAATSINGEN (Over de verklaring van spectroheliogrammen en), en over anomale verstrooiing van het licht. 913.
- MAANSGETIJ (Het dubbeldaagsche) berekend uit opteekeningen van den astatischen seismograaf te Batavia. 875.
- MAGNETISCH VELD (Opmerkingen over de proeven van WILSON en MARTIJN betreffende de draaiingssnelheid der elektrische ontlading in een gas, in een radiaal) 368.
- MAGNETISCHE SPLITSING (De) van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken. (Eerste mededeeling). 621. (Tweede mededeeling). 889.
- MAGNETISATIE. (Onderzoekingen over de) bij zeer lage temperaturen. 768.
- (Onderzoekingen over de) van vloeibare en van vaste zuurstof. 937.
- MARTIN (K.). Rangifer tarandus aus Nederland. 422.
- MARTYN (Opmerkingen over de proeven van WILSON en), betreffende de draaiingssnelheid der elektrische ontlading in een gas, in een radiaal magnetisch veld. 368.
- MAXIMUM- (Over het optreden van) en minimum-druk bij heterogene evenwichten bij constante temperatuur. 885.
- Mechanica. P. BRANDSEN: „Over de stabiele evenwichtsstanden van drijvende parallelpipeda”. 307.

MENGBAARHEID (Over den invloed van den druk op de) van twee vloeistoffen. 267.

MENGGKRISTAL-SYSTEMEN (Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire). 512.

METHODE (Over eene) ter quantitative analyse van ternaire mengsels". 751.

Mikrobiologie. M. W. BEYERINCK: „Over viscosaccharase, een enzym, dat uit rietsuiker slijm voortbrengt." 591.

— M. W. BEYERINCK: „Over variabiliteit bij *Bacillus prodigiosus*." 593.

— M. W. BEYERINCK: „Emulsielaevulan, het produkt der werking van viscosaccharase op rietsuiker." 598.

MINIMUMDRUK (Over het optreden van maximum- en) bij heterogene evenwichten bij constante temperatuur. 885.

MINISTER van Binnenlandsche Zaken. Bekrachtiging van de benoeming van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN tot Voorzitter, D. J. KORTIEWEG tot Onder-Voorzitter, W. T. DE VOGEL, te Semarang, P. VAN LEERSUM, te Bandung en C. J. J. VAN HALL, te Paramaribo tot Correspondenten. 2.

— Goedkeuring wijziging Art. 5 van het Reglement der Akademie betreffende de keuze van Correspondenten. 2.

— Goedkeuring Concept-Reglement voor de Commissie van advies voor het Instituut voor Hersenonderzoek. 2.

— Toezending van een bericht van den Consul-Generaal te Melbourne betreffende Radium. 2.

— Verzoek om bericht over wijzigingen in de Noordzeekust. 174. Verslag. 302. 391.

— Missiven betreffende de wijze waarop door de Regeering de subsidie aan het Laboratorium op den Col d'Olen zal worden uitgekeerd. 174.

— Verzoek om bericht of er Nederlandsche geleerden zijn bereid te worden afgevaardigd naar het 3e Internationaal botanisch Congres te Brussel te houden. 174.

— Goedkeuring van de Instructie voor den Directeur en het Personeel verbonden aan het Instituut voor Hersenonderzoek. 174.

— Bericht dat er geen bezwaar bestaat om het aan Dr. A. H. BLAAUW verleende subsidie voor een bezoek aan het botanisch station te Buitenzorg overgedragen aan den Heer J. KUYPER. 420.

— Verzoek om te willen berichten of er Nederlandsche geleerden zijn bereid te worden afgevaardigd naar het Congres voor Radiologie en Electriciteit. 420.

— Bericht dat de Heer F. A. F. C. WEST benoemd is tot gedelegeerde der Regeering bij het 3e Internationaal botanisch Congres. 504.

— Dankzegging voor de ontvangst van het Verslag omtrent wijzigingen in de Noordzeekust. 504.

— Bericht dat de Heer H. E. J. G. DU BOIS benoemd is tot gedelegeerde der Regeering bij het Congres voor Radiologie en Electriciteit. 568.

— Bericht dat op de begroting voor 1910 een som van f 1000 is uitgetrokken ter tegemoetkoming in de reis- en verblijfkosten voor de uitzending naar het Laboratorium op den Col d'Olen. 676.

— Verzoek om te willen berichten of er Nederlandsche geleerden zijn, bereid, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist te worden afgevaardigd naar het te Graz te houden internationaal zoölogisch congres. 676.

- MINISTER van Binnenlandsche Zaken. Bericht dat het subsidie voor de Akademie met 1 Januari 1910 met *f* 4000 verhoogd is. 676.
- Missive dat de Heer G. C. J. VOSMAER benoemd is tot gedelegeerde van de Nederlandsche Regeering bij het te Graz te houden Internationaal Zoölogisch Congres. 800.
 - Missive dat door tusschenkomst van den Minister van Buitenlandsche Zaken een schrijven ontvangen is betreffende het te houden Internationaal Wetenschappelijk Congres te Buenos-Aires. 800.
 - Missive betreffende het rapport over het Laboratorium op den Col d'Olen. 800.
 - Bekrachting van de benoeming van de Heeren H. A. LORENTZ tot Voorzitter, en D. J. KORTEWEG tot Onder Voorzitter. 854.
 - Bericht dat er geen voldoende termen bestaan om de aanwijzing van een Regeeringsgedelegeerde te bevorderen naar het Internationaal Wetenschappelijk Congres te Buenos-Aires. 854.
 - Verzoek of er Nederlandsche geleerden zijn bereid de Regeering te vertegenwoordigen op het Internationaal Geologisch Congres te Stockholm. 854.
- MINISTER van Koloniën. Verzoek om afschriften van 3 rapporten betreffende een mijnbouwkundig onderzoek van de eilanden Curaçao, Bonaire en Aruba. 568.
- MINISTER van Landbouw, Nijverheid en Handel. Rapport van de commissie voor onderzoek der aan de ijkkantoren voor de verificatie van gasmeters gebezigde toestellen. 800.
- MINISTER van Waterstaat. Bericht dat op de betaling van het subsidie voor geologische onderzoekingen orde is gesteld. 800.
- MODIFIKATIES (Het atoomvolume van allotrope) bij zeer lage temperaturen. 377.
- MOLENGRAAFF (G. A. F.). Over oceanische diepzeeafzettingen van Centraal-Borneo. 78.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. A. BROUWER: „Glimmerleucietbazalt van Oost-Borneo.” 85.
 - Verslag over een schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken om inlichtingen omtrent wijzigingen van de Noordzeekust. 302.
 - Verslag over eene verhandeling van Dr. J. LORIÉ. 303.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. TESCH: „Over jurassische fossielen op secundaire ligplaats in Noord-Brabant en Limburg”. 361.
 - De daling van den bodem van Nederland. 400.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. A. BROUWER: „Pienariet, een melanocrate foyaiet uit Transvaal.” 500. 563.
 - Verslag over eene verhandeling van den Heer H. VAN CAPPELLE. 854.
 - Verklaart zich bereid zoowel de Regeering als de Akademie te vertegenwoordigen bij het in Augustus 1910 te Stockholm te houden internationaal geologisch Congres. 854.
- MOLEKULEN (Over de verstrooiing van het licht door). 650.
- MOLL (J. W.). Levensbericht van wijlen den Heer C. A. J. A. OUDEMANS. 62.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer E. REINDERS: „Over de rol van levende elementen in het hout bij den transpiratiestroom in boomen.” 568.

- MOLL (J. W.)**, Aanbieding eener mededeeling van den Heer K. ZIJLSTRA: „Bijdragen tot de kennis der waterbeweging in de planten.” 580.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. VAN WISSELIINGH: „Over het aantoonen van looistof in de levende plant en over hare physiologische beteekenis.” 673. 680
- MONO-CHLOOR** en **mono-broomphenolen** (Over de bereiding en de physische eigenschappen van de), 540.
- MOTOR CELLS** (The migrations of the) of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres, 974.
- NATRIUMALKYLCARBONATEN** (Over), 248.
- NATRIUMSULFAAT** (Over het stelsel water-), 225.
- Natuurkunde. J. J. VAN LAAR**: „Iets over den vasten toestand” III. 27. IV. 97.
- H. E. J. G. DU BOIS: „Een verbeterde halfring-electromagneet.” 118.
- A. SMITS en C. WITSENBURG: „Over de verschijnselen, die optreden wanneer in een ternair stelsel het plooi puntsvlak het tweebladig driefasenooppervlak ontmoet”. 122.
- H. A. LORENTZ. „Over de theorie van het ZEEMAN-effect bij waarneming in willekeurige richting”. 126.
- JEAN BECQUEREL: „Contribution à la connaissance du phénomène de ZEEMAN dans les cristaux”. 146.
- P. LENARD, H. KAMERLING ONNES en W. E. PAULI: „Het gedrag der aard-alkaliphosphoren bij verschillende in het bijzonder zeer lage temperaturen”. 151.
- H. KAMERLINGH ONNES: „Isothermen van éénatomige stoffen en hun binaire mengsels. Gegevens betreffende neon en helium”. 168.
- W. H. JULIUS: „Regelmatische gevolgen van onregelmatige straalbreking in de zon”. 181.
- J. TIMMERMANS en PH. KOHNSTAMM: „Over den invloed van den druk op de mengbaarheid van twee vloeistoffen.” 267.
- P. ZEEMAN: „De graad van volledigheid der circulaire polarisatie van magnetisch gesplitste lijnen”. 317.
- J. A. VOLGRAFF: „Opmerkingen over de proeven van WILSON en MARTYN betreffende de draaiingssnelheid der electriche ontlading in een gas, in een radiaal magnetisch veld”. 368.
- ERNST COHEN en J. OLIE JR.: „Het atoomvolume van allotrope modificaties bij zeer lage temperaturen”. 377.
- A. SMITS: „Over foto- en electro-chemische evenwichten”. 385.
- W. H. JULIUS: „Over den oorsprong van het chromosfeer-licht”. 456.
- J. W. GILTAY en M. DE HAAS: „Iets over de beweging van den kam van de viool.” 462.
- J. J. VAN LAAR: „Eenige opmerkingen naar aanleiding eener verhandeling van de Heeren TIMMERMANS en KOHNSTAMM.” 497.
- PH. KOHNSTAMM: „Een kort antwoord op de opmerkingen van den Heer VAN LAAR.” 560.

- Natuurkunde.** P. ZEEMAN en B. WINAVER: „Over de magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken.” (Eerste mededeeling). 621. (Tweede mededeeling). 859.
- H. A. LORENTZ: „Over de verstrooiing van het licht door molekulen”. 650.
- H. E. J. G. DU BOIS en KŌTARŌ HONDA. „De thermomagnetische eigenschappen der elementen”. 666.
- J. J. VAN LAAR: „Eenige opmerkingen naar aanleiding van een antwoord van den Heer KOHNSTAMM”. 749.
- H. KAMERLINGH ONNES en PIERRE WEISS: „Onderzoekingen over de magnetisatie bij zeer lage temperaturen.” 768.
- STANISLAW LORIA: „Der magneto-optische KERR-Effekt bei ferromagnetischen Verbindungen und Legierungen”. 903.
- W. H. JULIUS: „Over de verklaring van spectroheliogrammen en lijnverplaatsingen en over anomale verstrooiing van het licht. 913.
- C. A. CROMMELIN: „Isothermen van eenatomige gassen en hunne binaire mengsels. IV. Opmerkingen over de bereiding van argon. V. Dampspanningen boven — 140° C., kritische temperatuur en kritische druk van argon”. 924.
- H. KAMERLINGH ONNES en ALBERT PERRIER: „Onderzoekingen over de magnetisatie van vloeibare en van vaste zuurstof”. 937.
- NEDERLAND** (Getijconstanten voor plaatsen langs de kusten en benedenrivieren van), berekend uit de waterstanden van het jaar 1906. 389. Verslag hierover 421.
- (Nota omtrent eenige bepalingen van de daling van den bodem van), langs de zee kust, afgeleid uit waarnemingen van waterhoogten en waterpassingen. 391.
- (De daling van den bodem van). 400.
- (Aanteekeningen omtrent de daling van den bodem van). 407.
- (Bijdrage tot de kennis van de landijsvormingen in de provincie Friesland en van het oudere fluviatiele diluvium in den ondergrond van Noord-). 797.
- Verslag hierover. 854.
- NEON** en helium (Gegevens betreffende). 168.
- NEWCOMB** (SIMON). Bericht van overlijden. 175.
- NITRANILINEN** (De smeltfiguur bij het stelsel der drie isomere). 755.
- NITREEREN** (Over het) van diaethylaniline. 175.
- NITROVERBINDING** (Over de abnormale reductie eener aromatische) met tin en zoutzuur en een merkwaardig geval van dimorphie. 247.
- NOORD-BRABANT** en Limburg (Over jurassische fossielen op secundaire ligplaats in). 361.
- NOORDZEEKUST** (Verslag over een schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken om inlichtingen omtrent wijzigingen van de). 302.
- (Dankzegging van den Minister van Binnenlandsche Zaken voor het ontvangen verslag omtrent wijzigingen in de). 504.
- NOYONS** (A. K. M.). Mededeelingen omtrent het electrocardiogram van het atrium cordis. 450.
- Mededeeling over Physiologische Sklerometrie. 801.
- OLIE JR. (J.)** en ERNST COHEN. Het atoomvolume van allotrope modifikaties bij zeer lage temperaturen. 377.

- ONNES (H. KAMERLINGH). Zie KAMERLINGH ONNES (II).
- ONDERZOEKINGEN over de magnetisatie van vloeibare en van vaste zuurstof". 937.
- OPPEERVLAKKEN (Over één-éénduidige continue transformaties van) in zich zelf. (2e mededeeling). 106.
- {(Over de) waarvan de asymptotische lijnen door quadraturen kunnen worden bepaald. 824.
- OUDEMANS (C. A. J. A.). — Levensbericht van —. 62.
- Palaeontologie.** K. MARTIN: „Rangifer tarandus aus Nederland." 422.
- PARALLELOPIPEDA (Over de stabiele evenwichtsstanden van drijvende). 307.
- PAULI (W. E.), P. LENARD en H. KAMERLINGH ONNES. Het gedrag der aardalkali-phosphoren bij verschillende in het bijzonder zeer lage temperaturen. 151.
- PEKELHARING (Mej. C. J.). Onderzoekingen omtrent de betrekking tusschen praesentatietijd en grootte van den prikkel bij geotropische krommingen. 11.
- (De onjuistheid der statolithentheorie van de geotropie, aangetoond door onderzoekingen van). 304.
- PEKELHARING (C. A.) brengt verslag uit over het Laboratorium Col d'Olen. 677.
- en C. J. C. VAN HOOGENHUYZE. Over de vorming van kreatine in de spieren bij den tonus en bij de verstijving. 521.
- FERRIER (ALBERT) en H. KAMERLINGH ONNES. Onderzoekingen over de magnetisatie van vloeibare en van vaste zuurstof. 937.
- Petrographie.** H. A. BROUWER: „Glimmerleucietbazalt van Oost-Borneo". 85.
- Physiologie.** F. J. J. BUYTENDIJK: „Over de veranderingen in het bloedserum van haaïen na verbloedingen". 261.
- F. J. J. BUYTENDIJK: „Over de samenstelling der urine van haaïen, bij normale en versterkte diurese." 264.
- A. K. M. NOYONS: „Mededeelingen omtrent het electrocardiogram van het atrium cordis." 459.
- C. A. PEKELHARING en C. J. C. VAN HOOGENHUYZE: „Over de vorming van kreatine in de spieren bij den tonus en bij de verstijving." 571.
- H. ZWAARDEMAKER: „Over de Camera silenta van het Physiol. Lab. te Utrecht." 739.
- A. K. M. NOYONS: Mededeeling omtrent „Physiologische Sklerometrie." 501.
- F. J. J. BUYTENDIJK: „Over de gaswisseling der koudbloedige dieren in verband met hunne grootte". 570.
- K. F. WENCKEBACH: „Over den invloed der ademhaling op den pols". 974.
- PIENAERIET, een melanocrate foyaïet van Transvaal. 509, 563.
- PIPERAZINEDERIVATEN (Over). 476.
- PLACE (T.) brengt verslag uit over het Laboratorium Col d'Olen. 677.
- Plantkunde.** S. H. KOORDERS: „Enkele korte opmerkingen naar aanleiding van de voordracht van Prof. C. E. A. WICHMANN over Veenvormingen in den Oost-Indischeu Archipel". 9.
- Mej. C. J. PEKELHARING: „Onderzoekingen omtrent de betrekking tusschen praesentatietijd en grootte van den prikkel bij geotropische krommingen". 11.

- Plantkunde.** S. H. KOORDERS: „Kleine bijdrage tot de kennis der endozoïsche zadenverspreiding door vogels in Java, op grond van een door den Heer BARTHELS op den Pangerangan en bij Batavia bijeengebrachte collectie. I. (Bijdrage tot de kennis der Flora van Java. V.) 40.
- J. KUYPER: „De invloed van de temperatuur op de ademhaling der hoogere planten”. 201.
- TH. WEEVERS: „De physiologische beteekenis van glukosiden”. 210.
- W. BURCK: „Bijdrage tot de kennis van de suikerafscheiding bij de plant.” 278, 335.
- Aanbieding eener verhandeling van den Heer S. H. KOORDERS: „Beitrag zur Kenntnis der Flora von Java”. VII-XII. 309.
- F. A. F. C. WENT: „De onjuistheid van de statolithentheorie van de geotropie, aangetoond door onderzoekingen van Mej. C. J. PEKELHARING. 304.
- J. J. SMITH: „Distylium stellare O. K. en Aporosa campanulata J.J.S.” 359.
- S. H. KOORDERS: „Pflanzengeographischer Ueberblick über die Fagaceae von Java” (Beitrag zur Kenntnis der Flora von Java. N^o. VII). 488.
- E. REINDERS: „Over de rol van levende elementen in het hout bij den transpiratiestroom in boomen”. 568.
- K. ZYLSTRA: „Bijdragen tot de kennis der waterbeweging in de planten.” 580.
- C. VAN WISSELINGH: „Over het aantoonen van looistof in de levende plant en over hare physiologische beteekenis”. 673. 680.
- PLOOIPUNTSVLAK** (Over de verschijnselen, die optreden wanneer in een ternair stelsel het) het tweebladig driephasenoppervlak ontmoet. 122.
- PFLÜGER (E).** Bericht van overlijden. 854.
- POLARISATIE** (De graad van volledigheid der circulaire) van magnetisch gesplitste lijnen. 317.
- POLS** (Over den invloed der ademhaling op den). 974.
- POLYTOPES** (Geometrical deduction of semiregular from regular) and space fillings. 797.
- POOLFIGUREN** (Over) met betrekking tot een vlakke kubische kromme. 819.
- POOLGROEPEN** (Over lineaire) behoorende bij een biquadratische vlakke kromme. 855.
- POSTMA (S).** en A. SMITS. Over de verbindingen van ammoniak en water. 94.
- PRAESENTATIETIJD** (Onderzoekingen omtrent de betrekking tusschen) en grootte van den prikkel bij geotropische krommingen. 11.
- PRIKKEL** bij geotropische krommingen. (Onderzoekingen omtrent de betrekking tusschen praesentatietid en grootte van den). 11.
- PRIMATEN** (Over de ligging en verschuiving van het Foramen Magnum bij de) 62.
- (Over de helling van het Foramen magnum bij de). 551.
- PRINSEN GEERLIGS (H. C).** Verzoek om als Correspondent der Afdeeling te worden gedefungeerd. 302.
- PUNTVERZAMELINGEN** (Over de structuur der perfekte). 833.
- PUNTENPAREN** (Over) die met betrekking tot een vlakke kubische kromme geassocieerd zijn. 744.
- QUADRATUREN** (Over de oppervlakken, waarvan de asymptotische lijnen door) kunnen worden bepaald.” 824.

- RACEMIE** (Over partieele). 329.
- RADIOAKTIVITEIT** (Over de) van rubidium-verbindingen. 91.
- RADIUM** (Toezending van een bericht van den Consul-Generaal te Melbourne betreffende) 2.
- RANGIFER TARANDUS** aus Nederland. 422.
- RAUWENHOFF** (N. W. P.). Bericht van overlijden. 505.
- REDUCTIE** (Over de abnormale) eener aromatische nitroverbinding met tin en zoutzuur en een merkwaardig geval van dimorphie. 217.
- REGLEMENT** der Akademie (Goedkeuring van de wijziging in Art. 5 van het) betreffende de keuze van Correspondenten. 2.
- REINDERS** (E.). Over de rol van levende elementen in het hout bij den transpiratiestroom in boomen. 568.
- RINKES** (I. J.) en A. F. HOLLEMAN. Over de bereiding en de physische eigenschappen van de mono-chloor- en mono-broomphenolen. 540.
- RIETSUIKER** (Viscosaccharase, een enzym, dat uit) slijm voortbrengt. 591.
— (Emulsielaevulan, het produkt der werking van viscosaccharase op). 898.
- ROMBURGH** (P. VAN). Aanbieding eener mededeeling van de Heeren ERNST COHEN en W. TOMBROCK. „Het elektromotorische gedrag der zinkamalgamen”. 17.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. J. ENKLAAR: „Over de inwerking van het actief koper op het Linaloöl.” 23.
— Over het nitreeren van diaethylaniline. 175.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. DUTILH: „Over partieele racemie.” 329.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. R. KRUYT: „Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire mengkristal-systemen.” 512.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: Studiën over het Tellurium; I. „Over het wederzijdsch gedrag der elementen zwavel en tellurium.” 606.
- RUBIDIUMVERBINDINGEN** (Over de radioactiviteit van). 91.
- RUIMTE-VOORSTELLING** (De P, T, X -) van het stelsel: aether-anthrachinon. 297.
- SANDE BAKHUYZEN** (H. G. VAN DE). Bekrachtiging zijner benoeming tot Voorzitter. 2.
— Verslag over een schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken om inlichtingen omtrent wijzigingen der Noordzeekust. 302.
— Nota omtrent eenige bepalingen van de daling van den bodem van Nederland langs de zeekust, afgeleid uit opteekeningen van waterhoogten en waterpassing. 391.
— benoemd tot afgevaardigde naar de 4de algemeene vergadering der Internationale Associatie der Akademien te Rome. 797.
- SCHAEFFER** (F. E. C.). Over heterogene evenwichten bij dissocierende verbindingen. 238.
— Over het optreden van maximum- en minimum-druk bij heterogene evenwichten bij constante temperatuur.” 885.
- Scheikunde.** ERNST COHEN en W. TOMBROCK: „Het elektromotorisch gedrag der zinkamalgamen.” 17.
— C. J. ENKLAAR: „Over de inwerking van actief koper op het Linaloöl.” 23.
— E. H. BÜCHNER: „Over de radioactiviteit van rubidium-verbindingen.” 91.

- Scheikunde.** A. SMITS en S. POSTMA: „Over de verbindingen van ammoniak en water.” 94.
- P. VAN ROMBURGH: „Over het nitreeren van diaethylaniline.” 175.
- A. SMITS en J. P. WUITE: „Over het stelsel water-natriumsulfaat.” 225.
- F. E. C. SCHEFFER: „Over heterogene evenwichten bij dissocieerende verbindingen. 238.
- OTTO DE VRIES: „Over de abnormale reductie eener aromatische nitroverbinding met tin en zoutzuur en een merkwaardig geval van dimorphie.” 247.
- A. P. N. FRANCHIMONT: „Over natriumalkylcarbonaten.” 248.
- A. SMITS: „Over teruglopende smeltlijnen.” 294.
- A. SMITS: „De *P, T, X*-ruimtevoorstelling van het stelsel: aether-anthrachinon.” 297.
- H. DUTILH: „Over partieele racemie.” 329.
- J. BOËSEKEN: „Bijdrage tot de kennis van katalytische verschijnselen.” 354.
- A. P. N. FRANCHIMONT: „Over Piperazinederivaten.” 476.
- A. F. HOLLEMAN: „Over de invoering van een derden substituent in het digesubstiteerde benzol.” 507.
- A. F. HOLLEMAN en J. BOËSEKEN: „Over de oorzaak der tegenstelling tusschen de substitutie naar para-ortho-plaatsen en naar de meta-plaats in de benzolkern.” 535.
- A. F. HOLLEMAN en I. J. RINKES: „Over de bereiding en de physische eigenschappen van de mono-chloor- en mono-broomphenolen.” 540.
- H. R. KRUYT: „Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire mengkristal-systemen.” 542.
- F. M. JAEGER: Studiën over het Tellurium: I. „Over het wederzijdsch gedrag der elementen zwavel en tellurium.” 606.
- A. F. HOLLEMAN, T. VAN DER LINDEN en J. J. P. VALETON: „Over eene methode en quantitative analyse van ternaire mengsels. 751.
- A. F. HOLLEMAN en J. J. P. VALETON: „Over de smeltfiguur bij het stelsel der drie isomere nitranilinen.” 755.
- A. SMITS: „Een nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie.” 808.
- A. F. HOLLEMAN en F. E. C. SCHEFFER: „Over het optreden van maximum- en minimum-druk bij heterogene evenwichten bij constante temperaturen.” 885.
- SCHOMMELINGEN (De) om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige binaire relatie tusschen de trillingsgetallen. (Eerste gedeelte) 634. (Tweede gedeelte). 722.
- SCHOUTE (P. H.). Aanbieding eener verhandeling van Mrs A. BOOLE STOTT: „Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings.” 797.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. VAN DER WOUDE: „De kubische involutie van den eersten rang in 't platte vlak.” 842.
- SCHUBBEN (De leeftijd van den zalm af te leiden uit de structuur der). 432.
- SEISMOGRAAF (Het dubbeldaagsche maausgetij berekend uit opteekeningen van den astatischen) te Batavia. 875.
- SMELTFIGUUR (De) bij het stelsel der drie isomere nitranilinen. 755.
- SMELTLIJNEN (Over teruglopende). 294.
- SKLEROMETRIE (Physiologische). 801.
- SMITH (J. J.). *Distylium stellare* O. K. en *Aporosa campanulata* J. J. S. 359.

- SMITS (A.)**. Over teruglopende smeltlijnen. 294.
 — Een nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie. 508.
 — De *P-T-X*-ruimte-voorstelling van het stelsel aether-anthrachinon. 297.
 — Over foto- en electrochemische evenwichten. 386.
 — en C. WITSENBURG. Over de verschijnselen, die optreden wanneer in een ternair stelsel het plooi puntvlak het tweebladig driefasenooppervlak ontmoet. 122.
 — en J. P. WHITE. Over het stelsel water-natriumsulfaat. 225.
- SPIEREN** (Over de vorming van kreatine in de) bij den tonus en bij de verstijving. 521.
- STATOLITHENTHEORIE** (De onjuistheid van de) van de geotopie. 304.
- STELSEL** aether-anthrachinon (De *P-T-X*-ruimtevoorstelling van het). 297.
 — water-natriumsulfaat (Over het). 225.
- STOFFEN** (Isothermen van eenatomige) en hun binaire mengsels. Gegevens betreffende neon en helium. 168.
- STOK (J. P. VAN DER)**. Verslag over eene verhandeling van den Heer Jhr. M. H. VAN BERESTEYN. 421.
 — Het dubbeldagsche maansgetij berekend uit opteekeningen van den astatischen seismograaf te Batavia. 575.
 — Bepaling van het epicentrum van aardbevingen door middel van de opteekening op één station. 580.
- STAALBREKING** in de zon (Regelmattige gevolgen van onregelmatige). 181.
- STRUCTUUR** (Over de) der perfekte puntverzamelingen. 533.
- SPECTRUM** (De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het) der zonnevlekken. (Eerste mededeeling). 621. (Tweede mededeeling). 589.
- SPECTROHELIOGRAMMEN** (Over de verklaring van) en lijnverplaatsingen, en over anomale verstrooiing van het licht. 913.
- SUBSTITUENT** (Over de invoering van een derden) in het digesubstitueerde benzol. 507.
- SUBSTITUTIE** (Over de oorzaak der tegenstelling tusschen de) naar para-ortho-plaatsen en naar de meta-plaats in de benzolkern. 535.
- SUIKERAFSCHEIDING** (Bijdrage tot de kennis van de) bij de plant. 278.
- TELLURIUM** (Studiën over het): I. Over het wederzijdsch gedrag der elementen zwavel en tellurium. 606.
- TEMPERATUREN** (Het atoomvolume van allotrope modifikaties bij zeer lage). 377.
 — (Het gedrag der aardalkaliphosphoren bij verschillende in het bijzonder zeer lage). 151.
 — (Onderzoekingen over de magnetisatie bij zeer lage). 768.
- TEMPERATUUR** (De invloed van de) op de ademhaling der hoogere planten. 201.
 — Over het optreden van maximum- en minimum-druk bij heterogene evenwichten bij constante). 585.
 — (Dampspanningen boven — 140° C., kritische) en kritische druk van argon. 924.
- TERNAIR STELSEL** (Over de verschijnselen die optreden wanneer in een) het plooi puntvlak het tweebladig driefasenooppervlak ontmoet. 122.
- TERNAIRE MENGSELS** (Over eene methode ter quantitative analyse van). 751.
- TESCH (P.)**. Over jurassische fossielen op secundaire ligplaats in Noord-Brabant en Limburg. 361.

- THEORIE van het ZEEMAN-effect (Over de) bij waarnemingen in willekeurige richting. 126.
- THERMOMAGNETISCHE eigenschappen (De) der elementen. 666.
- TIMMERMANS (J.) en PH. KOHNSTAMM. Over den invloed van den druk op de mengbaarheid van twee vloeistoffen. 267.
- (Eenige opmerkingen naar aanleiding eener verhandeling van de Heeren). 497.
- TOESTAND (Iets over den vasten). III. 27. IV. 97.
- TOMBROCK (W.) en ERNST COHEN. Het elektromotorisch gedrag der zink-amalgamen. 17.
- TRANSFORMATIES (Over één-éénduidige continue) van oppervlakken in zichzelf. (2e mededeeling). 106.
- TRANSPIRATIESTROOM (Over de rol van levende elementen in het hout bij den) in boomen. 568.
- TRANSVAAL (Pienaeriet, een melanocrate foyaiet van). 500, 563.
- TRIGEMINUS ABDUCENS (The migrations of the motor cells of the) and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres. 974.
- TRILLINGSGETALLEN (De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de). (Eerste gedeelte) 634. (Tweede gedeelte) 722.
- TREUB (M.). Bericht dat hem eervol ontslag verleend is als Directeur van het Departement van Landbouw te Buitenzorg. 175.
- UDDELER-MEER (Het) en de Veluwe. 172. Verslag hierover. 303.
- URINE (Over de samenstelling der) van haaien, bij normale en versterkte diuresis. 264.
- UVEN (M. J. VAN). Onderzoek naar de functies, die door infinitesimale iteratie kunnen opgebouwd worden. Bijdrage tot de oplossing van de functionaalvergelijking van ABEL. 250. 366.
- Over de banen eener door infinitesimale iteratie verkregen functie in haar complexe vlak. 478.
- Over infinitesimale iteratie van wederkeerige functies. 860.
- VALETON (J. J. P.), A. F. HOLLEMAN en T. VAN DER LINDEN. Over eene methode ter quantitative analyse van ternaire mengsels. 751.
- en A. F. HOLLEMAN. De smeltfiguur bij het stelsel der drie isomere nitranelinen. 755.
- VALKENBURG (C. T. VAN). Oppervlak en bouw der hersenschors eener mikrocefale idiote. 218.
- VARIABILITEIT bij *Bacillus prodigiosus*. 596.
- VARNA-EXPEDITIE (Verzoek van de Gesellschaft für die Erforschung des Russischen Nordens te Archangel om opgaaf van literatuur betreffende de Willem Barentzen). 172. Antwoord hierop. 302.
- VECTORDISTRIBUTIES (Over continue) op oppervlakken. (Tweede mededeeling). 702.
- VEENEN (De) in den Indischen Archipel. 5.
- VEENVORMINGEN (Eenige opmerkingen naar aanleiding van de voordracht over) in den Oost-Indischen Archipel. 9.
- VELUWE (Het Uddeler-Meer en de). 172. Verslag hierover. 303.
- VERBINDINGEN (Over heterogene evenwichten bij dissocierende). 238.
- VERBINDUNGEN (Der magneto-optische Kerr-Effekt bei ferromagnetischen) und Legierungen. 903.

- VERGADERING (Vaststelling der December-). 501.
 — (Vaststelling der April-). 851.
- VIOOL (Iets over de beweging van den kam van de). 462.
- VISCOSACCHARASE een enzym, dat uit rietsuiker slijm voortbrengt. 591.
 — (Emulsielaevulan het produkt der werking van) op rietsuiker. 898.
- VLAK (De kubische involutie van den eersten rang in 't platte). 842.
- VLOEISTOFFEN (Over den invloed van den druk op de mengbaarheid van twee). 267.
- VOGEL (W. T. DE). Bekrchtiging zijner benoeming tot Correspondent. 2.
- VOLLGRAFF (J. A.). Opmerkingen over de proeven van WILSON en MARTYN betreffende de draaiingssnelheid der electrische ontlading in een gas, in een radiaal magnetisch veld. 368.
- VOLTA (ALESSANDRO). (Circulaire voor de uitgave van de werken van). 62.
- VOSMAER (G. C. J.) verklaart zich bereid de Akademie te vertegenwoordigen op het Sste Internationaal Zoölogen-Congres. 504.
 — De Voorzitter stelt voor den Heer (—) als afgevaardigde voor te dragen op het Internationaal zoölogisch congres. Aldus wordt besloten. 676.
- VRIES (H. DE). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. BRUIN: „Over de oppervlakken, waarvan de asymptotische lijnen door quadraturen kunnen worden bepaald.” 824.
- VRIES (JAN DE). Over puntenparen, die met betrekking tot een vlakke kubische kromme geassocieerd zijn. 744.
 — Over poolfiguren met betrekking tot een vlakke kubische kromme. 819.
 — Over lineaire poolgroepen behorende bij een biquadratische vlakke kromme. 855.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer M. J. VAN UVEN: „Over infinitesimale iteratie van wederkeerige functies.” 860.
- VRIES (OTTO DE). Over de abnormale reductie eener aromatische nitroverbinding met tin en zoutzuur en een merkwaardig geval van dimorphie. 247.
- WAALS (J. D. VAN DER). Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS en C. WITSEBURG: „Over de verschijnselen, die optreden wanneer in een ternair stelsel het plooi puntvlak het tweebladig driephasenoppervlak ontmoet.” 122.
 — Aanbieding van eene mededeeling van de Heeren J. TIMMERMANS en PH. KOHNSTAMM: „Over den invloed van den druk op de mengbaarheid van twee vloeistoffen.” 267.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. SMITS: „Over teruglopende smeltlijnen.” 294.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. SMITS: „De P. T. X.-ruimtevoorstelling van het stel-el aether-anthrachinon.” 297.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. SMITS: „Over foto- en electrochemische evenwichten.” 356.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Een kort antwoord op de opmerkingen van den Heer VAN LAAR.” 560.
- WATER (Over de verbindingen van Ammoniak en). 94.
- WATERAFSCHEIDING bij de plant (Bijdrage tot de kennis van de). 278, 335.
- WATERBEWEGING (Bijdragen tot de kennis der) in de planten. 580.

- WATER-natriumsulfaat (Over het stelsel). 225.
- WATERSTAAT (Minister van). Zie MINISTER van Waterstaat.
- Waterstaat.** Aanbieding eener verhandeling van den Heer M. H. VAN BERESTEYN „Getij-constanten voor plaatsen langs de kusten en benedenrivieren in Nederland berekend uit de waterstanden van het jaar 1906. 389. Verslag hierover. 421.
- WEBER (MAX). Antwoord van den Heer (—) op een schrijven van de Gesellschaft für die Erforschung des Russischen Nordens te Archangel betreffende de literatuur der Willem Barentz- en Varna-expedities. 302.
- WEEVERS (TH.). De physiologische beteekenis van glukosiden. 210.
- WEISS (PIERRE) en H. KAMERLINGH ONNES. Onderzoekingen over de magnetisatie bij zeer lage temperaturen. 768.
- WENCKEBACH (K. F.). Over den invloed der ademhaling op den pols. 974.
- WENT (F. A. F. C.). Aanbieding eener mededeeling van mej. C. J. PEKELHARING: „Onderzoekingen omtrent de betrekking tusschen praesentatietijd en grootte van den prikkel bij geotropische krommingen”. 11.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. KUIJPER: „De invloed van de temperatuur op de ademhaling der hoogere planten”. 201.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer TH. WEEVERS: „De physiologische beteekenis van glukosiden”. 210.
- De onjuistheid van de statolithentheorie van de geotropie aangetoond door onderzoekingen van mej. C. J. PEKELHARING. 304.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. SMITH: „Distylium stellare O. K. en Aporosa campanulata J. J. S.”. 359.
- Benoemd tot gedelegeerde der Regeering bij het 3e Internationaal botanisch Congres 504.
- WICHMANN (C. E. A.). De Veenen in den Indischen Archipel. 5.
- Enkele korte opmerkingen naar aanleiding van de voordracht van den Heer (—). 9.
- WILLEM BARENTZ- en Varna expeditie (Verzoek van de Gesellschaft für die Erforschung des Russischen Nordens te Archangel om opgaaf van literatuur betreffende de). 174. Antwoord hierop. 302.
- WILSON en MARTIJN (Opmerkingen over de proeven van) betreffende de draaiingsnelheid der electrische ontlading in een gas, in een radiaal magnetisch veld. 368.
- WINAWER (B.) en P. ZEEMAN. De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken. (Eerste mededeeling). 621. (Tweede mededeeling). 859.
- Wiskunde.** L. E. J. BROUWER: „Over één-éénduidige, continue transformaties van oppervlakken in zichzelf.” (2e mededeeling). 106.
- M. J. VAN UYEN: „Onderzoek naar de functies, die door infinitesimale iteratie kunnen opgebouwd worden. Bijdrage tot de oplossing van de functionaalvergelijking van ABEL.” 250. 366.
- M. J. VAN UYEN: „Over de banen eener door infinitesimale iteratie verkregen functie in haar complexe vlak.” 478.
- H. J. E. BETH: „De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen.” (Eerste gedeelte). 364. (Tweede gedeelte). 722.

- Wiskunde.** L. E. J. BROUWER: „Over continue vectordistributies op oppervlakken.” (Tweede mededeeling). 702.
- JAN DE VRIES: „Over puntenparen, die met betrekking tot een vlakke kubische kromme geassocieerd zijn,” 744.
 - Aanbieding eener verhandeling van Mrs. A. BOOLE STOTT: „Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings.” 797.
 - JAN DE VRIES: „Over poolfiguren met betrekking tot een vlakke kubische kromme.” 819.
 - J. BRUIN: „Over de oppervlakken, waarvan de asymptotische lijnen door quadraturen kunnen worden bepaald”. 824.
 - L. E. J. BROUWER: „Over de structuur der perfecte puntverzamelingen”. 833.
 - W. VAN DER WOUDE: „De kubische involutie van den eersten rang in 't platte vlak”. 842.
 - JAN DE VRIES: „Over lineaire poolgroepen behoorende bij een biquadratische vlakke kromme”. 855.
 - M. J. VAN UVEN: „Infinitesimale iteratie van wederkeerige functies”. 860.
- WISSELINGH (C. VAN). Over het aantoonen van looistof in de levende plant en over hare physiologische beteekenis. 673, 680.
- WITSENBURG (C.) en A. SMITS. Over de verschijnselen, die optreden wanneer in een ternair stelsel het plooiptunsvlak het tweebladig driephasenoppervlak ontmoet. 122.
- WOUDE (W. VAN DER). De kubische involutie van den eersten rang in 't platte vlak. 842.
- WUITE (J. P.) en A. SMITS. Over het stelsel waternatriumsulfaat. 225.
- XYLOSMA LEPROSIPES CLOS. X. fragrans Decne en Flueggea serrate Miq. (Enkele opmerkingen over de nomenclatuur en de synonymie van). 49.
- ZADENVERSPREIDING (Kleine bijdrage tot de kennis der endozoische) door vogels in Java, op grond van een door den Heer BARTHELS, op den Pangerangan en bij Batavia bijeengebrachte collectie I. 40.
- ZALM (De leeftijd van den) af te leiden uit de structuur der schubben. 432.
- ZEEMAN (Contribution à la connaissance du phénomène de) dans les cristaux. 146.
- ZEEMAN-EFFECT (Over de theorie van het) bij waarneming in willekeurige richting. 126.
- ZEEMAN (F.). De graad van volledigheid der circulaire polarisatie van magnetisch gesplitste lijnen. 317.
- en B. WISAWER. De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken. (Eerste mededeeling). 621. (Tweede mededeeling). 889.
- ZINKAMALGAMEN (Het elektromotorisch gedrag der). 17.
- ZON (Regelmatige gevolgen van onregelmatige straalbreking in de). 181.
- ZONNEVLEKKEN (De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der). (Eerste mededeeling). 621. (Tweede mededeeling). 889.
- ZUURSTOF (Onderzoekingen over de magnetisatie van vloeibare en van vaste). 937.

- ZWAARDEMAKER (H.). Over geurverwantschappen op grond van door den Heer J. HERMANIDES verrichte waarnemingen. 53.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. J. J. BUIJTENDIJK: „Over de veranderingen in het bloedserum van haaien na verbloeding”. 261.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. J. J. BUIJTENDIJK: „Over de samenstelling der urine van haaien, bij normale en versterkte diurese”. 264.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. K. M. NOYONS: „Mededeelingen omtrent het electrocardiogram van het atrium cordis”. 450.
 - brengt verslag uit over het Laboratorium Col d'Olen. 677.
 - De Camera silenta van het Physiol. Lab. te Utrecht”. 739.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. K. M. NOYONS: „Over Physiologische Sklerometrie”. 801.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. J. J. BUIJTENDIJK: „Over de gaswisseling der koudbloedige dieren in verband met hunne grootte”. 870.
- ZWAVEL en tellurium (Studiën over het Tellurium: I. „Over het wederzijdsch gedrag der elementen”). 606.
- ZIJLSTRA (K.). Bijdragen tot de kennis der waterbeweging in de planten. 580.



Q
57
A522
dl 18
gdl 2

Akademie van Wetenschappen,
Amsterdam. Afdeling voor
de Wis- en Natuurkundige
Wetenschappen
Verslag van de gewone
vergaderingen

Physical &
Applied Sci.
Serials

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

STORAGE

